# タイル張りを題材にした数学の公開講座：H30体験ふむふむ数学クラブ「タイル張りの数理」の実践報告

福井大学教育実践研究　2019，第44号，pp.41－49

実践報告・資料

# タイル張りを題材にした数学の公開講座
## ― H30体験ふむふむ数学クラブ「タイル張りの数理」の実践報告 ―

福井大学教育学部　西　村　保　三
元 福井大学教育地域科学部　竹　本　有輝子
福井大学教育学部　松　本　智恵子
福井大学教育学部　大　西　美　穂
福井大学大学院教育学研究科　山　内　一　樹
福井大学大学院教育学研究科　小　倉　良　介

本稿は，福井大学公開講座「体験ふむふむ数学クラブ」の実践報告である。この公開講座では，一般の社会人や中高生を対象に，グループによる体験的活動を通して，数学を楽しみながら学んでもらうこと，及びそれを実現するカリキュラムを開発することを目的としている。本稿では，平成30年度に実施した，タイル張りの数理を題材にした公開講座の事例を報告する。

キーワード：数学教育，タイル張り，対称性，数学的活動

## 1．はじめに

今日の科学技術文明において，数学は現実社会の問題を解決するツールとして，また学問を記述する言語として必須のものである。さらに，数学を学ぶことの意味は，単に「役に立つ」という理由だけに留まらず，数学の美しさ・深さや楽しさを知ることにもある。ところが，今日の学校教育では，数学を学ぶ目的が受験のみに矮小化して計算技能の習得ばかりが重視される傾向が高く，「数学は公式を暗記してそれに数値を当てはめて問題を解くこと」という誤解が広まって，多くの「数学嫌い」を生んでいる。そこで，福井大学教育学部数学教室では，一般の社会人や中高生を対象に，体験的なグループ学習によって数学を楽しんで学び，参加者の数学に対する興味・関心を高めるとともに，数学が社会のさまざまな場面において果たす役割を理解してもらうために，平成 19 年度から「体験ふむふむ数学クラブ」という公開講座を実施している。また本企画を通して，楽しみながら数学の美しさや深さが学べるカリキュラムを開発することも目的としており，毎年，様々な題材の教材化と授業実践を行っている（過去の実践については ( 西村他 ,2015) 等 )。本稿では，平成 30 年度に実施したタイル張りの数理を題材とした公開講座の実践事例を報告して，数学的活動として敷き詰め模様作りを取り入れた体験学習について考察する。

本稿で扱う「タイル張り」とは，平面を1種類の図形で周期的に敷き詰めた模様のこととする。「タイル貼り」と書かれたり，タイリング，テセレーション，敷き詰め，平面充填などと呼ばれることもある。このような模様は，床のタイルや壁紙，日本の古典文様などで日常的に目にすることができる。オランダの画家 M.C. エッシャー（1898-1972）は，人や動物が敷き詰められた作品を多数描いている（図1）。本講座の実施時，タイムリーなことにエッシャー生誕 120 年を記念して，「ミラクル・エッシャー展」が東京・大阪で開催されており，メディアでエッシャーの絵がしばしば取り上げられていた。

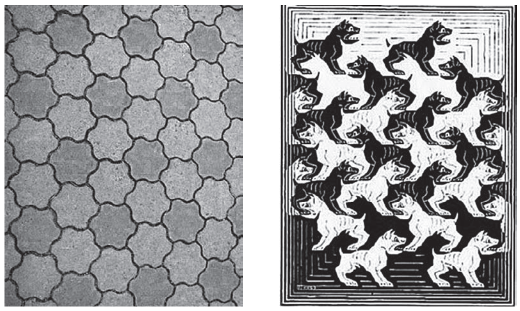

図１：福井大学のタイルとエッシャーの絵

タイル張りは，数学的には2次元の結晶であり，幾何・代数・組合せ論の分野で研究されている。タイル張りの対称性のパターンは，平面の合同変換群の離散部分群と対応しており，17 種類に分類されることが知られている。これらは壁紙群あるいは平面結晶群と呼ばれ，p1, p2, pm, pg,…等の国際記号で表される（コクセター (1965), 川崎 (2014) 等）。敷き詰め可能な図形の分類や特徴づけは興味深い問題で，特に凸五角形の敷き詰めは，100 年前から研究が始められ，2015 年にも新しいパターンが発見されている（ガードナー (1975), 杉本他 (2018) 参照）。

タイル張りを題材にした数学の授業実践は，これまで

にも試みられている。植田・上垣（1986）は，中学校教育のカリキュラムの中で，タイル張りを取り入れた授業実践の事例を示しており，多角形の敷き詰めによって，四角形の内角の和，平行線の性質，相似変換，三平方の定理などの図形の性質を説明する授業が提案されている。しかし，彼らの実践は，図形の説明にタイル張りを利用してはいるが，タイル張り自体の数理を扱っているわけではない。学校教育で学ぶことになっている対称性は，点対称と線対称のみで，タイル張りの本質である並進対称は対象外である。そのためタイル張りの数理が学校教育で取り上げられることはほとんどなく，高校の数学活用（根上 , 2012）に簡単な記述がある程度である（海外では敷き詰め模様作りの活動を取り入れている数学教科書（Fendel 他 , 1998）もある）。本講座では，「エッシャー風タイル張りの作成」を数学的活動として位置付け，数学的な考え方を生かして敷き詰め模様を作成する活動を通して，平面図形に親しみ，図形の性質を楽しく学ぶことを目標とする。また，講座の企画を通して，数学の美しさ・深さを体験できるような授業の開発も目的としており，開発した授業を実践報告と共に次節以降で紹介していく。

## 2．授業実践

本公開講座は，平成 30 年 12 月 1 日に，福井大学で実施したもので，テキストの作成から講座の進行までを竹本が中心になって務めた。また，本実践は竹本の卒業研究の一環でもあり，授業の指導案と配布テキストは卒業論文（竹本，2019）に掲載している。講座の対象は小学5年生以上～一般の社会人向けで，参加者は 17 名，うち 9 名が小学生だった。本講座は，「体験的なグループ活動で数学を楽しく学ぶ」ことを謳っており，参加者 17 名を4～5名の班に分けて，講師5人がファシリテーターとして各班の活動を支援する形式で行った。講習時間は途中1回の休憩を入れて3時間である。

本講座で作成した講習内容は以下の通りである。

（1）ジグソーパズルに挑戦
（2）タイル張りとは？
（3）敷き詰めできる多角形
（4）敷き詰めパターンの分類
（5）おまけ：万華鏡の秘密
（6）敷き詰め図形を作ろう！

### 2.1. ジグソーパズルに挑戦

初めに導入として，ジグソーパズルを各テーブルに3種類ずつ配り，グループで協力してパズルに挑戦してもらった（図2）。このパズルは，アクリル板をレーザーカッターで切断して作ったもので，普通のジグソーパズルとは異なり，全て同じ形（1つは2種類の形）の模様のないピースで構成されており，パズルを完成させると平面のタイル張りとなる。一部のピースを間違った向きにはめると，最後に全体がはまらなくなるものもあるが，パズルとしてはどれも易しいもので，どのグループも 10 分以内に全てのパズルを完成させることができた。このパズルは，グループの交流を促すアイスブレイクと，1種類のタイルを平面に敷き詰める「タイル張り」の意味を理解してもらうことが目的である。小学生達はこのパズルを「もっとやりたい！」と喜んでいた。

図２：ジグソーパズルに挑戦

### 2.2. タイル張りとは？

次に，今回のテーマである「タイル張り」について，用意したスライドで説明を行った。本講座では，タイル張りを「平面を1種類の図形で周期的に敷き詰めた模様」と定義して，福井大学構内のタイルの写真や M.C. エッシャーの絵画，日本の古典文様などに見られる敷き詰め模様をスライドで紹介して，それぞれの模様について，簡単に説明を行った（図1・図3）。例えば，図1左・図3左上は福井大学構内のタイルである。曲線の辺を持つ六角形のタイル（図1左）は，中心に関して 1/6 回転対称の敷き詰め模様となっている。またタイルの頂点では 1/3 回転対称，辺の中点では点対称でもある。図3下の左右はそれぞれ，麻の葉，紗綾形と呼ばれる日本の古典文様である。麻の葉文様は，1点で交わる6方向の鏡映対称性を持つ。図3右上はエッシャーの絵画で，トカゲの絵は全て合同であるが，裏返しのものと，それぞれを半回転したものも含めて4種類の向きのタイルで敷き詰められている。

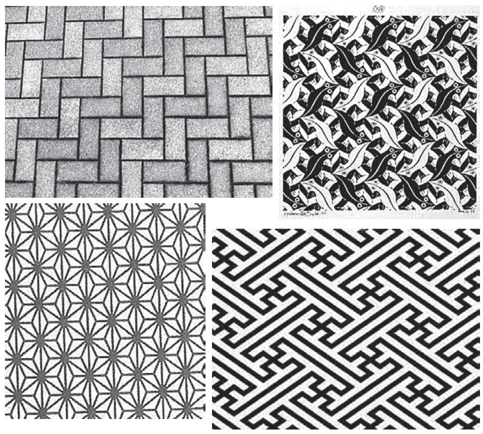

図３：敷き詰め模様の例

平面を敷き詰める図形の各々をタイル張りの「基本領域」と呼ぶ。ただし基本領域は，模様全体の対称性で複数の領域に分割されない連結な領域であることを仮定し，形のみ注目し色の違いは無視する。例えば，図3右上のトカゲは，白黒の隣り合う2匹ないし4匹を合わせて1つのタイルと考えることもできるが，基本領域としては1匹のトカゲを指す。同様に，麻の葉文様は，頂角120度の二等辺三角形が敷き詰められているが，二等辺三角形は鏡映対称なので，基本領域はその半分の直角三角形となる。また基本領域は，敷き詰め模様に対して一意的に決まるとは限らない。例えば図1左の，曲線で囲まれた六角形のタイルは，1/6回転対称性によって，その6等分が基本領域となるが，分割の仕方には自由度がある（図4）。

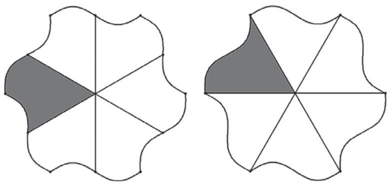

図４：基本領域（色塗り部分）

### 2.3. 敷き詰めできる多角形

タイル張りの例を示して，幾つか基本用語の説明を行った後，初めにスライドを使って次の問題を提示した。

**問題１**. 敷き詰めできる正多角形を全て挙げてください。

この問題は，NHKの『さんすう刑事ゼロ』（永地，2014）でタイル張りを扱った際にも取り上げられていた。参加者からすぐに，「正三角形，正方形，正六角形」という発言があったので，スライドで画像を見せて答えを示した（図5）。

**定理１**．敷き詰めできる正多角形は，正三角形，正方形，正六角形の3種類に限る。

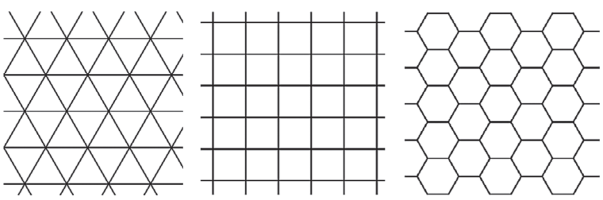

図５：正多角形による敷き詰め

次に，正多角形とは限らない一般の四角形の敷き詰めについて，次の問題を提示した。

**問題２**. 敷き詰めできる四角形は，次のうちどれですか？(図6)
長方形，菱形，平行四辺形，台形，凸四角形，凹四角形

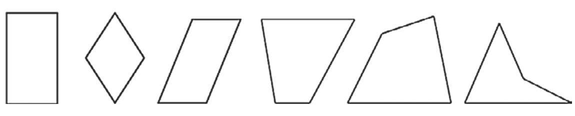

図６：四角形

まず長方形は，図5中の正方形のタイル張りの縦横比を変えることで敷き詰められるのは明らかである。この長方形の敷き詰めは初めのスライドでも紹介済みで，本講座会場の天井にも使われていた。さらに，長方形の敷き詰め模様を，斜傾化（アフィン変換）することで，平行四辺形の敷き詰め模様が得られる（図7左）。菱形は平行四辺形の1種であるし，合同な台形2つで平行四辺形が作れるので，菱形や台形も敷き詰め可能である（図7中）。また，台形と同様に，三角形も2つで平行四辺形が作れるので，一般の三角形も敷き詰め可能だとわかる（図7右）。

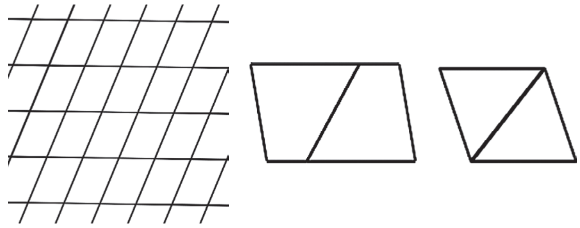

図７：平行四辺形の敷き詰めと台形・三角形

台形までは，上記のような簡単な説明で十分だが，一般の四角形の敷き詰めについては，簡単にはわからない様子だった。参加者に挙手してもらったところ，凸四角形はほとんどの人が敷き詰め可能と予想したが，凹四角形では意見が分かれた。そこで，事前に用意していたボール紙製の四角形の板を，各テーブルに30枚×2セット配布して，敷き詰めができるか実験をさせた（図8）。この活動は，導入で行ったジグソーパズルと似ているが，外枠のヒントがなく，繰り返しパターンによって平面を無限に敷き詰める並べ方を見つけることが課題である。全てのピースの裏表を揃え，半回転したピースの同じ辺同士を合わせて並べれば，凸でも凹でも関係なく，四角形を敷き詰めることができる（図9）。凹四角形の敷き詰めは，「こんないびつな形が敷き詰められるの？」という声が上がるなど，少し手こずった参加者もいたが，グループやファシリテーターの手助けによって最終的には全員が，四角形が敷き詰められることを確認することができた。

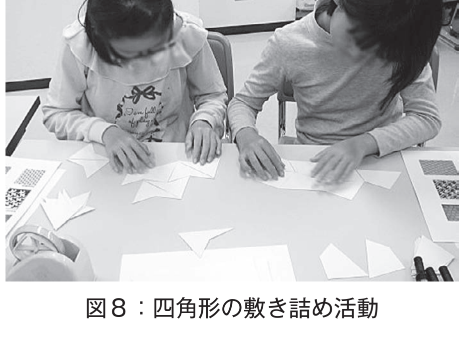

図８：四角形の敷き詰め活動

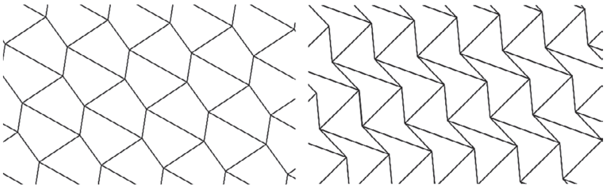

図９：一般の四角形による敷き詰め

**定理２**. 任意の四角形は, 平面を敷き詰めることができる。また，任意の三角形も，平面を敷き詰めることができる。

以上の活動を定理2にまとめて，多角形が敷き詰めできる条件について説明した。四角形の内角の和が 360 度（三角形は 180 度）であることから，四角形の4つの角が1点に集まるように並べると，平面が敷き詰められることを説明した（図 10）。さらに，一般にn角形の内角の和は，180 (n−2) 度であることを補足した。

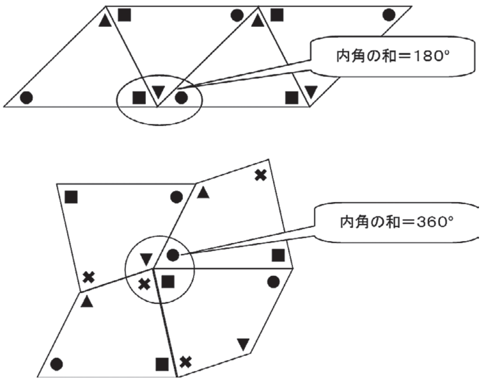


図10：敷き詰めと多角形の内角の和

さらに，多角形の敷き詰めに関しては，五角形と六角形は，敷き詰め可能なものと可能でないものがあることや，七角形以上の凸多角形には敷き詰め可能なものは存在しないことなどを「お話」として紹介した（ガードナー，1975）。

### 2.4. 敷き詰めパターンの分類

平面の敷き詰めパターンは，対称性によって 17 種類に分類されることが知られており，それらは p1, p2, pm, pg, cmm, …などの国際記号で表される。ここで，数字の n は，1/n 回転を意味し，m は鏡映，g は滑り鏡映を意味する。本講座では，簡単のために裏返しを伴う m や g を含んだ敷き詰めパターンは扱わないことにして，回転と平行移動の対称性のみを持つパターンについて, 次の分類定理を紹介した（証明は例えば, コクセター (1965) の 4.5 節参照）。

**定理３**. 平面のタイル張りで，裏返しを伴わない敷き詰めパターンは, p1, p2, p3, p4, p6 の5種類に限る (図 11, 12, 13)。

p1（平行移動のみ）　　p2 （半回転）

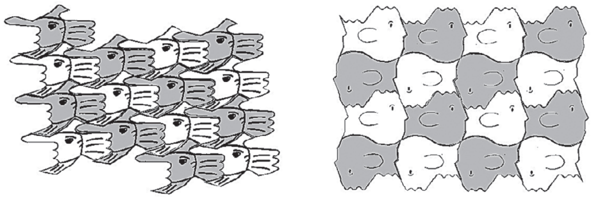

図11：天狗p1と魚p2

p1 と p2 は，平行四辺形の格子パターン（図7左）から作られ，基本領域は平行四辺形に取ることができる。なお p2 の基本領域は, 三角形や台形(平行四辺形の半分) に取ることもできる（図7)。

p3 （1/3 回転）

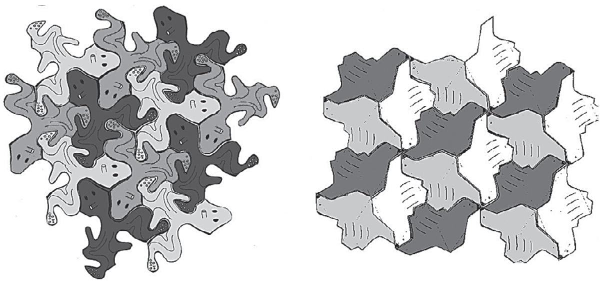

図12：タコp3と鳥p3

p3 は, 正六角形の格子パターン（図5右）から作られ, 基本領域は正六角形（あるいは正三角形を2つ合わせた菱形）に取ることができる。図 12 左のタコは正六角形から，右の鳥は正三角形を2つ合わせた菱形を元にして作っている。

p4 は正方形の格子パターン（図5中）から，p6 は正三角形の格子パターン（図5左）から作られ，基本領域はそれぞれ正方形, 正三角形に取ることができる。なお, 図 11, 12, 13 は，筆者らが本講座の準備段階で試作したエッシャー風タイル張りの例である。また，裏返しを伴うパターンも含めて，筆者らが作った様々なタイル張りの絵を会場に展示して，休憩時間に参加者に鑑賞してもらった。参加者からは「面白い」「すごい！」という声が上がっていた。

p4 （1/4 回転）　　p6 （1/6 回転）

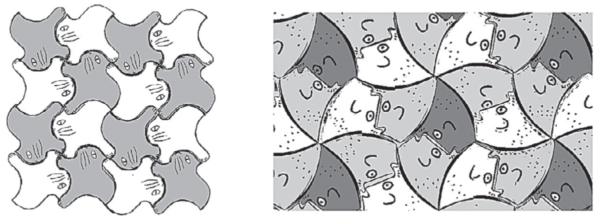

図13：ネコp4とアンコウp6

**定理４**. 平面のタイル張りのパターンは，p1, p2, pm, pg, pmm, pmg, pgg, cm, cmm, p4, p4m, p4g, p3, p3m1, p31m, p6, p6m の 17 種類に分類される。

### 2.5. おまけ：万華鏡の秘密

鏡映（裏返し）を伴う敷き詰めパターンとして，万華鏡の模様があることを紹介した（図 14）。

> **定理５**．多角形の柱面を鏡筒とする万華鏡によって作られる敷き詰め模様のパターンは，p3m1，p4m，p6m，pmm の4種類に限る。

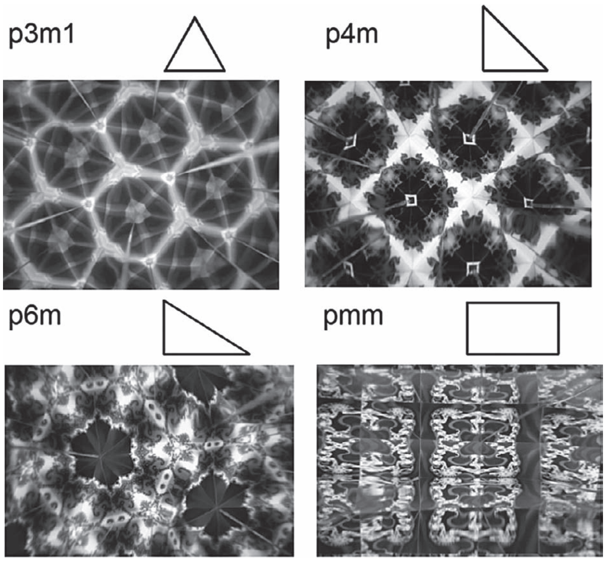


図14：４種の万華鏡

万華鏡で作られる4種類の敷き詰めパターンの基本領域は，鏡筒の断面（実像）の形と同じで，それぞれ，正三角形，直角二等辺三角形，頂角 30 度の直角三角形，長方形である。また，自作した4種類の万華鏡を会場に展示して，休憩時間に参加者に観察してもらった。参加者からは「きれい…」という声が上がっていた。

### 2.6. 敷き詰め模様を作ってみよう！

次に，今回の中心テーマであるオリジナルのエッシャー風タイル張り模様を作成する活動を行った。模様作りは，伏見（1979）や杉原（2011）などに解説されている方法を用いる。始めに基本領域を変形させて，絵を描いて下絵を作る。この操作を「エッシャー化」と呼ぶ。次に，下絵を何枚も縮小コピーして，ハサミで切ってピースを作り，画用紙に並べて貼り付けて作成する。なお，コピーは 4 × 4 で並べることを想定して 16 枚とした。さらに余裕のある人には，できた絵に色鉛筆やマーカーで色を塗ってもらった。始めに，p1 の敷き詰め模様を例に挙げて，スライドとテキストで，作成手順の概略を説明したのち，実際の作業を実物投影機でスクリーンに映して，手順ごとに説明しながら進めていった（図 15）。

①敷き詰めパターンと基本領域を決める

敷き詰めパターンは，裏返しを伴わない5種類から選び，基本領域の形に A5 の画用紙を切ってもらった（表 1）。ここで p1 や p2 を選んだ場合，基本領域は平行四辺形だが，長方形も平行四辺形の1種なので，簡単に作りたい人は長方形のままでもよいとした（スライドやテキストの説明図も長方形とした）。p3，p4，p6 を選んだ人は，正多角形を作図する必要があるので，定規とコンパスを貸出して，各班のファシリテーターが作図を手伝った。なお，基本領域の取り方は表1以外にもありえる。例えば p2 は一般の三角形や台形（図9を利用して一般の四角形でも可），p4 は直角二等辺三角形などでもよいが，今回は p3 のみ2種類の形を併記した。

表１：敷き詰めパターンと基本領域

| パターン | 基本領域 |
|---|---|
| p1 | 平行四辺形 |
| p2 | 平行四辺形 |
| p3 | 正六角形，正三角形を2つ合わせた菱形 |
| p4 | 正方形 |
| p6 | 正三角形 |

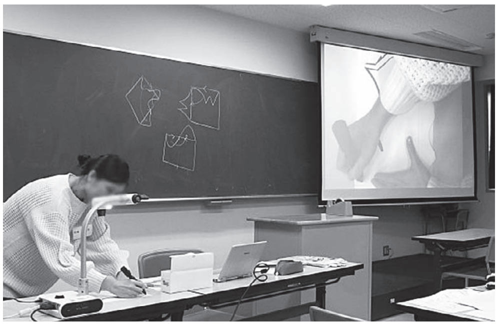

図15：作業の説明

②基本領域の辺を変形する（エッシャー化）

パターンによって，基本領域の多角形で貼り合わせる辺のペアが決まっている。ペアになる辺の1方を，頂点から頂点を結ぶ自由な曲線でつないで，変形した曲線に沿って紙を切り，対応する辺に向きを合わせて裏からセロハンテープで貼り付ける（図 16）。

図 16 は p1 の場合なので，実際に作業を行う場合は，後述の表（図 20）を参照して，貼り合わせる辺のペアを確認する必要がある。この部分は各班のファシリテーターが補助を行った。曲線は，一方の辺をただ凹ませるだけでなく，部分的にペアの辺の方を凹ませることで，凸凹にすることもできることなどを，黒板を使って説明を補足した。またこの変形において，多角形の頂点を移動させたり，タイルをはみ出すような大きな変形を施すこともできる（杉原 , 2011）が，今回は頂点の移動などは行わないこととした。

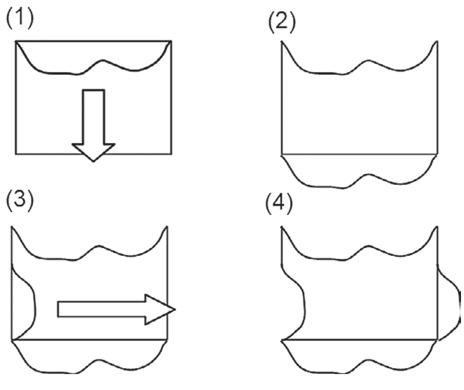


図16：エッシャー化

③絵を描く

変形した基本領域をマジックで太く縁取り，できた形をイメージして，自由な絵を描いて，下絵を完成させる（図 17)。

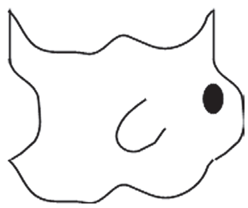

図17：ペンギン（？）の下絵

本来は，初めから特定の形になることを目標に，②の作業を行うと，よりよい形が出来上がるが，本講座ではランダムな曲線を描いて偶然できた形から連想される絵を描いてもらった。うまくイメージできない場合は，1つのピースを2つの絵の組合せとした絵を描いたり，縁取り前なら変形を追加して修正することもできる。

④下絵をコピーして並べて貼る

各班のファシリテーターが完成した下絵を預かり，コピー室で 16 枚，適当な大きさに縮小コピーした。下絵とコピーを返却後，コピーを4～5枚ずつ重ねて，ずれないようにテープで固定してから，ハサミで重ね切りして同じピースをたくさん作り，台紙に並べて糊で貼って敷き詰め模様が完成する（図 18)。さらに余裕がある人はできた絵に色鉛筆で色を塗ってもらった。

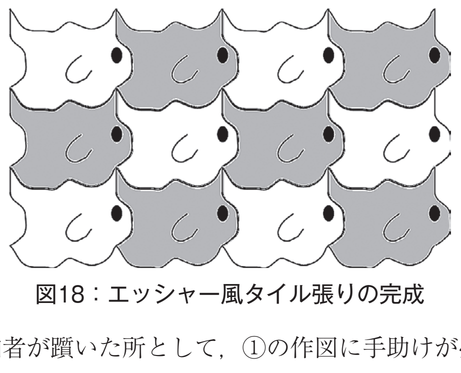

図18：エッシャー風タイル張りの完成

参加者が躓いた所として，①の作図に手助けが必要な場合が多いことは当然として，意外だったのは，②の作業で，自由な曲線をどう結んでよいのかわからずに手が止まる子供がいたことである。「何でもいい」と幾つか例を示しても，「失敗したら嫌だ」となかなか線を結ぼうとしない。そのような子供には，失敗したら何度でもやり直せばよいことを納得させて作業を進める必要があった。③の作業は，発想力が必要なため，時間が掛かると予想していたが，皆楽しそうに絵を描き，予想以上にスムースに進んだ。次々と下絵が完成したために，スタッフはコピー作業に追われた。④では，ほとんどの参加者が楽しんで作業に取り組んでいたが，16 枚のピースをハサミで切って糊付けするのが大変で，途中で疲れてしまい，一緒に参加した親に手伝ってもらっていた子もいた。一方で，意欲的な参加者は，自主的に2つ目の作品に取り組んでいた。

図19：敷き詰め模様作り

**基本領域の変形規則**

エッシャー化を行う際，敷き詰めパターンごとに，基本領域の多角形で貼り合わせる辺のペアと向きを図 20 に示す。この一覧表は，配布テキストの巻末に付けておいた（簡単のため p1 と p2 は配布テキストでは図を長方形にして，平行四辺形でもよいことを口頭で説明した)。

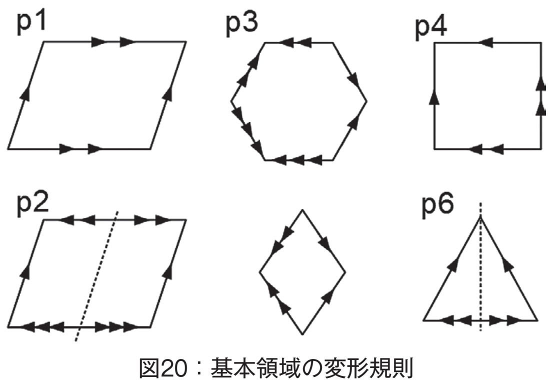


図20：基本領域の変形規則

## 2.7. 鑑賞会

参加者の作成した作品を，実物投影機でスクリーンに映して全員で共有する鑑賞会を行った。作成した人には，作品について工夫したところなどを一言コメントしてもらった。参加者の作品を幾つか紹介する（図 21)。

図 21 左上の羊は，平行四辺形から作った p1 パターン，右上図のカエルは長方形から作った p2 パターンである。左中図のネコは，長方形から p1 パターンとして描いた

ものだが，横の辺を変形せず左右対称形なので，実はネコの顔の半分を基本領域とする pm パターンになっている。左下図のヒラメは，菱形から作った p3 パターンで，変形で移動した部分をヒレに利用しているので，元の菱形の格子パターンがよくわかる。右下図の顔は，正方形から作った p4 パターンである。この他にも，p6 パターンや，正六角形から作った p3 パターンの敷き詰め模様を作った参加者もいた。

全部で3時間の講習を予定していたが，進行役が講義形式で行う箇所で理論的な説明を大幅に省いて，活動中心に早く進めてしまったため，予定していた時間を 20 分ほど残して終了した。

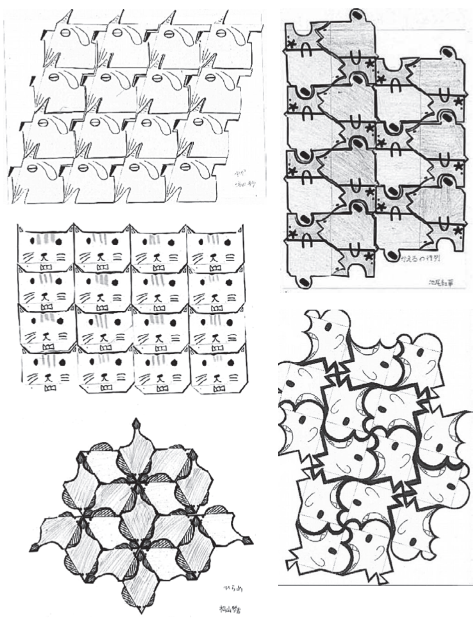

図21：参加者による作品例

## 3．アンケート

福井大学 COC 推進室が実施したアンケート結果を図 22・23 に示す。アンケートに回答したのは，受講者全員の 17 名である。参加者の内訳を図に示す。小学生が約半数と多く，成人は子供の付き添いとして参加した親が多かった。中には，大阪で開催中の「ミラクル・エッシャー展」を観に行ったという方もいて，タイル張りについて，予備知識のある参加者もいたようである。

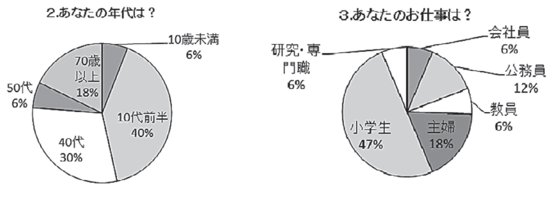


図22：アンケート質問：年代と仕事

講座の内容について，難易度と満足度を質問した結果を図に示す。難易度については8割（14 名）以上が,「ちょうどよかった」と答えている。今回の講座では，数学的な説明を大幅に省いたので，「やや難しかった」という2名も，数学的な内容ではなく，ハサミや糊を使った作業に難しい部分があったという意味だと思われる。満足度については，半数以上（9 名）が「大変満足」と答えており，満足度は非常に高かったことがわかる。

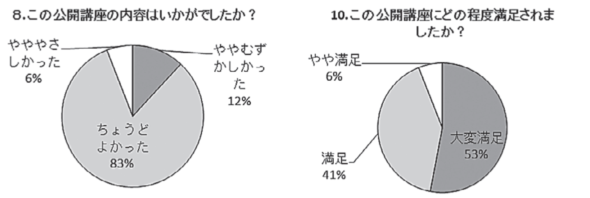


図23：アンケート質問：難易度と満足度

＜自由記述＞

・丁寧な説明と学生さんの親切な対応がとてもよかった（40 代・公務員）
・いろいろなことを知るだけでなく体験を通して知ることができた（10 代・小学生）
・すごく楽しくてまたやりたいと思った（10 代･小学生）
・算数の勉強になったしとても面白かった（10 代・小学生）
・自分に合った難易度でできたのでよかった（70 代・主婦）
・作業は楽しかったけど，理論をもう少し詳しく説明してほしかった（40 代・専門職）

## 4．授業実践の考察

今回の講座で扱った内容は，タイル張りの定義と，正多角形と四角形の敷き詰め，鏡映を伴わない敷き詰めパターンの紹介，万華鏡の観察，敷き詰め模様作りである。「並進対称な図形」は学校教育では扱わないが，小学生でも理解できる範囲で，タイル張りの数理を紹介した。本講座は小学生から大人までを対象とする公開講座であるので，単なる中学校の学習内容の先取りや復習ではなく，学校カリキュラムで取り上げないような数学の面白さや美しさを体験できる内容であることが望ましい。その意味でも，タイル張りという題材は適切だったと考える。本実践では，敷き詰め模様作りの活動を通して，参加者の学習段階に応じて様々な数学的な考え方が求められる。具体的には，例えば p2 を選んだ参加者は，初めに平行四辺形を作図する必要がある。次に平行四辺形の対辺が等しいという性質を意識して基本領域の変形を行う。またこの時，辺の中点の作図も必要になる。次に，敷き詰めでは平行四辺形が点対称という性質を生かして，半回転したピースと交互に並べて敷き詰めを行う。この際に，平行線の同位角が等しいことや平行四辺形の隣り合う角の和が 180 度であるという性質が体験できる。選んだ図形や参加者によっても，求められる数学的な考え方は異なるが，体験活動を通して自分で気付いたり，参加者同士やファシリテーターとのコミュニケーションを通して教えられたり，学校で学んだことを思い出したり活用することで，数学の学びとなることを想定

している。アンケートの自由記述で「算数の勉強になった」「色々なことを体験を通して知ることができた」と答えた小学生もいたことから，本講座において，学びの伴った数学的活動が実現できたと考える。

今回，小学生の参加者が多かったことから，全体説明においては数学の理論的な説明はほとんど省いて，体験的活動が中心の実践を行った。唯一数学的な説明を行なった部分は，正多角形と四角形の敷き詰めの話であるが，小学生でも理解できる易しい内容に限った。そのため，小学生の参加者が多いにもかかわらず，アンケートの難易度の質問では「難しかった」という意見がほとんどなかった。一方で,「理論を詳しく説明してほしかった」という意見もあり，大人の参加者には物足りなかったようである。少しでも難しい話をすると，小学生の参加者からは「学校で習っていない言葉が出てきた」として，「難しかった」という評価をされるので加減が難しいが，点対称・線対称と合同変換は小中学校でも学ぶので，その点をもう少し詳しく説明してもよかったと思う。また，今回取り上げなかった鏡映を伴う敷き詰めパターンの模様作りを行うことも可能だったかもしれない（この場合の模様作りの方法は，次節で説明する）。

一方で，参加者の満足度は非常に高く，「算数の勉強になったし面白かった」という意見からも，多くの参加者が楽しく活動しながら数学が学べた様子が伺える。敷き詰め模様は，「作り方」のマニュアルに機械的に従うだけでも作れるが，数学の学びが伴わない活動では数学的活動とはいえない。本実践は, 活動中心の講座ではあったが，タイル張りの数理を学び，図形の性質を考えて模様作りを行うことで，数学の学びの伴った活動が実現できた。以上の結果より，体験的活動によって，数学を楽しく学ぶという本講座の目標は，十分達成できたと考える。

## 5．発展

今回の講座では，裏返しを伴わない5種類のパターンに限って敷き詰め模様の作成を行ったが，本論文のもう一つの目的である授業開発の観点から，裏返しを伴うパターンの模様作りへ発展させる方法を記しておく。まず，裏返しを伴う敷き詰めパターンにおいて基本領域を変形する規則を図 24 に示す。

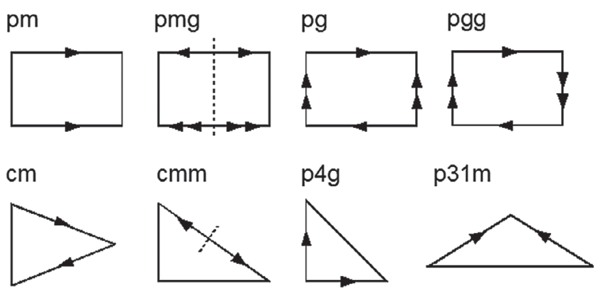


図24：裏返しを伴うパターンの変形規則

図 24 の基本領域は，上の4つは長方形，下の4つはそれぞれ二等辺三角形，直角三角形，直角二等辺三角形，頂角 120 度の二等辺三角形である。なお基本領域の取り方は一例で，例えば cm，cmm は長方形，p4g は正方形に取ることもできる。図で矢印の付いていない辺は全て鏡映軸であり，例えば動物の右半身を基本領域として，2枚の下絵を組み合わせて1匹の左右対称な動物の絵を作ることもできる（この場合，鏡映軸の境界線は縁取らなくてよい）。なお，万華鏡で作られる p3m1，p4m，p6m，pmm の4種（図 14）は，基本領域の全ての境界が鏡映軸となるため, 基本領域を変形することができない。しかし，この場合も，基本領域を曲線で幾つかに分割して，複数の絵で平面が敷き詰められているタイル張り模様を作ることはできる（杉原 , 2011）。

下絵が完成したら，次にそれを鏡映した絵を作る必要があるが，この作業を行うには次の2つの方法が考えられる。

(1) トレーシングペーパーに下絵を写し取り，裏返して転写する。
(2) 下絵をスキャンして画像データ化し，パソコン上で鏡映する。

(2) は，機械を使って裏返しができるので便利だが，スキャナー，パソコン，プリンターという機器が新たに必要になり，多人数が対象の公開講座などでは対応が難しい。裏返した絵を正確に描けなくても敷き詰めに問題はないので，公開講座や学校の授業なら，(1) の方法がよいと思われる。また，全て手作業で行うのであれば，下絵を小さめに作り，その輪郭を台紙に手書きで1枚 1 枚写し取って絵を描けば，転写のためのトレーシングペーパーも，今回使用したコピーや糊付けの作業も必要ない。

今回の講座では，コピー以外の作業を全て手作業で行ったが，画像をコピーして平面に並べる作業をコンピューター上で行う方法もある。機器の操作を受講生に行わせるのはハードルが高いが，例えば高校生～大学生を対象とする授業であれば，ICT を活用する授業として行える可能性がある。フリーの画像編集ソフトウェア Inkscape は，タイルクローンという 17 種類の敷き詰めパターンを自動生成する機能がある。筆者らが描いた下絵の画像を元に，Inkscape で作成した敷き詰め模様の例を図 25 に示す。

図 25 は順に pg，cm，pgg，p31m，p3m1，p6m パターンのタイル張りである。cm と p31m では，右半身だけを基本領域として描いた下絵をコピーして並べている。p3m1 と p6m は基本領域の三角形を，各辺に沿って3つに分割し，それぞれに左右対称な絵の半分だけを描いた下絵をコピーして敷き詰めている。下絵を万華鏡の鏡筒の大きさに1枚だけ縮小コピーすることで，万華鏡で同じ模様を観察することもできる。

基本領域の変形規則（図 20，24）において，各基本領

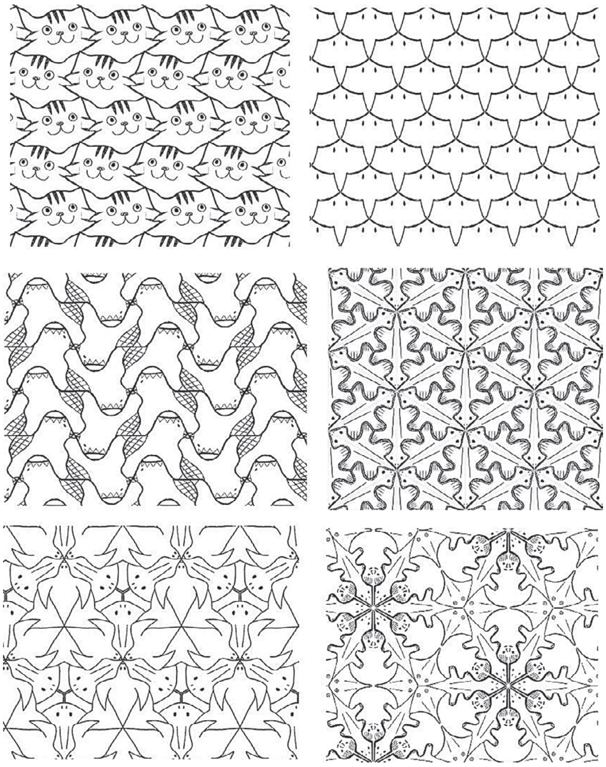

図25：Inkscapeで作成した敷き詰め模様

域を対応する辺のペアを同一視することによって得られる曲面は，壁紙群による軌道空間（オービフォルド）である。例えば，p1 の軌道空間はトーラス，pm は円柱，cm はメビウスの帯，pg はクラインの壺，p2 はタイプ $C_2$ の特異点を 4 つ持つ球面（等面四面体），p3m1 はタイプ $D_3$ の特異点を3つもつ円板（正三角形），…等となる（河野，2015）。そしてエッシャー化で変形された基本領域は，それぞれの軌道空間の平面展開図に他ならない。敷き詰めパターンの軌道空間およびその展開図の考察は，例えば大学生を対象とする位相幾何や群論の授業での展開が考えられる。


## 謝辞

本実践の導入で使用したアクリル製ジグソーパズルは，福井工業高等専門学校の中谷実伸教授が作成したものをお借りしました。また，図 21 では，本講座参加者の嶋田彩さん，池尾紅華さん，西村美緒さん，松山琴音さん，島田敏寿さんの作品を掲載させていただきました。ご協力いただいた方々に，感謝申し上げます。


## 引用文献


西村保三，堀弘樹，前川友樹，桑原佑輔，松本智恵子（2015），体験的活動で学ぶ公開講座のための数学教材開発－ H26 体験ふむふむ数学クラブの実践より－，福井大学教育実践研究 40，pp.7-15.

H.S.M. コクセター〔銀林浩 訳〕(1965)，幾何学入門，明治図書.

川崎徹郎（2014），文様の幾何学，牧野書店.

マーチン・ガードナー〔一松信 訳〕(1975)，数学ゲーム－凸多角形のタイルによる平面充填形について－，サイエンス 1975 年 9 月号，pp.107-113.

杉本晃久，中村誠，藤田伸（2018），美しき「タイル張り」の数学，Newton 2018 年 1 月号，pp.114-121.

植田三郎，上垣渉（1986），中学校しきつめの幾何，国土社.

根上生也 編（2012），数学活用，啓林館.

Dan Fendel，Dieane Resek，Lynne Alper，Sherry Fraser（1998），Interactive Mathematics Program: Year2，Key Curriculum Press.

竹本有輝子（2019），タイリングの幾何，福井大学教育地域科学部卒業論文.

永地（2014），なぞときミステリー さんすう刑事ゼロ，角川まんが学習シリーズ.

杉原厚吉（2011），エッシャー・マジック，東京大学出版会.

伏見康治，安野光雅，中村義作（1979），美の幾何学，中央公論社.

河野俊丈（2015），結晶群，共立出版.


**An extension lecture of mathematics based on tiling, the report of “Mathematics of tiling” Fumufumu H30**

Yasuzo NISHIMURA, Yukiko TAKEMOTO, Chieko MATSUMOTO, Miho ONISHI, Kazuki YAMAUCHI, Ryosuke OGURA

Keywords：mathematical education, tiling, symmetry, mathematical activity