中学校段階の証明の生成過程における学習困難性

松浦　妃南[*1]　藤川　洋平[*2]　口分田　政史[*3]

（2022年9月30日　受付）

証明学習の困難性の要因には，認知的要因と情緒的要因がある。証明学習の問題点の1つに論理的な誤りや飛躍のある「未完成な証明」の生成があり，この要因は認知的側面の影響が大きい。そこで本研究では，中学校第2学年を対象に「未完成な証明」に焦点を当てて，証明の生成過程に関わる認識調査を行った。その結果，学習者が生成する「未完成な証明」の特徴は，証明問題の種類によって異なることが明らかとなり，それぞれの誤りの特徴に応じた指導を行う必要性が示された。

キーワード：証明，生成過程，未完成な証明，証明の構成，証明の構想

1. 問題と目的

1.1 証明学習の現状と課題

証明は，確かな根拠から論理的に考察する力を育成するための重要な学習内容の1つであり，学校数学で明示的な焦点が当てられるのは中学校第2学年からである。一方で証明学習の困難性は以前から今日に至るまで指摘されている。H30年度全国学力・学習状況調査問題数学Aの問$\boxed{8}$では，演繹的推論と帰納的推論を比較する問題が出題されているが，正答率は46.1%であった。主な誤答には，帰納的推論を証明できていると判断した解答があり，その割合は39.0%であった。一方で証明の生成過程[註1]における全ての段階で学習困難性がみられるというわけでもない。例えば，H26年度全国学力・学習状況調査問題数学Aの問$\boxed{8}$では，証明の方針に関する問題が出題されており，正答率は76.4%であった。こうした現状に対して，牧野（2005）は「証明ができない，証明を記述できない生徒の状態を詳細に捉え，生徒の状態に応じて指導する必要がある」と述べているように，証明学習の困難性の実態を解明することは重要な研究課題である。

---

*1福井大学・奈良女子大学・岐阜聖徳学園大学連合教職開発研究科
*2福井大学教育学部附属義務教育学校後期課程
*3福井大学教育学部

1.2 証明の生成過程における学習困難性について

証明の生成過程には，証明の構想，証明の構成に加え，証明を吟味する段階がある（太田，2017)。辻山（2011）によると，証明の構想は「どのような要素を用いてどのように事柄の仮定と結論を結び付けられるのかを探る営み」と定義される。また証明の構成は「各要素や要素間の関係を検討し，演繹的な推論の形に表現し，仮定と結論を結び付ける営み」と定義される。また証明は構想から構成へと一方向的に取り組まれるわけではないため，証明の構想と構成は，相互に関連した営みであると考えられる。さらに証明の吟味は「証明を読み，論理的に誤りや飛躍がないかを判断し，正しく修正すること」である（太田，2017)。ここで証明の生成過程における学習困難性について，「証明が生成できない」と判断されている学習者の中にも証明の構想はある程度できている可能性がある。また「一見証明を正しく生成できているように見える学習者」であっても，証明の形式に要素を当てはめて構成しただけで，構想を踏まえた構成ができていない可能性もある（牧野，2005)。この点について学習者が生成する証明には，いくつかの段階が存在することが報告されている。例えば，Senk（1985）は，学習者が生成する証明には，次の５つの段階があることを指摘している（Figure 1)。

0. 生徒は何も記述していないか，「条件」だけを記述しているか，あるいは，妥当でない役に立たない演繹だけを記述している。
1. 生徒は少なくとも一つの妥当な演繹を書き，根拠を与えている。
2. 生徒は推論を用いている証拠を示している。ただし，その証明は途中で演繹が止まっているか，証明のステップの最初で誤った推論に基づいているため妥当でない一連の諸言明を記述している。
3. 生徒は証明を記述している。その証明において，全てのステップは論理的になっているが，表記，語彙，あるいは定理の名称に誤りがある。
4. 生徒は多くても表記の間違いが一つあるぐらいで，妥当な証明を記述している。

Figure 1　Senk（1985）による証明の５つの生成段階

またLin（2005)，Heinzeら（2008）は，幾何の証明に関する学習者のパフォーマンスについて，以下の4つのパターンを報告している（Figure 2)。

①受容可能な証明（acceptable proof）
②未完成な証明（incomplete proof）
③不作法な証明（improper proof）
④直観的な証明（intuitive proof）

Figure 2　Lin（2005）による証明の4つのパターン

受容可能な証明とは「ナラティブ表現や記号表現を伴った，前提から結論までの妥当な演繹的過程」とされるのに対し，未完成な証明とは「生徒が演繹的な推論を試みているが論理的な誤りや飛躍があるもの」である。牧野（2014）は未完成な証明について，Heinzeら（2008）の定義に

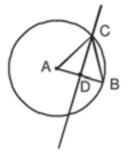
「証明を中断しているもの」を加えて定義している。また不作法な証明とは「幾何について間違った知識や不適切な性質を使ったりしている，全く演繹的でないアプローチをしているもの」であり，直観的な証明とは「視覚的判断に基づいたもの」である。

これらを踏まえ，証明学習の困難性の実態について，証明の生成過程を観点に検討したい。まず証明の構想に困難を抱える学習者と証明の構成に困難を抱える学習者に分けて議論する。前者は，Senk（1985）の段階 0 や，Lin（2005）の③，④のような証明を生成することが予想される。これに対し後者は，証明の構想ができているのであれば，Senk (1985) の段階1，2，3やLin (2005) の②のような証明を生成することが予想される。このように証明の生成過程において学習者がどこに困難を抱えているかによって生成する証明に差異がみられると考えられる。

本研究では「証明の構想はある程度できているものの証明の構成が困難な学習者」に焦点を当てる。この理由として，まず学校数学の証明指導では，学習者が生成する未完成な証明は十分に改善されない可能性があるからである。現行の検定教科書では，指導の重点は，証明の構想に置かれる傾向があり，証明の構成については穴埋め形式で指導されることが多く問題点が指摘されている (岡本ら，2020)。また未完成な証明を生成する学習者は，証明に全く手がつけられないわけでないため，教授方略の改善が与える影響が大きいと考えられるためである。

1.3 未完成な証明に関する検討課題

本研究で着目する「未完成な証明」は，ある程度まで証明を構成したが完成に至っていないことから情緒的側面よりも認知的側面の影響が大きいと考えられる（牧野，2014)。Lin（2005）は，Figure 3の問題を分析対象とし，未完成な証明の生成要因について検討している。



A is the center of a circle and AB is a radius. C is a point on the circle where the perpendicular bisector of AB crosses the circle. Please prove that triangle ABC is always equilateral.

Figure 3　Lin（2005）が対象とした証明問題

上記の証明問題は，△ ABC が正三角形であることを導く多段階の演繹的推論を要する証明問題である。分析の結果，学習者が未完成な証明を生成する要因として 3 段論法に関わる推論形式の理解が不十分である可能性や，自明である命題は記述しなくて良いとする誤った判断を持ち合わせている可能性が指摘されている。これらは，学習者が未完成な証明を生成する要因の 1 つであると考えられ，証明学習への示唆を与えるものである。しかし，Lin（2005）が分析対象としているのは 1 種類の証明問題のみであり，他の証明問題においても，学習者が未完成な証明を生成する要因は同じなのかについては検討する必要がある。例えば，証明学習の初期で取り扱われる三角形の合同の証明のような基礎的な問題では，証明の構成を形式的に理解して要素を当てはめているだけの学習者が多いことが予想される。また多段階の演繹的推論を要する証明の応用問

題であっても，例えば補助線を用いる必要があれば，証明の構想の難易度が高くなると考えられる。一方で推論過程が長くなり記述量が増えれば，証明の構成の難易度が増すと考えられる。こうした証明問題の差異による未完成な証明の特徴やその要因の違いについては，先行研究において十分に解明されていない。また未完成な証明の改善までを見通せば，現行の証明の構想に重点を置いた指導が，異なる種類の証明問題で生成される未完成な証明の改善にどの程度影響を与えているのかについては検討する必要がある。

1.4 証明の吟味に関する検討課題

証明の構想と構成に着目してきたが，証明を吟味する段階においても学習者が未完成な証明を生成する要因があると考えられる。H29年告示の学習指導要領では「三角形や平行四辺形の性質の証明の学習においては，証明を書くこととともに証明を読むことも大切である」と示されており，「証明を読むことは，証明を評価・改善したり，証明をもとに発展的に考えたりする際に必要である」とある。学習者が，自ら生成した未完成な証明を未完成であると適切に評価し修正することができれば，未完成な証明の改善が期待できる。逆に言えば，未完成な証明を生成する学習者は，自ら生成した証明を未完成であると評価していない可能性があることや，未完成であることを認めつつも適切に修正できていない可能性がある。こうした未完成な証明の吟味については，先行研究で十分に議論されていない検討課題であると考えられる。

1.5 本研究の目的について

以上の議論を踏まえ，本研究では未完成な証明に焦点を当て，証明学習の困難性の実態を明らかにすることを目的とする。この目的を達成するために，以下の３点を分析の視点として設定した。分析の視点１は「証明問題の種類によって，学習者が生成する未完成な証明にどのような差異がみられるのか」である。基礎的な問題から応用問題まで，いくつかの証明問題を提示し，学習者が生成した証明を分析することから検証する。分析の視点2は,「証明の構想を提示することが，証明の生成にどのような影響を与えるのか」である。分析の視点１で用いた複数の証明問題を対象に，証明の構想を提示することがヒントとして機能する場合とそうでない場合について分析する。 分析の視点３は,「学習者は，未完成な証明をどの程度吟味できるのか」である。まず受容可能な証明と未完成な証明を提示し，それらを正しく区別できるのかについて分析する。その上で未完成な証明を，どの程度正しく修正することが可能かについて分析する。

2. 方法

2.1 実施時期

2021年12月21日（火），23日（木）に調査を行った。所要時間は，両日とも約45分であった。

2.2 対象者

Ａ県内Ｂ中学校第2学年の同一クラスで両日実施し，21日は36名，23日は34名（2名欠席）であった。第２学年の証明に関する内容は既習であった。しかし証明を学習した直後であり，証明

問題の形式に不慣れな学習者もみられた。

2.3 課題冊子

課題は3種類であり，証明生成課題（構想ヒント無），証明生成課題（構想ヒント有），証明吟味課題であった。以下，それぞれの課題について述べる。なお，証明を学習した直後であったため，証明課題は三角形の合同に関わる内容に限定した。

証明生成課題（構想ヒント無）

証明生成課題（構想ヒント無）は，次の3種類を作成した。

(1) 証明生成課題（基礎）
(2) 証明生成課題（応用：構想難易度高）
(3) 証明生成課題（応用：構成難易度高）

(1) は，学習初期に取り扱われる基礎的な三角形の合同の証明問題である（Figure 4）。これに対して三角形の合同を中間命題とする応用問題を2種類作成した。(2) は，補助線を引くことが必要であり構想の難易度が高いと考えられる応用問題である（Figure 5）。(3) は，構想は比較的単純であるものの記述量が多くなり構成の難易度が高いと考えられる応用問題である（Figure 6）。

(1)　右の図で，AB=DC，∠ABC=∠DCBならば△ABC≡△DCBとなることを証明しなさい。

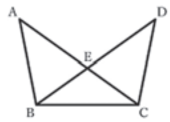


Figure 4　証明生成課題（基礎）

(2)　右の図のように，点A，B，Cを頂点とする正三角形の辺AB，AC上にそれぞれBD=AEとなる点D，Eをとる。
このとき，DC=EBになることを証明しなさい。

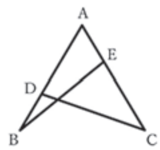


Figure 5　証明生成課題（応用：構想難易度高）

(3)　右の図で，AC=CE=DF=FH，BC=CD=EF=FGである。
このとき，△ABC≡△HGFであることを証明せよ。

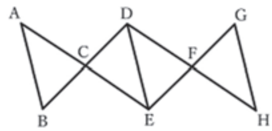


Figure 6　証明生成課題（応用：構成難易度高）

証明生成課題（構想ヒント有）

証明生成課題（構想ヒント有）は，次の3種類を作成した。

（1）証明生成課題（基礎）

（2）証明生成課題（応用：構想難易度高）

（3）証明生成課題（応用：構成難易度高）

問題は，証明生成課題（構想ヒント無）で用いた3種類と同じ構成の問題を用いた。なお調査日程の制約から，同日に同じ対象者に対して，証明生成課題（構想ヒント無）と証明生成課題（構想ヒント有）についての調査を行う必要があった。そのため全く同一の問題形式での出題を防ぐために，証明問題の構成は同じであるが扱う図を少し変更した。加えて出題順を，構想ヒント無を3種類出題したのちに，構想ヒント有を出題し，相互の影響を少なくした。提示した構想ヒントは，それぞれの問題に対して，証明の構想を会話形式で提示した。調査では，学級全体で足並みをそろえて進行し，問題を解き終えたら前の問題には戻らないように指導した。

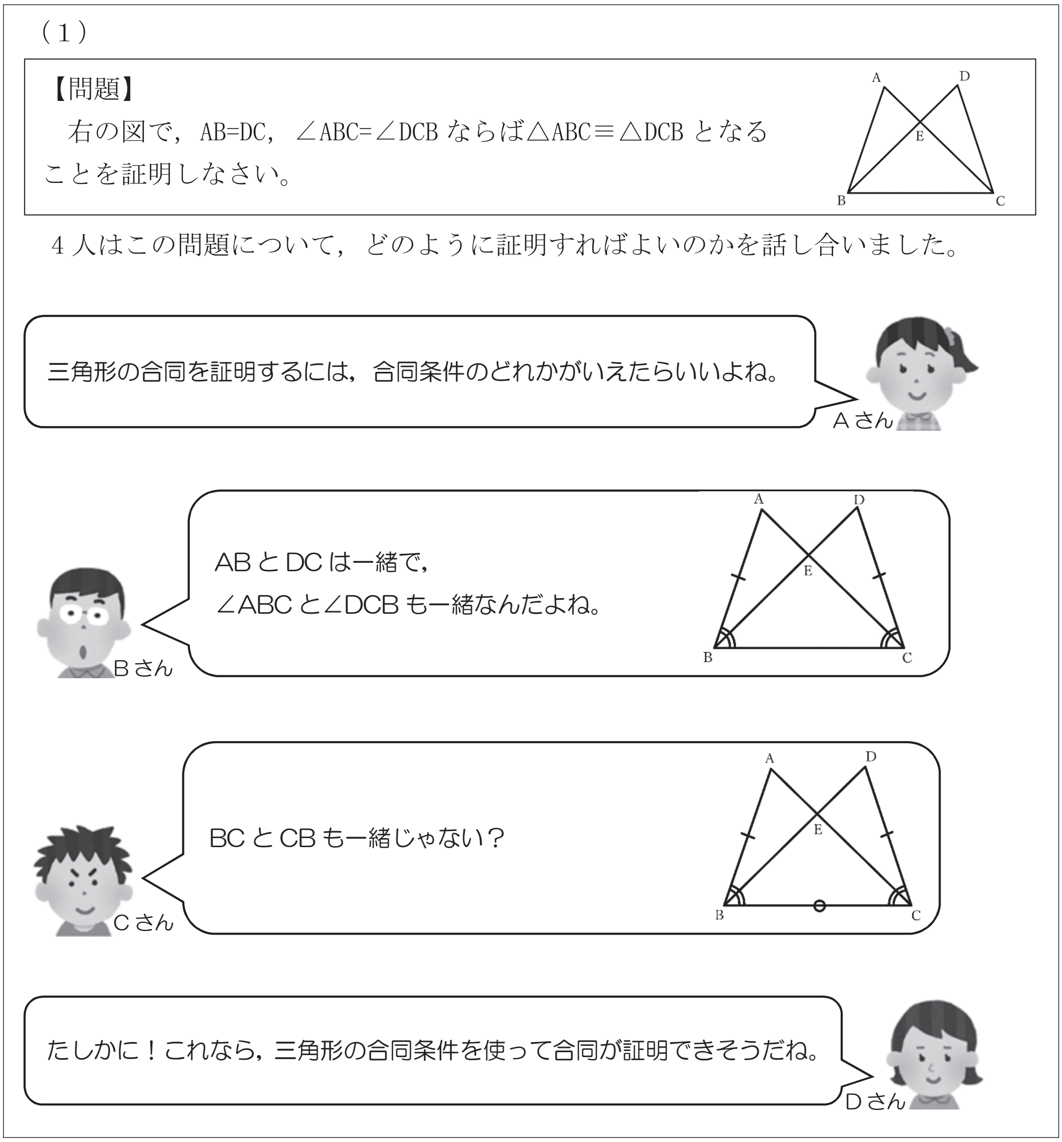
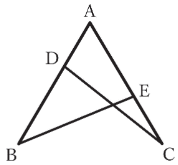


Figure 7　証明の構想ヒント（基礎）

（2）

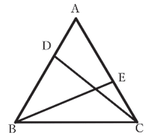
【問題】

右の図のように，点 A,B,C を頂点とする正三角形の辺 AB，AC 上にそれぞれ BD=AE となる点 D,E をとる。このとき，DC=EB になることを証明しなさい。



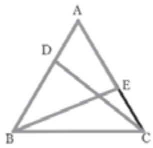
4 人はこの問題について，どのように証明すればよいのかを話し合いました。

△ABC が正三角形だから，点 B と C を結んでみたら…。



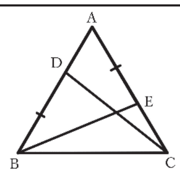
C さん

あ！△BCD と△ABE って合同っぽくない？



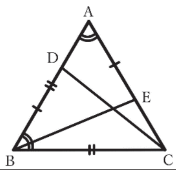
D さん

ほんとだ！そこなら，BD と AE は一緒だよね。



A さん

△ABC は正三角形ってことは，BC と AB，
∠DBC と∠EAB も一緒になるね。



B さん

C さん

たしかに！これなら，三角形の合同条件を使って△BCD と△ABE が合同ってことがいえそうだね。

D さん

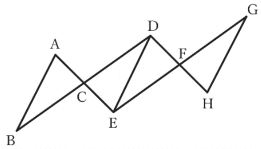
合同ってことは，対応する辺は等しくなる！！

Figure 8　証明の構想ヒント（応用：構想難易度高）

（3）

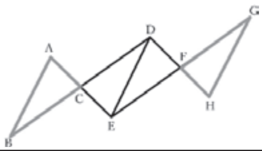
【問題】

右の図で，AC=CE=DF=FH，BC=CD=EF=FG である。
このとき，△ABC≡△HGF であることを証明せよ。



4 人はこの問題について，どのように証明すればよいのかを話し合いました。

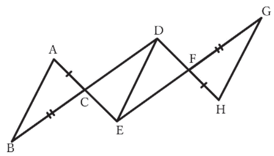
三角形の合同を証明するには，
合同条件のどれかがいえたらいいね。



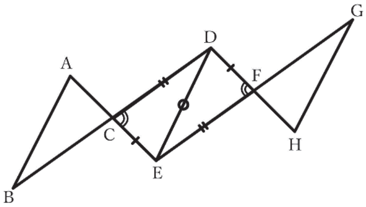
Ａさん

Ｃさん

AC と HF は一緒で，
BC と GF も一緒なんだよね。

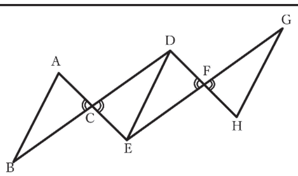


△DCE と△EFD をみると，
CE と FD が一緒で，
CD と FE も一緒だよね。
あと，DE と ED は同じ。
ってことは，合同で∠DCE と∠EFD
が等しいってことがいえるね。



Ｂさん

そうだね。それに，∠ACB と∠DCE，
∠HFG と∠EFD はそれぞれ対頂角だから
等しくなるよね。



Ｄさん

Ｃさん

なるほど。Ｂさんとｄさんの考えをつなげると，∠ACB と∠HFG は等しいっていえるな！

そうだね。みんなの意見をまとめれば証明できそうだ！

Ｂさん

Figure 9　証明の構想ヒント（応用：構成難易度高）

証明吟味課題

証明吟味課題は，評価課題と修正課題の2種類を作成した。

（1）評価課題

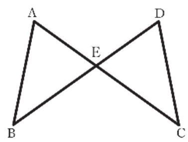
（2）修正課題

評価課題は，証明ができている・できていないを評価する問題であり，Figure 10は，問題の一部である。証明の種類は，図形領域における受容可能な証明，論理に誤りのある未完成な証明，測定による帰納的推論を用いた不作法な証明，具体操作による帰納的推論を用いた不作法な証明の4種類であった。

（1）　次のうち，下線の文章を証明できているといえるものには○，証明できているとはいえないものには×，どちらともいえないものには△をつけなさい。

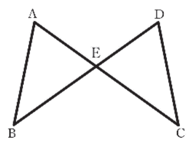
AE=DE，BE=CE ならば△AEB と△DEC は合同である。

△AEB と△DEC で
仮定より　AE=DE　・・・①
　　　　　BE=CE　・・・②
対頂角は等しいので
　　∠AEB=∠DEC　・・・③
①②③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
　　△AEB≡△DEC



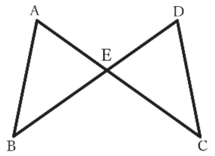
AE=DE，BE=CE ならば△AEB と△DEC は合同である。

△AEB と△DEC で
仮定より　AE=DE　・・・①
　　　　　BE=CE　・・・②
対頂角は等しいので
　　∠AEB=∠DEC　・・・③
①②③より 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
　　△AEB≡△DEC



AE=DE，BE=CE ならば△AEB と△DEC は合同である。

△AEB と△DEC で
辺の長さを測ると，
AE=3cm，DE=3cm であるから
　　AE=DE　・・・①
EB=4cm，EC=4cm であるから
　　EB=EC　・・・②
分度器で角度を測ると，∠AEB=70°，∠DEC=70°であるから
　∠AEB=∠DEC　・・・③
①②③より，２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
　△AEB≡△DEC



AE=DE，BE=CE ならば△AEB と△DEC は合同である。

AE と DE，BE と CE が重なるように
△ABE を右へ折り返すと，
ぴったり重なった。
よって，△AEB と△DEC は合同である。

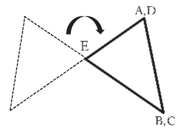


Figure 10　証明吟味課題（評価課題）

修正課題は，構成された未完成な証明の誤りを指摘し，正しく修正することができるかどうかをみる問題であり，Figure 12は，その一部である。扱った証明問題は，証明生成課題で扱った証明問題と同じ構成の問題である（Figure 4，5，6）。証明生成課題と同じ構成であることの調査への影響を考慮し，修正課題は調査２日目に実施した。未完成な証明は，論理に飛躍があるものと誤りがあるものの2種類である。Figure 12は，構想が難しい問題を扱った修正課題であり，①論理に飛躍のある未完成な証明，②論理に誤りがある未完成な証明の２種類を提示した。この証明問題における受容可能な証明とは以下のようなものである（Figure 11）。

（証明）△BCDと△ABEで
　仮定より　BD=AE　・・・①
　△ABCは正三角形より　BC=AB　・・・②
　　　　　　∠DBC＝∠EAB＝60°・・・③
　①②③より，２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
　　△BCD≡△ABE
　合同な図形の対応する辺はそれぞれ等しいので
　　DC=EB

Figure 11　修正課題（2）の受容可能な証明

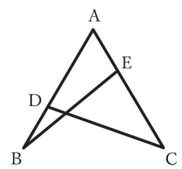
この証明における命題それぞれについて，「BD = AE」を前提P1，「BC=AB」を前提P2，「∠DBC=∠EAB=60°」を前提P3，「△BCD≡△ABE」を中間命題R，「DC=EB」を結論Qと呼ぶこととする。この証明を元に作成した未完成な証明（Figure 12）の詳細は次の通りである。まず①論理に飛躍のある未完成な証明では，前提P3，中間命題Rの根拠「2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」，結論Qの根拠「合同な図形の対応する辺はそれぞれ等しい」を省略したものを取り扱う。ここでは，省略されている命題と根拠を書き足すことができるかどうかが分析の観点となる。次に②論理に誤りのある未完成な証明は，前提P3に結論Qを誤って用いており，中間命題Rの根拠を「3組の辺がそれぞれ等しい」としたものである。ここでは，誤っている命題や根拠を指摘し，正しく修正できるかどうかが分析の観点となる。

(2)　あるクラスで次の問題を出題したところ，いくつかの解答が挙げられた。それぞれの解答をみて，正しく証明できているか，誤っているかを答えなさい。また，誤っていると答えたものは，誤っている部分を正しく修正しなさい。

【問題】

右の図のように，点A,B,Cを頂点とする正三角形の辺AB，AC上にそれぞれBD=AEとなる点D,Eをとる。

このとき，DC=EBになることを証明しなさい。



①　（　正しい　・　誤っている　）

(証明)　△BCDと△ABEで

仮定より　BD=AE　・・・①

△ABCは正三角形より

BC=AB　・・・②

①②より　△BCD≡△ABE

よって　DC=EB

②　（　正しい　・　誤っている　）

(証明)　△BCD と△ABE で

仮定より　BD=AE　・・・①

DC=EB　・・・②

△ABC は正三角形より

BC=AB　・・・③

①②③より，３組の辺がそれぞれ等しいので

△BCD≡△ABE

合同な図形の対応する辺はそれぞれ等しいので

DC=EB

Figure 12　証明吟味課題（修正課題）

3. 結果と考察

3.1 分析の視点1：証明問題の種類による未完成な証明の差異について

Table 1-1は，証明生成課題（構想ヒント無）の結果である。基礎的な問題では，受容可能な証明を生成できた学習者は69.4%であり，未完成な証明は22.2%に過ぎなかった。Table 1-2より，未完成な証明のうち，論理に飛躍のあるものが一番多く，証明に必要な一つの命題を省略したり，根拠を明記しなかったりする解答がみられた。構想が難しい問題では，受容可能な証明を生成できた学習者は25.0%と低く，未完成な証明は61.1%にも達した。また，Table 1-2より，未完成な証明の中でも証明を中断しているものが36.4%と最多であった。つまり証明の生成過程において構想に困難さがある場合，証明を中断する傾向があると考えられる。構成が難しい問題では，受容可能な証明を生成できた学習者は33.3%と低く，未完成な証明は52.8%にも達した。また，Table 1-2より，未完成な証明の中でも論理に飛躍のあるものを生成した学習者が36.8%と最多であった。つまり証明の生成過程において構成に困難さがある場合，論理が飛躍した証明を記述する傾向があると考えられる。

Table 1-1 証明生成課題（構想ヒント無）の反応（カッコ内は%）

構想ヒント無	受容可能な証明	未完成な証明	それ以外	無解答
基礎的な問題	25（69.4）	8（22.2）	0（0.0）	3（8.3）
構想が難しい問題	9（25.0）	22（61.1）	1（2.8）	4（11.1）
構成が難しい問題	12（33.3）	19（52.8）	1（2.8）	4（11.1）

Table 1-2 証明生成課題（構想ヒント無）の未完成な証明の誤答類型（カッコ内は%）

構想ヒント無	飛躍	誤り	中断	その他	計
基礎的な問題	4（50.0）	2（25.0）	2（25.0）	0（0.0）	8（100.0）
構想が難しい問題	5（22.7）	5（22.7）	8（36.4）	4（18.2）	22（100.0）
構成が難しい問題	7（36.8）	5（26.3）	2（10.5）	5（26.3）	19（100.0）

3.2 分析の視点2：証明の構想を提示することによる証明の構成への影響について

Table 2-1は，証明生成課題（構想ヒント有）問題の結果である。構想ヒント無の問題の結果と比較して，基礎的な問題に関しては，正答率は69.4%と変化はなかった。構想が難しい問題に関しては，正答率は33.3%であり，一部の学習者に構想を提示することがヒントとして機能していた。構成が難しい問題に関しては，正答率は26.5%と低くなり，Table 2-2より，未完成な証明のうち論理に飛躍のあるものを生成する学習者が増えた。この結果から，構成が難しい問題では，証明の構想を提示することは証明を正しく生成するヒントとして機能しないばかりか，論理の飛躍を促す恐れがあることが示唆された。

Table 2-1 証明生成課題（構想ヒント有）の反応（カッコ内は%）

構想ヒント有	受容可能な証明	未完成な証明	それ以外	無解答
基礎的な問題	25（69.4）	8（22.2）	0（0.0）	3（8.3）
構想が難しい問題	12（33.3）	19（52.8）	1（2.8）	4（11.1）
構成が難しい問題	9（26.5）	21（61.8）	2（5.9）	2（5.9）

Table 2-2 証明生成課題（構想ヒント有）の未完成な証明の誤答類型（カッコ内は%）

構想ヒント有	飛躍	誤り	中断	その他	計
基礎的な問題	3（37.5）	1（12.5）	2（25.0）	2（25.0）	8（100.0）
構想が難しい問題	6（31.6）	7（36.8）	5（26.3）	1（5.3）	19（100.0）
構成が難しい問題	13（61.9）	2（9.5）	1（4.8）	5（23.8）	21（100.0）

3.3 分析の視点3：未完成な証明の吟味について

Table 3は，証明吟味課題における評価課題の結果（一部）である。

Table 3　証明吟味課題（評価課題）の反応（カッコ内は％）

評価課題	○	×	△
受容可能な証明	33（91.7）	0（0.0）	2（5.6）
未完成な証明	9（25.0）	22（61.1）	4（11.1）
不作法な証明(測定)	9（25.0）	14（38.9）	12（33.3）
不作法な証明(具体操作)	9（13.9）	11（30.6）	19（52.8）

調査の結果，受容可能な証明を証明できていると正しく選択できているのは91.7%であるが，論理に誤りのある未完成な証明を証明できていると選択した学習者が25.0%と一定数いることがわかる。また，測定による帰納的推論を用いた不作法な証明を証明できていると選択した学習者が25.0%，具体操作による帰納的推論を用いた不作法な証明が証明できていると選択した学習者が13.9%であった。この結果から，未完成な証明や帰納的推論を用いた不作法な証明を証明できていると誤って認識している学習者の存在が明らかとなった。また，不作法な証明（測定・具体操作）について，どちらともいえないを選択した学習者がそれぞれ33.3％，52.8%と多くみられた。この結果から，不作法な証明（測定・具体操作）では，学習者は証明が正しいか否かを判断することに困難を抱えていることが分かった。

Table 4，5-1，5-2は，証明吟味課題における修正課題の結果である。調査の結果，未完成な証明を読み，正誤判断をすることは比較的容易であるが，誤っている箇所を正しく修正することに困難を抱えている学習者の存在が明らかとなった。特に，未完成な証明のうち論理に飛躍のあるものについて，構想が難しい問題に関しては，82.4％が正しく正誤判断できたものの，飛躍している3か所を全て正しく修正できたのは14.7%と少なかった。修正箇所の中でも，2つの三角形を合同と示すための根拠である三角形の合同条件や，結論を示す根拠である合同な図形の性質を明記することができていないことが分かる。この結果を踏まえ修正箇所ごとの割合から見ると，命題そのものが省略されているものは比較的修正しやすいが，その根拠が省略されているものは論理に飛躍があるとはみなさず，修正できない学習者が多いことがわかった。これは，命題の根拠が記述されていなくても未完成な証明を受容可能な証明であると捉えていることが要因として考えられる。それに対し，論理に誤りのある未完成な証明については，飛躍のあるものよりも正しく修正できる学習者の割合は増えた。2か所の誤りを指摘し，どちらも正しく修正できた学習者は52.9％であり，各反応率と比較して，大きな差は見られなかった。このことから，論理に誤りがあると気付くことができた学習者はほとんど全員が誤りを正しく修正できることが明らかとなった。

Table 4　証明吟味課題（修正課題）における正誤判断問題の反応（カッコ内は%）

正誤問題	正しい	誤っている	無回答
①	4（11.8）	28（82.4）	2（5.9）
②	8（23.5）	23（67.6）	3（8.8）

Table 5-1　証明吟味課題（修正課題①）における修正箇所の反応（カッコ内は%）

修正箇所（修正課題①）	正答
前提P3	23（67.6）
中間命題Rの根拠（2辺挟角）	14（41.2）
結論Qの根拠（合同な図形の性質）	6（17.6）
完答	5（14.7）

Table 5-2　証明吟味課題（修正課題②）における修正箇所の反応（カッコ内は%）

修正箇所（修正課題②）	正答
× DC=EB	20（58.8）
前提P3	19（55.9）
×3組の辺	21（61.8）
中間命題Rの根拠（2辺挟角）	20（58.8）
完答	18（52.9）

4. 総合考察

以上を踏まえて総合考察を行う。本研究では，証明学習の困難性の要因を明らかにし，教育への示唆を得ることが目的であった。

4.1 本研究の成果

分析の視点1より，学習者が生成する未完成な証明の特徴が証明問題の種類によって異なることが明らかとなった。まず基礎的な問題と構成が難しい問題では，学習者は，論理に飛躍のある未完成な証明を学習者が生成する傾向がみられた。これは証明の構想はある程度できているものの，証明の構成と吟味に課題があるためと考えられる。これに対して構想が難しい問題では，学習者は中断した未完成な証明を生成する傾向がみられた。この要因として，証明の構想に困難性があるため，証明を生成できずに中断していることが考えられる。このように証明問題の特徴によって未完成な証明を生成する要因は異なっていると考えられるため，未完成な証明を改善するためには，それぞれの誤りに応じた指導が必要であると考えられる。加えて，基礎的な問題だけでなく，証明の生成過程において構想が難しい問題と，構成が難しい問題を意図的に取り扱うことで，証明を生成する力の育成につながることが期待される。

分析の視点2より，証明の構想を提示することは，証明を生成するヒントとして機能する場合も

あるが，構成が難しい問題においてはヒントとして機能しにくい場合もあることが明らかとなった。さらに証明の構想をヒントとして提示することでかえって，論理に飛躍のある未完成な証明の生成を促進してしまう懸念も指摘された。この要因として証明の構想を理解した時点で，証明が完了したと捉える学習者が多いことが予想される。つまり演繹的に正しく記述する必要性を認識していないことが問題として指摘できる。したがって証明の構想だけでなく証明の構成に明示的な焦点をあてた学習内容が重要であると考えられる。証明の構成に焦点を当てた学習内容として，例えば，今回の調査で扱ったような構想は比較的単純ではあるが推論過程が長くなるような証明問題を取り扱うことが有効であると考えられる。

分析の視点３では，未完成な証明や不作法な証明を受容可能な証明と誤判断している学習者の存在が明らかとなった。また未完成な証明を正しく修正することが困難である学習者が多い実態が示された。特に論理に飛躍のある未完成な証明について，命題の根拠が省略されているものを受容可能な証明であると誤って評価し，正しく修正できない傾向が明らかになった。つまり自らが生成した証明の未完成さを正しく評価できないことが，未完成な証明を生成する一要因となっていると考えられる。したがって，指導では，受容可能な証明と未完成な証明とを比較させながら，その区別を明確にさせることが重要であると考えられる。この点について，未完成な証明を読み正誤判断をすることは，学習者にとって比較的容易であることが示された。つまり証明を書くことより，証明を読むことの方が容易であった。したがって，証明指導では，まずは証明を読む指導から始め，それを足掛かりに証明を書く指導へとつなげていくことが効果的である可能性がある。とりわけ受容可能な証明だけでなく未完成な証明を読み，誤っている箇所を正しく修正する力を培う学習が重要であると考えられる。ここで提示する未完成な証明は，論理に誤りのあるもの，論理に飛躍のあるもの，中断しているものの3種類を取り上げることが重要であり，「証明が正しい」とは何かについて理解させることが重要となる。

4.2 今後の課題

本研究は図形領域における証明学習に焦点を当てたものであり，その中でも中学校第２学年で取り扱われる三角形の合同の証明学習に限定して議論を進めてきた。したがって今後の課題として，その他の単元や他領域でも同様の知見が得られるのかどうかについて検証してみる必要がある。また本調査は，全ての問題を同一の対象者に対して実施したものであった。調査時の行動観察や問題の提示順など，ある程度の配慮は行ったが，調査問題が相互に影響している可能性がないとは言えない。調査方法についてさらに改善を進め検証する必要がある。さらに調査結果を踏まえ，具体的な教材を開発し，教育実践を行うことを通して，得られた知見の妥当性について検証する必要がある。

註.

1）証明の生成とは，証明の構想を立て，その構想に基づいて証明を構成することを意味する（太田，2017）。

付記

本稿は，第26回数学教育学会大学院生等発表会予稿集の内容に，新たな調査課題を分析対象として加え，加筆・修正したものです。また本研究はJSPS科研費22K13780の助成を受けたものです。調査にご協力頂きました生徒の皆様と先生方に，ここに改めてお礼申し上げます。

引用文献

国立教育政策研究所（2007-2019）．平成30年度　全国学力・学習状況調査　報告書．
https://www.nier.go.jp/18chousakekkahoukoku/report/data/18mmath.pdf（2022年9月10日閲覧）
国立教育政策研究所（2007-2019）．平成26年度　全国学力・学習状況調査　報告書．
https://www.nier.go.jp/14chousakekkahoukoku/report/data/mmath.pdf（2022年9月10日閲覧）
牧野智彦，中学2年生による証明の記述に関する研究:記述された証明の分析を通して，科教研報，Vol. 19，No. 6，pp. 29-34，2005
太田一成，学校数学図形領域における，証明による命題の全称性の確立に関する研究－論理的に考える力の育成を目指して－，信州大学教育学部研究論集，第11号，pp. 1-20，2017
辻山洋介，学校数学における証明の構想の意義に関する研究，数学教育学論究，95，pp. 29-44，2011
Senk, S, How Well Do Students Write Geometry Proofs?, Mathematics Teacher, 78, (6), pp. 448-456, 1985
Lin, MODELING STUDENTS' LEARNING ON MATHEMATICAL PROOF AND REFUTATION, 2005
牧野智彦, 生徒による証明に関する困難性の認知的特徴について, 宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要, 2014
岡本和夫・森杉馨・根本博・永田潤一郎他，未来へ広がる数学2. 啓林館，pp. 94-157，2020
文部科学省，学習指導要領（平成29年告示）解説　数学編，p. 115，2017