

THE IEICE TRANSACTIONS ON FUNDAMENTALS OF ELECTRONICS, COMMUNICATIONS AND COMPUTER SCIENCES (JAPANESE EDITION)

IEICE | **電子情報通信学会**
A | **論文誌** 基礎・境界

VOL. J104-A NO. 10
OCTOBER 2021

本PDFの扱いは、電子情報通信学会著作権規定に従うこと。
なお、本PDFは研究教育目的（非営利）に限り、著者が第三者に直接配布することができる。著者以外からの配布は禁じられている。

基礎・境界ソサイエティ

一般社団法人 **電子情報通信学会**

THE ENGINEERING SCIENCES SOCIETY

THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

ハールウェーブレット変換を用いた自律系非線形回路における不安定周期解の解析法

山本 峻太[†] 高松 航平[†] 中林 達哉[†] 茂呂征一郎^{†a)}

Analysis Method of Unstable Periodic Solutions in Autonomous Nonlinear Circuit Using Haar Wavelet Transform

Ryota YAMAMOTO[†], Kohei TAKAMATSU[†], Tatsuya NAKABAYASHI[†],
and Seiichiro MORO^{†a)}

あらまし カオス制御において、系に存在する不安定な周期解が求められれば、不規則性を抑制する制御が容易となることが知られている。しかし、ルンゲクッタ法等の逐次積分法では少しの誤差でも存在すればそれが拡大し不安定な周期解を求めることが困難となる。そこで本論文では、ハールウェーブレット変換を用いた非線形回路の解析法を利用し、自律系回路の不安定周期解の解析を行う。周期が既知である非自律系非線形回路における解析では、周期の初めと終わりを同値とした境界条件を与え、周期解を導出することができた。しかし自律系非線形回路を考える場合、周期も未知数となるため、同様な方法では解析が困難である。そこで我々は、状態方程式のノルムの式を最適化することにより、周期も含めたを求め、不安定周期解を求める手法を提案する。本論文では神力回路や van der Pol 発振器、ローレンツ方程式を例に、提案した解析法により不安定周期解を導出できることを示す。

キーワード ハールウェーブレット、数値解析、不安定周期解、演算行列、カオス

1. ま え が き

予測不可能な振動現象であるカオス現象において、不規則振動を周期的な振動に安定化させるカオス制御が関心を集めている [1]。カオス制御とは、カオスシステムに内在する不安定周期解を安定化させることで実現される。制御目標である不安定周期解があらかじめ分かっていたら制御は容易になるが、一般にルンゲクッタ法のような逐次積分法を用いる場合、少しの数値誤差が指数的に増大し、不安定周期解の解析が困難となる。ゆえに、不安定周期解を導出するための手法を考えることは、カオス制御にとって有用であると考えられる。不安定周期解を求める手法の代表的な例として、ポアンカレ写像の不動点を追跡していく手法が挙げられるが [2]、各ステップごとにポアンカレ断面を

設定し不動点を導出しなければならないため、計算の手間がかかるという問題点がある。また、不安定周期解を求めることなくカオス制御を行うことができる方法として遅延フィードバック法があるが、奇数制約 [3] という制限により制御ができない場合もあり、不安定周期解を用いる手法は依然として有用な制御法である。

一方で、近年ウェーブレット変換を用いた回路の数値解析が注目を浴びている [4]~[10]。ウェーブレットの直交性や局在性から、解が急しゅんに動くような特異点付近の範囲のみを詳細に解析するといったことができるため、微分・積分演算をウェーブレット基底関数から構成することで、微分方程式の数値解を効率的かつ高精度に求めることが可能になる。その一つとして、Barmada らにより Daubechies ウェーブレットによる演算子行列を用いて、フーリエ変換やラプラス変換を用いる手法のような周波数領域での代数方程式レベルでの解析を、ウェーブレット変換領域で行うことができる解析法が提案されている [4]。しかし、この解析法では区間の両端において取り扱いが複雑になる問題が生じてしまう。そこで、我々はハールウェーブ

[†] 福井大学工学部, 福井市

Faculty of Engineering, University of Fukui, 3-9-1 Bunkyo, Fukui-shi, 910-8507 Japan

a) E-mail: moro@u-fukui.ac.jp

DOI:10.14923/transfunj.2020JAP1028

レット変換を用いた回路解析法を提案してきた [6]～[9]. ハールウェーブレットは単純な矩形パルスで構成されるため取り扱いが簡単で、区間の両端が複雑になる問題点の解消ができ、また、変換操作や微分及び積分演算子行列の導出は簡単な定数行列の演算で行える。時間可変回路、非線形回路にも適応が可能であり、多重解像度解析により時間ステップを適応的に変化させることも可能である [7].

ウェーブレット変換を用いた非自律系非線形回路の定常動作解析法では、外部入力により周期が決定され、その周期において始点と終点が一致するという境界条件を与えて状態方程式に適用することで周期解を導出できた [5], [8], [9]. 本手法ではルンゲクッタ法のような逐次積分法とは異なり、過渡状態を計算することなく定常解のみを導出することができるため、非線形回路の定常解析にも有用である。しかし、これらの解析法では周期が未知数となる自律系非線形回路においては、方程式の次元と未知数の数が一致せず、解析ができなかった。しかし、Lin らにより、最適化手法を用いて状態方程式のノルムの最小値を導出することによって自律系回路の周期を求める方法が提案された [10]. そこで本論文では、ハールウェーブレット変換を用いた自律系非線形回路の周期解解析法を提案する。提案手法においては与えられた非線形常微分方程式をハールウェーブレット変換により非線形代数方程式に変換し、その解である未知のハールウェーブレット係数を非線形最適化手法の一つである Levenberg-Marquadt 法によって導出することにより、時系列として得られる近似解を導出する。本手法は文献 [10] の手法を踏襲しつつ、ハールウェーブレット変換の簡便性を持ち合わせている。文献 [10] ではウェーブレット基底関数として 3 次スプライン関数を用いており、その関数計算に手間を要する一方、矩形パルスの組合せで表現できるハールウェーブレットは基底関数の計算に複雑な計算が必要ないため、より簡単に周期解を導出することができると考えられる。また、本手法は逐次積分法ではないため、安定な解だけではなく不安定な解も導出できる。更に、先に述べた不動点の追跡手法と比較しても、簡単な行列計算と 1 回だけの最適化手法の適用によって実現される本手法は、より少ない手間で行えるという利点があると考えられる。本論文では van der Pol 発振器やカオスを発生させる自律系システムである神力回路やローレンツ方程式を例に、ルンゲクッタ法等の逐次積分法では求めることのできない不安定周

期解が導出できることを確認する。

2. 微分方程式のウェーブレット領域表現

2.1 ハールウェーブレット行列

ハール関数は区間 $[0, 1)$ で定義され、

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{m}} \tag{1}$$

$$h_i = \frac{1}{\sqrt{m}} \times \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}, \\ -2^{\frac{j}{2}}, & \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j}, \\ 0 & \text{otherwise } [0, 1) \end{cases} \tag{2}$$

$$i = 0, 1, \dots, m-1, m = 2^\alpha$$

ここで α は正の整数で、 j, k は $i = 2^j + k$, また、 $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) を満たす自然数である。図 1 は $\alpha = 2$ でのハール関数を表している。

ハールウェーブレット行列で H 次のように定義される。

$$H = [\vec{h}_0^T, \vec{h}_1^T, \dots, \vec{h}_{m-1}^T]^T \in R^{m \times m}. \tag{3}$$

ここで $\vec{h}_i = [h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{im}] \triangleq [h_i(t_1), h_i(t_2), \dots, h_i(t_m)]$ は要素が $h_i(t)$ の時系列表現の $1 \times m$ 次のハールウェーブレットの基底ベクトルである。 H は正規直交行列であるということに注意されたい。これらのベクトルや行列を使うことで、ハールウェーブレット変換及び逆ハールウェーブレット変換はそれぞれ次のよ

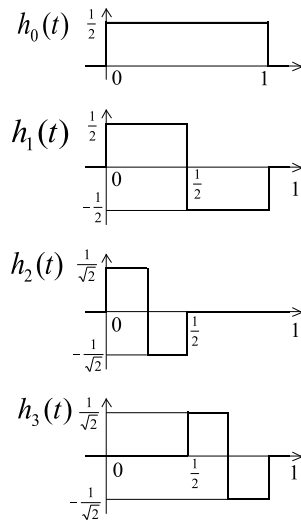


図1 $\alpha = 2$ のときのハールウェーブレット関数
Fig.1 Haar wavelet functions for $\alpha = 2$.

うに表される.

$$X = Hx, \tag{4}$$

$$x = H^T X (= H^{-1} X), \tag{5}$$

ここで $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \triangleq [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]^T$ は関数 $x(t)$ の時系列表現, X はウェーブレット係数を表す $m \times 1$ 次ベクトルである.

2.2 ハールウェーブレットを用いた積分及び微分演算子行列

ハールウェーブレット変換を用いて微分方程式の求解を行う場合, ウェーブレット変換領域における, 積分及び微分演算を行うための演算子行列を導入する必要がある. これらはラプラス変換における微分演算子 s に相当するものであり, これらにより微分方程式は代数方程式へと変換される.

図 2 に示されるブロックパルス関数 $B(t)$ 及びその積分の行列形式表現は式 (6), (7) で定義される.

$$\int_0^t B(\tau) d\tau \equiv Q_B \cdot B(t) \tag{6}$$

$$Q_B = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{2} I_{(m \times m)} + \sum_{i=1}^{\infty} P^i \right] \tag{7}$$

ただし, $i < m$ においては,

$$P^i = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(m-1) \times i} & I_{(m-i) \times (m-i)} \\ \hline 0_{i \times i} & 0_{i \times (m-i)} \end{array} \right],$$

$i \geq m$ においては,

$$P^i = 0_{(m \times m)},$$

であり, $I_{(m \times m)}$ は m 次単位行列, $0_{(i \times j)}$ は $i \times j$ 次元の零行列を表している. ここで Q_B はブロックパルス関数の積分演算子行列, その逆行列 Q_B^{-1} は逆写像を表すことになるので, 微分演算子行列と呼ばれる. この行列を用いることで $Q_B^T x$ は時系列 x の積分を表すことになる. すなわち $x(t)$ の時間積分 $\int_0^t x(\tau) d\tau$ は, 初期状態を考慮して

$$x_I = x_0 + Q_B^T x \tag{8}$$

と時系列表現できる. x_0 は $x(t)$ の初期値ベクトルであり, $x_0 = [x(0), x(0), \dots, x(0)]^T$ である. x_I のウェーブレット変換は式 (5) 及び (8) を用いて,

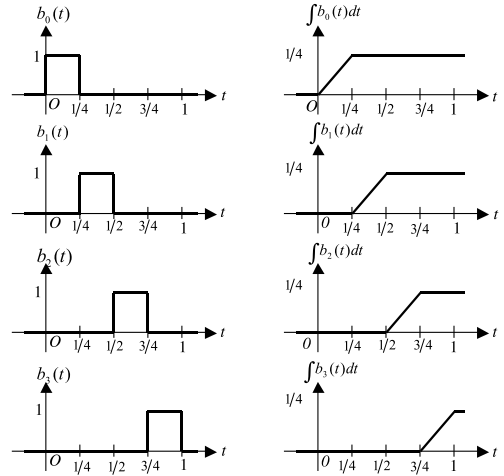


図 2 $\alpha = 2$ のブロックパルス関数と積分関数
Fig. 2 Block pulse functions and their integrals for $\alpha = 2$.

$$X_I = Hx_I = HQ_B^T x + Hx_0 = HQ_B^T H^T X + X_0 \tag{9}$$

と表される. ここで $X_0 = Hx_0$ である. よって, ウェーブレット領域における積分演算子行列は

$$Q_H = HQ_B^T H^T \tag{10}$$

のように与えられ, 最終的に式 (8) のウェーブレット変換は

$$X_I = Q_H X + X_0 \tag{11}$$

と書ける. 一方, $x(t)$ の導関数 $\frac{dx}{dt}$ は積分の逆写像となることを考慮すれば, H の微分演算子行列は次のように与えられる.

$$Q_H^{-1} = H(Q_B^T)^{-1} H^{-1} = H(Q_B^{-1})^T H^T \tag{12}$$

このとき, Q_B^{-1} は次式で与えられることが知られている [11], [12].

$$Q_B^{-1} = 4m \left[\frac{1}{2} I_{(m \times m)} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i P^i \right] \tag{13}$$

以上より, 導関数の系列表現のウェーブレット変換は

$$X_D = Q_H^{-1} [X - X_0] \tag{14}$$

と表すことができる.

ウェーブレット行列 H や演算行列 Q_H 及び Q_H^{-1} は m のみに依存する定数行列であり, 微分方程式のウェー

ブレット領域表現は簡単な行列演算で行うことができる。

2.3 非線形関数のウェーブレット領域表現

非線形関数 $f(x, t)$ を考える。本論文では、 $f(x(t)) = g(x(t)) \cdot x(t)$ のような形をもつ非線形性を仮定する。関数 $f(x)$ の時系列を表す $m \times 1$ 次ベクトルを $f = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)]^T = [g(x_1) \cdot x_1, g(x_2) \cdot x_2, \dots, g(x_m) \cdot x_m]^T$ と定義すると、

$$f = \text{diag}[g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_m)] \cdot x \quad (15)$$

と書き直せるので、そのハールウェーブレット変換は

$$\begin{aligned} Hf &= H\text{diag}[g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_m)] \cdot x \\ &= H\text{diag}[g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_m)]H^T Hx \\ &= H\text{diag}[g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_m)]H^T X \end{aligned} \quad (16)$$

と書ける。したがって行列 $F \triangleq H\text{diag}[g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_m)]H^T$ はウェーブレット領域において系の非線形性を表す行列となる。

3. 定常状態の周期解計算法

以下では、本論文で提案する自律系非線形回路の定常周期解を求める手法を示す。

次の n 次非線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \triangleq A(x, t)x + u(t) \quad (17)$$

を区間 $[0, t_{\max}]$ で解析することを考える。ここで $x(t) = [x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ は未知の状態変数ベクトル、 $A(x, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は非線形時間変化パラメータ行列、 $u(t) = [u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), \dots, u^{(n)}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ は外力ベクトルである。一方、**2.1** で述べたように、各基底関数は区間 $[0, 1)$ で定義されるため、 $\tau \triangleq \frac{t}{t_{\max}}$ なる変数変換を行って、式 (17) を

$$\dot{x} = t_{\max} \{A(x, \tau) + u(\tau)\} \quad (18)$$

と変換することで区間 $[0, 1)$ で微分方程式を解析するように正規化される。なお $\dot{x} = dx/d\tau$ を表す。ここで $t_{\max}A(x, \tau)$ を $A(x, \tau)$ 、 $t_{\max}u(\tau)$ を $u(\tau)$ と書き直すことで、一般性を失うことなく式 (18) を

$$\dot{x} = A(x, \tau) + u(\tau) \quad (19)$$

と書き、以下、式 (19) を解析することを考える。なお、この式における $A(x, \tau)$ 及び $u(\tau)$ の各要素には変

数 t_{\max} が含まれていることに注意されたい。

ここで、状態変数 $x(t)$ 及び入力 $u(t)$ の時系列表現をそれぞれ $x^{(i)} = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}]^T \triangleq [x^{(i)}(t_1), x^{(i)}(t_2), \dots, x^{(i)}(t_m)]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 、 $u^{(i)} = [u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_m^{(i)}]^T \triangleq [u^{(i)}(t_1), u^{(i)}(t_2), \dots, u^{(i)}(t_m)]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ とし、初期値ベクトルを $x_0^{(i)} = [x^{(i)}(0), x^{(i)}(0), \dots, x^{(i)}(0)]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) と定義して、前章で導入した微分演算子行列を用いると、式 (19) のウェーブレット変換表現は次のように求められる。

$$Q_m^{-1}[X - X_0] = A_H X + U \quad (20)$$

ここで $X = [X_1^T, X_2^T, \dots, X_n^T]^T \triangleq [(Hx^{(1)})^T, (Hx^{(2)})^T, \dots, (Hx^{(n)})^T]^T \in \mathbb{R}^{mn \times 1}$ 、 $X_0 = [X_{10}^T, X_{20}^T, \dots, X_{n0}^T]^T \triangleq [(Hx_0^{(1)})^T, (Hx_0^{(2)})^T, \dots, (Hx_0^{(n)})^T]^T \in \mathbb{R}^{mn \times 1}$ である。 X は未知のウェーブレット係数ベクトルであり、また初期値 $x_0^{(i)}$ も未知であるため、 X_0 もまた未知であるということに注意されたい。更に、

$$Q_m^{-1} = \begin{bmatrix} Q_H^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_H^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_H^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$$

である。また $A_H \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$ は A のウェーブレット領域表現で、**2.3** で示された行列 F で構成される。

今、 X や X_0 は両方とも未知なので、未知数の数と方程式の次数が一致せず式 (20) を解くことはできない。そこで図 3 に示すように周期 T からもう 1 ステップ進んだ時刻までを解析区間 t_{\max} と定義することで、周期性により $x^{(i)}(t_1) = x^{(i)}(t_m)$ であるので、 $x_1^{(i)} = x_m^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) なる境界条件が得られる。式 (5) からこの関係は、

$$[h_{11}, h_{21}, \dots, h_{m1}]X_i = [h_{1m}, h_{2m}, \dots, h_{mm}]X_i$$

より、

$$[h_{11} - h_{1m}, h_{21} - h_{2m}, \dots, h_{m1} - h_{mm}]X_i = 0 \quad (21)$$

と書き換えられ、 $h_b \triangleq [h_{11} - h_{1m}, h_{21} - h_{2m}, \dots, h_{m1} - h_{mm}] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ 及び

$$H_b \triangleq \begin{bmatrix} h_b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mn},$$

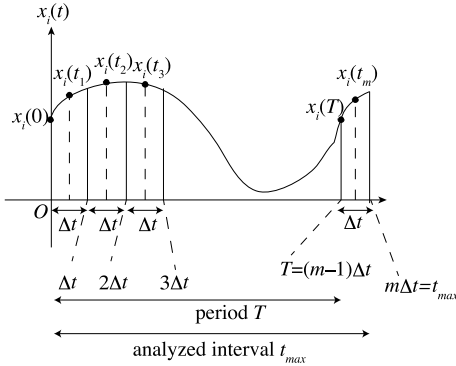


図3 時間ステップと解析区間の定義
Fig.3 Definition of time step and analyzed interval.

とおくと、次の関係が導出される。

$$H_b X = 0 \quad (22)$$

未知のベクトル x_0 を導出するために X と X_0 の関係を考える。 $X_{i0} = H x_0^{(i)}$ から、

$$Q_H^{-1} X_{i0} = Q_H^{-1} H x_0^{(i)} \quad (23)$$

$[q_{ij}] \triangleq Q_H^{-1} H \in R^{m \times m}$ とおき、 $q_0 \triangleq [q_{11} + q_{12} + \dots + q_{1m}, q_{21} + q_{22} + \dots + q_{2m}, \dots, q_{m1} + q_{m2} + \dots + q_{mm}]^T$ と定義すると、

$$Q_H^{-1} H x_0^{(i)} = q_0 x^{(i)}(0) \quad (24)$$

このとき、

$$Q_0 \triangleq \begin{bmatrix} q_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_0 \end{bmatrix} \in R^{m \times n},$$

と定義すると、式 (19) は次のように書き換えられる。

$$(Q_m^{-1} - A_H) X - Q_0 x_0 = 0 \quad (25)$$

式 (22)、式 (25) から、 $n(m+1)$ 次の代数方程式を次のように導出できる。

$$\begin{bmatrix} Q_m^{-1} - A_H & -Q_0 \\ H_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

非自律系非線形回路においては周期 $T = t_{\max} - \Delta t$ が既知であるので、未知数の数と方程式の次数が一致する。したがって、[8],[9]で提案されている従来の方法

で方程式を解くことができる。しかしながら、 T が自律系非線形回路においては未知であるので、未知数の数と方程式の次数が一致しない。したがって方程式を解析的に解くことはできない。そこで、自律系回路においては $U = 0$ であることに注意し、式 (26) の左辺を 0 にするため、式 (26) の左辺のノルム $F(X)$ を考え、

$$F(X) = \|\{(Q_m^{-1} - A_H)X - Q_0 x_0\}^T, (H_b X)^T\|_2^2 \quad (27)$$

とする。この式に対してノルムを最小にする最適化問題として解くことで $F(X) = 0$ となる解析時間 t_{\max} と X, x_0 を導出する。本論文では、最適化手法として、このような非線形最小 2 乗問題の解法として、収束が速く安定性も優れているとされる Levenberg-Marquardt 法 [13] を用いる。最後に、得られた t_{\max} と X, x_0 より式 (5) から式 (19) の近似解が導出できる。

本手法では、微分方程式のウェーブレット変換により非線形の代数方程式を解くことになる。代数方程式を解く際、微分方程式の解の安定性は問題とならないため、不安定周期解も求めることができると考えられる。

4. 計算例

本章では、提案された手法で不安定周期解を導出できるか確認するため、硬い van der Pol 発振器や神力回路、ローレンツ方程式を例として用いる。

4.1 硬い van der Pol 発振器

本論文で扱う硬い van der Pol 発振器 (図 4) に含まれる電圧制御電流源の特性は次のように表される。

$$f(V_{\text{out}}) = 5 \cdot (-V_{\text{out}} + \beta \cdot V_{\text{out}}^3 / 3 - V_{\text{out}}^5 / 5) \quad (28)$$

この発振器は、図 5 の位相平面の模式図に示されるように、安定平衡点である原点と安定な周期解の間に不安定な周期解が存在することが知られている [14]。図 5 において内側の点線が不安定周期解である。この回路のパラメータは表 1 で示され、正規化のためキャパシタンス c [F] とインダクタンス l [H] は $C = c/t_{\max}$ と $L = l/t_{\max}$ と変数変換される。回路方程式は次のように書ける。

$$\begin{cases} C \dot{V}_{\text{out}} = -I_L + f(V_{\text{out}}) \\ L \dot{I}_L = V_{\text{out}} \end{cases} \quad (29)$$

この発振器の安定周期解の振幅は $\sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 - 8}}$ 、不

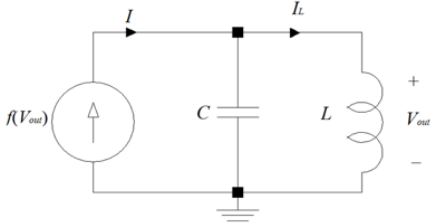


図4 van der Pol 発振器
Fig.4 A van der Pol oscillator.

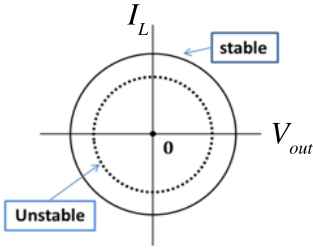


図5 硬い非線形特性をもつ発振器の位相平面の模式図
Fig.5 Phase portrait model of an oscillator with hard-type non-linearity.

表1 van der Pol 発振器のパラメータの値
Table 1 Parameters of van der Pol oscillator.

| Parameters | Values |
|-----------------|--------|
| inductance l | 1 H |
| capacitance c | 1 F |

安定周期解の振幅は $\sqrt{\beta - \sqrt{\beta^2 - 8}}$ であると知られている [14]. 本論文では $\beta = 3$ と設定しているので、安定周期解の振幅は 2, 不安定周期解の振幅は $\sqrt{2}$ になる. よってルンゲクッタ法により不安定周期解を導出する場合、電圧と電流の初期値は $V_{out} = \sqrt{2}$, $I_L = 0$ となる. この初期値からおおよそ 1 周期分の計算をして打ち切ることで不安定周期解を導出している. また、安定な周期解については適当な初期値から計算を開始し、十分な時間の経過後に収束した解として導出している (以下、神力回路、ローレンツ方程式の場合も同様である). 図 6 に示すグラフは $m = 64$ のときのルンゲクッタ法で得た波形と提案した手法で得た波形を比較したグラフである. この図から分かるように本手法では安定周期解, 不安定周期解ともに精度良く近似解を得られていることが分かる. それぞれの周期解は式 (27) に Levenberg-Marquardt 法を適用する際の初期値を変えることにより得られる.

4.2 神力回路

図 7 に示す神力回路は負性抵抗の値の変化によ

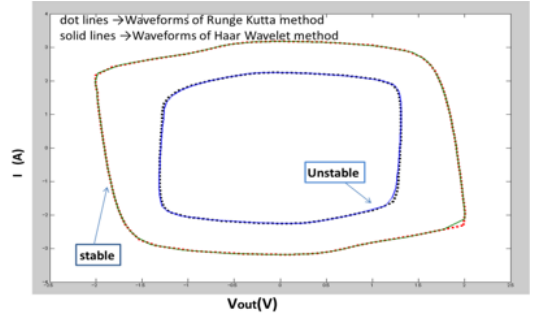


図6 硬い van der Pol 発振器に対する提案手法とルンゲクッタ法を比較した位相平面図

Fig.6 Phase portrait of comparison of proposed method and Runge-Kutta method for a van der Pol oscillator with hard-type nonlinearity.

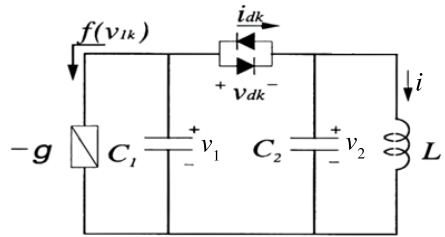


図7 神力回路
Fig.7 Shinriki's circuit.

表2 神力回路のパラメータの値
Table 2 Parameters of Shinriki's circuit.

| Attractor | Parameter α | Parameter β |
|-----------------------|--------------------|-------------------|
| Stable periodic orbit | 0.28 | 1.0 |
| Chaotic | 0.45 | 1.0 |

て、周期倍分岐を経てカオスへ至る回路である [16]. 神力回路の正規化回路方程式は次のように表される.

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \alpha v_1 - (v_1 - v_2)^9 \\ \dot{v}_2 = \beta \{(v_1 - v_2)^9 - i\} \\ i = v_2 \end{cases} \quad (30)$$

神力回路は負性抵抗の値によってカオスに至るため、 $\alpha = g\sqrt{L/C_1}$ の値によって安定周期解か不安定周期解か決定する. 本論文では表 2 に示すように、安定した周期解の波形が得られるパラメータ $\alpha = 0.28$, $\beta = 1.0$ 及び双曲型のカオスアトラクタが現れるパラメータ $\alpha = 0.45$, $\beta = 1.0$ を用いる. 図 8 は $m = 128$ でパラメータ $(\alpha, \beta) = (0.28, 1)$ のとき、ルンゲクッタ法を用いることにより得られた波形と提案した手法による波形を比較したグラフである. この結果から、本提案手法により高い精度で安定周期解の近似解を得ること

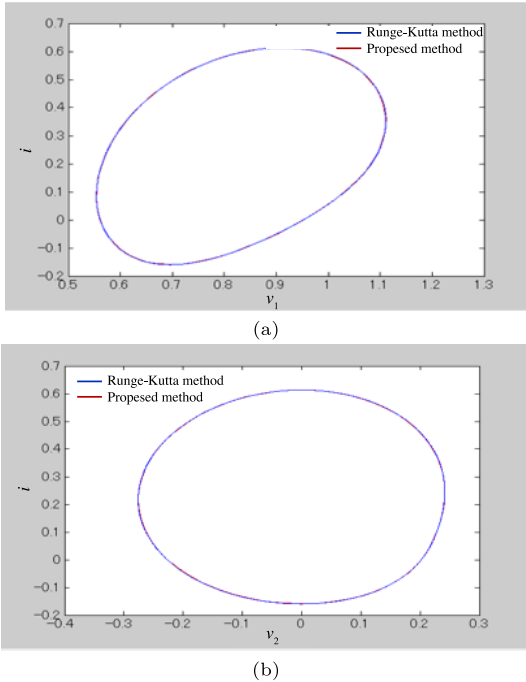


図 8 神力回路における安定な周期解に対するルンゲクッタ法と提案手法の比較。(a) v_1 - i 平面。(b) v_2 - i 平面
 Fig. 8 Comparison of proposed method and Runge-Kutta method of stable limit cycles in Shinriki's circuit. (a) v_1 - i plane. (b) v_2 - i plane.

ができることが分かる。図 9 は $m = 128$ でパラメータ $(\alpha, \beta) = (0.45, 1)$ のとき、ルンゲクッタ法を用いることにより得られた波形と提案した手法による波形を比較したグラフである。本提案手法で得られた周期解は、カオスアトラクタが得られるパラメータにおいて、可算無限個存在する不安定周期解の一つであると考えられる。Levenberg-Marquardt 法を適用する際の初期値を変えることで、別の不安定周期解も得ることができる。

4.3 ローレンツ方程式

ローレンツ方程式とは三つの定数 p, r, b によってシステムの動作が決定し、カオス的なふるまいをする 3 次元非線形常微分方程式である [17]。時間に依存する変数 $x(t), y(t), z(t)$ に対するローレンツ方程式は次のように表される。

$$\begin{cases} \dot{x} = -px + py \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (31)$$

図 10 に示すグラフは $m = 64$ でパラメータ $(p, r, b) =$

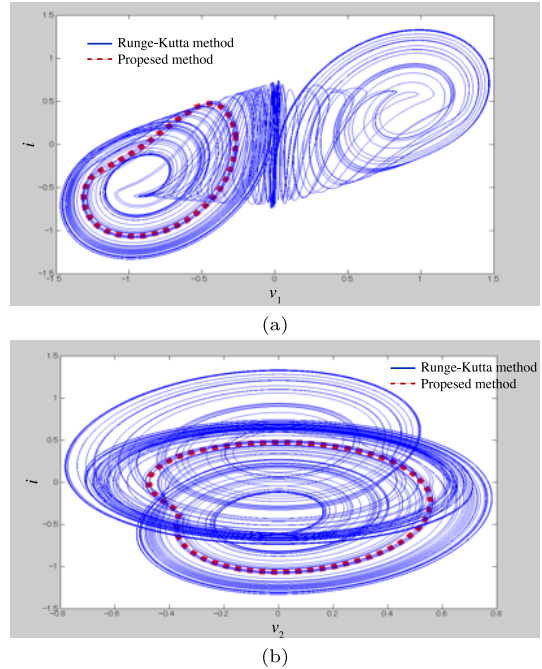


図 9 神力回路におけるカオスアトラクタと不安定周期解。(a) v_1 - i 平面。(b) v_2 - i 平面
 Fig. 9 Chaotic attractor and unstable limit cycle in Shinriki's circuit. (a) v_1 - i plane. (b) v_2 - i plane.

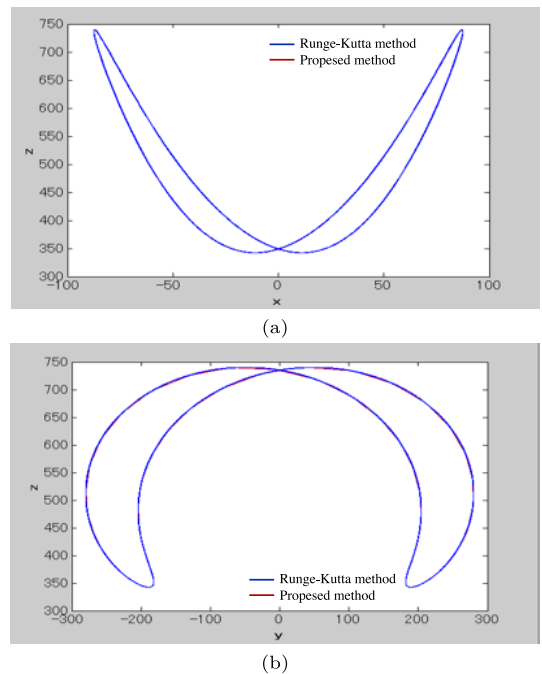


図 10 ローレンツ方程式におけるルンゲクッタ法と提案手法の比較。(a) x - z 平面。(b) y - z 平面
 Fig. 10 Comparison of Runge-Kutta method and proposed method in Lorenz equations. (a) x - z plane. (b) y - z plane.

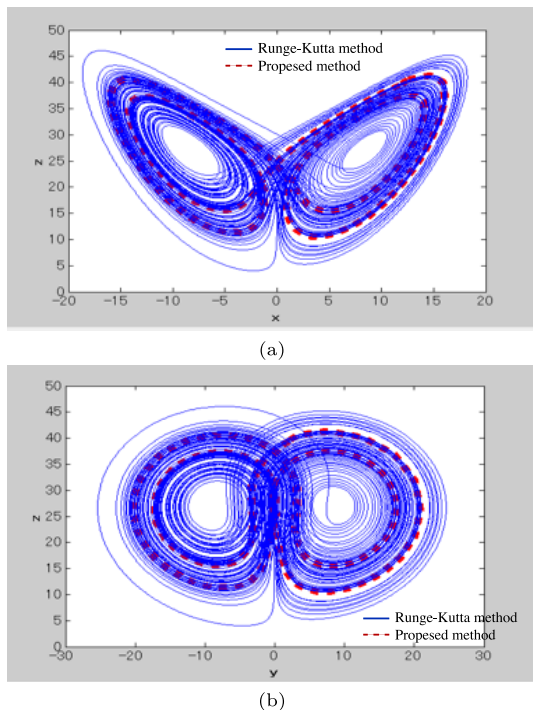


図 11 ローレンツ方程式におけるカオスアトラクタと不安定周期解. (a) x - z 平面. (b) y - z 平面
 Fig. 11 Chaotic attractor and unstable limit cycle in Lorenz equations. (a) x - z plane. (b) y - z plane.

(10, 500, 6) のとき、ルンゲクッタ法を用いることにより得られた波形と提案した手法による波形を比較したグラフである。このときのパラメータは安定な周期解が得られるパラメータであり、本提案手法により安定な周期解が求められることが確認できる。更に、図 11 に示すグラフは $m = 64$ でパラメータ $(p, r, b) = (10, 28, 8/3)$ のとき、ルンゲクッタ法を用いることにより得られた波形と提案した手法による波形を比較したグラフである。この図で得られた周期解も、カオスアトラクタが得られるパラメータにおける不安定周期解の一つであると考えられる。この場合も、神力回路の場合と同様、Levenberg-Marquardt 法を適用する際の初期値を変えて、別の不安定周期解も得ることができる。

以上より、いずれの場合においても提案手法を用いて安定周期解が精度良く近似できており、硬い van der Pol 発振器においては不安定周期解も精度良く得られている。カオスの挙動を示すパラメータにおいて得られた周期解は、そのパラメータにおける不安定周期解であると考えるのが自然であるが、現時点では確証が

得られておらず、この点は今後の課題となる。

5. むすび

本論文では、ハールウェーブレット変換を用いて自律系非線形回路における不安定周期解を導出する解析法を提案し、van der Pol 発振器や神力回路、ローレンツ方程式を例にとり、その動作を確認した。結果より、解の安定、不安定にかかわらず、周期解を数値的に導出できることが確認できた。本手法はハールウェーブレット変換を用いることで、簡単な行列計算によって数値解を得ることができ、不安定周期解が導出できることでカオス制御手法の今後の発展にも寄与できるものと期待できる。今後、より高速なアルゴリズムの提案や、解の安定判別法の確立などが課題となる。

文 献

- [1] G. Chen ed., Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems, CRC Press, 1999.
- [2] P. Schmelcher and F.K. Diakonos, "General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems," Phys. Rev. E, vol.57, no.3, pp.2739–2746, March 1998. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.2739
- [3] H. Nakajima, "On analytical properties of delayed feedback control of chaos," Phys. Lett. A, vol.232, no.3–4, pp.207–210, July 1997. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00362-9
- [4] S. Barmada and M. Raugi, "A general tool for circuit analysis based on wavelet transform," Int. J. Circuit Theory and Applications, vol.28, no.5, pp.461–480, April 2000. DOI: 10.1002/1097-007X(200009/10)28:5<461::AID-CTA117>3.0.CO;2-9
- [5] K.C. Tam, S.-C. Wong, and C.K. Tse, "An improved wavelet approach for finding steady state waveforms of power electronics circuits using discrete convolution," IEEE Trans. Circuits Syst.-II, vol.52, no.10, pp.690–694, Oct. 2005. DOI: 10.1109/TC-SII.2005.852167
- [6] A. Ohkubo, S. Moro, and T. Matsumoto, "A method for circuit analysis using Haar wavelet transforms," Proc. IEEE Midwest Symposium on Circuits Syst. (MWSCAS04), vol.3, pp.399–402, July 2004. DOI: 10.1109/MWSCAS.2004.1354379
- [7] M. Oishi, S. Moro, and T. Matsumoto, "A method for circuit analysis using Haar wavelet transform with adaptive resolution," Proc. Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA08), pp.369–372, Sept. 2008. DOI: 10.34385/proc.42.B3L-D5
- [8] M. Mochizuki and S. Moro, "Steady-state analysis using Haar wavelet transform in power electronics circuits including nonlinear elements," Proc. Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2013), pp.483–486, Sept. 2013. DOI: 10.15248/proc.2.483
- [9] S. Moro and K. Takamatsu, "A method to find periodic solutions in nonautonomous nonlinear circuits using Haar wavelet transform," NOLTA, IEICE, vol.E11-N, no.4, pp.561–570, Oct. 2020. DOI: 10.1587/nolta.11.561
- [10] X. Lin, B. Hu, X. Ling, and X. Zeng, "A wavelet balance

approach for steady-state analysis of nonlinear circuits,” IEEE Trans. Circuits Syst.-I, vol.49, no.5, pp.689–694, May 2002. DOI: 10.1109/TCSI.2002.1001960

- [11] J.L. Wu, C.H. Chen, and C.F. Chen, “Numerical inversion of Laplace transform using Haar wavelet transforms,” IEEE Trans. Circuits Syst.-I, vol.48, no.1, pp.120–122, Jan. 2001. DOI: 10.1109/81.903196
- [12] C.F. Chen, Y.T. Tsay, and T.T. Wu, “Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed systems,” J. Franklin Institute, vol.303, no.3, pp.267–284, March 1977. DOI: 10.1016/0016-0032(77)90029-1
- [13] D. Marquardt, “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters,” SIAM J. Appl. Math., vol.11, no.2, pp.431–441, 1963. DOI: 10.1137/0111030
- [14] 志村正道, 非線形回路理論, 昭晃堂, pp.122–132, 1969.
- [15] 茂呂征一郎, 森 真作, 笹瀬 巖, “硬い発振器の結合ネットワークに見られる準周期振動,” 信学論 (A), vol.J81-A, no.6, pp.999–1002, June 1998.
- [16] M. Shinriki, M. Yamamoto, and S. Mori, “Multimode oscillations in a modified van der Pol oscillator containing a positive nonlinear conductance,” Proc. IEEE, vol.69, no.3, March 1981. DOI: 10.1109/PROC.1981.11973
- [17] E.N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” J. Atmos. Sci., vol.20, pp.130–141, 1963. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2

(2020年10月16日受付, 2021年4月16日再受付,
5月31日早期公開)



茂呂征一郎 (正員)

1993 慶應義塾大学理工学部卒。1995 同大学院理工学研究科前期博士課程了。1998 同大学院理工学研究科後期博士課程了。1998 福井大学工学部助手。2007 同大工学部准教授, 現在に至る。博士(工学)。主に非線形回路の解析, 結合発振器の同期現象の解析及び応用に関する研究に従事。電気学会, 計測自動制御学会, IEEE 各会員。

山本 峻太

2018 福井大学工学部卒。2020 同大学院工学研究科博士前期課程了。在学中, ウェーブレット変換を用いた回路解析法に関する研究に従事。現在, 北陸電力(株)勤務。

高松 航平

2016 福井大学工学部卒。2018 同大学院工学研究科博士前期課程了。在学中, ウェーブレット変換を用いた回路解析法に関する研究に従事。現在, 北陸電力(株)勤務。

中林 達哉

2015 福井大学工学部卒。2017 同大学院工学研究科博士前期課程了。在学中, ウェーブレット変換を用いた回路解析法に関する研究に従事。現在, 豊生ブレーキ工業(株)勤務。