折り紙による正37角形の作図

折り紙による正37角形の作図

西村　保三（＊1）　山本　一海（＊2）

（2011年９月29日　受付）

1　はじめに

この論文では，正多角形の角数を表す n は奇素数に限定して議論する。定規とコンパスを用いた古典的な方法で作図可能な正 n 角形は，n が **フェルマー素数** のときに限ることが，ガウスによって証明されている。フェルマー素数とは，2^m+1 で表せる素数で，3, 5, 17, 257, 65537 の５個が知られている（もちろん，正 65537 角形などは実際に定規とコンパスで作図することは困難だが,「作図可能」という言葉は，実務的な意味ではなく数学的な意味で使っている）。

一方，**折り紙** を用いた作図では，定規とコンパスによる方法では作図不可能な「角の３等分」や「２の立方根」の作図なども可能になるため，作図可能な正素数多角形の角数は

$$3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 37,\ 73,\ 97,\ 109, \cdots$$

と多数存在する（[1, §19] など）。ただし，数学的に作図可能であることが証明されていることと，その作図方法が具体的にわかっていることは別問題である。正３角形と正５角形の作図は初等的で，昔から多くの折り紙の本に紹介されている（[3, §3], [4, §1,§6] 等）。正 17 角形は定規とコンパスによる作図方法がガウスによって考案されているが，折り紙を用いた作図方法は，ゲレトシュレーガー [2, §9]（または [6, §10]）で示されている。それ以外の角数－例えば正７角形などは，定規とコンパスによる古典的方法では作図不可能なので，芳賀 [4, §5] などでは近似による作図が試みられている。なお近似による作図では，畠山 [5] は正 23 角形までの全ての正多角形の作図方法を示している。正７角形の折り紙を用いた厳密な作図については，1990 年頃にアルペリン [2, §8], スキメニ [2, §10]，ゲレトシュレーガー [6, §7] がそれぞれ独立に作図方法を発表している。さらにゲレトシュレーガーは，幾つかの論文とそれをまとめた著書 [6] で正 13 および 19 角形の折り紙による具体的な作図手順も示している。

本稿では，正 37 角形の折り紙による厳密な作図手順を示すことが目的である。

＊1 福井大学教育地域科学部理数教育講座
＊2 福井大学教育地域科学部学校教育課程理数教育コース（４年生）

2　折り紙による方程式の解法

定規とコンパスの作図によって，構成可能な数を係数とする一般の２次方程式が解けることはよく知られている。定規とコンパスによる作図は折り紙の作図に置き換えることができるので，折り紙によっても，２次方程式の解法を与えることができる ([6, §2.2] 参照)。

定理 2.1　２次方程式 $x^2+px+q=0$ が任意に与えられているとする。座標平面上に，点 $P(-p,q)$ と $F(0,1)$ および直線 $l: y=-1$ を作図し，点 F が直線 l 上に乗り，折り線が点 P を通るように座標平面を折ると，折り線の傾きは与えられた２次方程式の解になる。

折り紙の作図によって，構成可能な数を係数とする一般の３次方程式が解けることは，1936 年にマルガリータ・ピアソラ・ベロッホによって証明されたが，この結果は長い間忘れられ，1989～2000 年頃にかけてジャスティン，ゲレトシュレーガー，アルペリンの３人によって独立に再発見された。以下にゲレトシュレーガー [6, §2.4] による折り紙を用いた３次方程式の解法を紹介する。

定理 2.2　３次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ が任意に与えられているとする。座標平面上に，点 $F_1(-\frac{p}{2}+\frac{r}{2},\frac{q}{2})$, $F_2(0,\frac{1}{2})$ と直線 $l_1: x=-\frac{p}{2}-\frac{r}{2}$, $l_2: y=-\frac{1}{2}$ を作図し，F_1 を l_1 上に，F_2 を l_2 上に乗るように座標平面を折ると，折り線の傾きは与えられた３次方程式の解になる。

フェラリの公式より，４次方程式は３次方程式に帰着できるので，系として，４次方程式も折り紙で解けることがわかる。

3　円周の 37 等分を実現する方程式

以下では，$\zeta := \exp(\frac{2}{37}\pi\mathrm{i}) = \cos(\frac{2}{37}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{2}{37}\pi)$ は 1 の原始 37 乗根とする。

$$\begin{aligned}
y_1 &:= \zeta^{34}+\zeta^{33}+\zeta^{32}+\zeta^{30}+\zeta^{24}+\zeta^{19}+\zeta^{18}+\zeta^{13}+\zeta^{7}+\zeta^{5}+\zeta^{4}+\zeta^{3}\\
y_2 &:= \zeta^{36}+\zeta^{31}+\zeta^{29}+\zeta^{27}+\zeta^{26}+\zeta^{23}+\zeta^{14}+\zeta^{11}+\zeta^{10}+\zeta^{8}+\zeta^{6}+\zeta\\
y_3 &:= \zeta^{35}+\zeta^{28}+\zeta^{25}+\zeta^{22}+\zeta^{21}+\zeta^{20}+\zeta^{17}+\zeta^{16}+\zeta^{15}+\zeta^{12}+\zeta^{9}+\zeta^{2}
\end{aligned}$$

とおくと，y_1, y_2, y_3 はそれぞれ共役複素数の 6 組の和であるから実数であり，

$$y_1 = 2(\cos(\frac{6}{37}\pi)+\cos(\frac{8}{37}\pi)+\cos(\frac{10}{37}\pi)+\cos(\frac{14}{37}\pi)+\cos(\frac{26}{37}\pi)+\cos(\frac{36}{37}\pi)) = 2.1871\cdots$$

と計算できる。同様に $y_2 = 1.1576\cdots$, $y_3 = -4.3447\cdots$ である。

関係式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{37}\zeta^{k-1}=0$ に注意すると，y_1，y_2，y_3 の基本対称式の値が計算できて，

$$y_1+y_2+y_3=-1,\ y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=-12,\ y_1y_2y_3=-11$$

が成立する。解と係数の関係より，y_1, y_2, y_3 は次の３次方程式の解である。

$$y^3 + y^2 - 12y + 11 = 0 \tag{1}$$

次に，$x_1 := \zeta^{36} + \zeta^{31} + \zeta^{6} + \zeta$, $x_2 := \zeta^{29} + \zeta^{26} + \zeta^{11} + \zeta^{8}$, $x_3 := \zeta^{27} + \zeta^{23} + \zeta^{14} + \zeta^{10}$ とおくと，x_1, x_2, x_3 も実数であり，数値計算すると $x_1 = 3.0198\cdots$, $x_2 = -0.164\cdots$, $x_3 = -1.6979\cdots$ である。また $x_1 + x_2 + x_3 = y_2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = y_3 - 1$, $x_1x_2x_3 = -y_2 + 2$ であるから，x_1, x_2, x_3 は，次の３次方程式の解である。

$$x^3 - y_2x^2 + (y_3 - 1)x + (y_2 - 2) = 0 \tag{2}$$

同様に，$w_1 := \zeta^{35} + \zeta^{25} + \zeta^{12} + \zeta^{2}$, $w_2 := \zeta^{28} + \zeta^{20} + \zeta^{17} + \zeta^{9}$, $w_3 := \zeta^{22} + \zeta^{21} + \zeta^{16} + \zeta^{15}$ とおくと，w_1, w_2, w_3 も実数であり，数値計算すると $w_1 = 0.9853\cdots$, $w_2 = -1.85058\cdots$, $w_3 = -3.4794\cdots$ である。また $w_1 + w_2 + w_3 = y_3$, $w_1w_2 + w_2w_3 + w_3w_1 = y_1 - 1$, $w_1w_2w_3 = -y_3 + 2$ であるから，w_1, w_2, w_3 は，次の３次方程式の解である。

$$w^3 - y_3w^2 + (y_1 - 1)w + (y_3 - 2) = 0 \tag{3}$$

さらに，$u_1 := \zeta^{35} + \zeta^{2}$, $u_2 := \zeta^{25} + \zeta^{12}$ とおくと，$u_1 = 2\cos(\frac{4}{37}\pi) = 1.8857\cdots$, $u_2 = -0.9004\cdots$ であり，$u_1 + u_2 = w_1$, $u_1u_2 = x_3$ であるから，u_1, u_2 は次の２次方程式の解である。

$$u^2 - w_1u + x_3 = 0 \tag{4}$$

以上より，高々３次の方程式 (1)(2)(3)(4) を順次解くことによって，$\cos(\frac{4}{37}\pi)$ が得られる。

注意 3.1 (3) の代わりに $t^3 - y_1t^2 + (y_2 - 1)t + (y_1 - 2) = 0$ を解くことで，最後に $\cos(\frac{4}{37}\pi)$ ではなく直接 $\cos(\frac{2}{37}\pi)$ が求まるようにもできるが，この方程式を折り紙で解こうとすると，$\frac{y_2-1}{2} = 0.0788\cdots$ というような 0 に極めて近い幅しか離れていない２点を「重ねるように折る」ところなど，現実に作図する場合に無理のある折り方が生じる。

4　正 37 角形の折り紙による作図手順

4.1　方程式 (1) $y^3 + y^2 - 12y + 11 = 0$

方程式 (1) を定理 2.2 の方法で解いて y_1, y_2, y_3 を作図するために，２点 $X(5, -6)$, $Y(0, \frac{1}{2})$ と２直線 $\mathrm{x} : x = -6$, $\mathrm{y} : y = -\frac{1}{2}$ を作図する（図１）。正方形の折り紙 $ABCD$ の辺 CD を２等分折りして中点 F を求める。以下，CF の中点 F_1, F_1F の中点 F_2, F_1F_2 の中点 F_3, F_2F_3 の中点 F_4 の順に求める。さらに CD を２等分折りしたときの，F_1, F_3 が重なる点をそれぞれ G_1, G_3

とする。辺 BC の中点 E, EC の中点 E_1, E_1C の中点 E_2, E_1E_2 の中点 E_3 の順に求め，BC を E で２等分折りしたときの E_2 が重なる点を H_2 とする。そこで辺上の点 E_3 と F_4 を通って各辺に垂直な直線の交点として X を決める。さらに辺上の点 E, H_2, G_3, G_1 を通って各辺に垂直な直線をそれぞれ，w, x, y, u とし，直線 w と直線 u, y の交点を Y, Q とする。なおここでは，正方形を 16×16 の座標平面と考えており，原点は Q と Y の中点である。

次に２点 X, Y を直線 x, y にそれぞれ重なるように折る（図２）。このような折り方は３通りあり，その傾きが (1) の解になっている。$QY = 1$ だから，このときの折り線の傾きは，点 Y が直線 y に重なる点の x 座標に等しい。これらを右から Y_1, Y_2, Y_3 と表す。

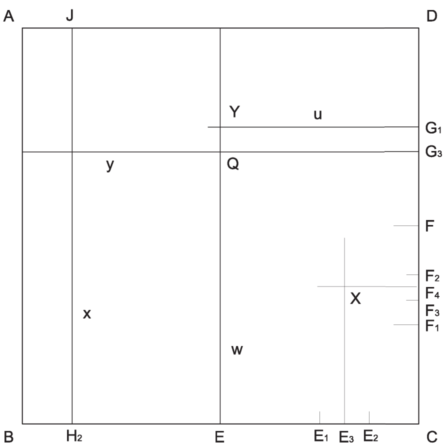

図 1: 点 X, Y, 直線 x, y の作図

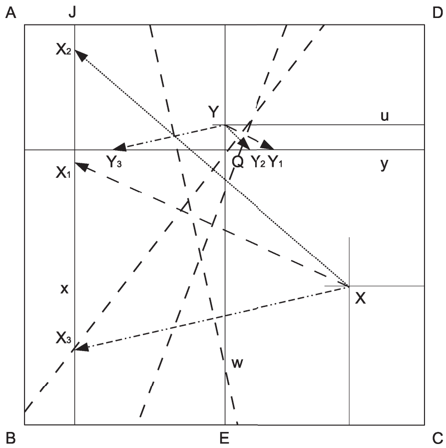

図 2: (1) の解 Y_1, Y_2, Y_3 の作図

図２を実際に折る場合には，点と線が重なるのを確認しながら折る必要があるため，以下のように多少工夫を要する。

(i) 直線 u と直線 x でそれぞれ山折りして，紙の上部と左部を裏に折り込み，点 Y が紙の上端，直線 x が紙の左端になるようにする（図３）。この状態で，点 Y を直線 y に重ね，直線 x が点 X に重なるように折る。点 Y が重なる直線 y 上の点が Y_1 である（図４）。

(ii) 直線 x と直線 JY で山折りして，右上部と左部を裏に折り込み，点 Y を直線 y に重ね，直線 x が点 X に重なるように折る（ただし点 J は直線 x と辺 AD の交点）。点 Y が重なる直線 y 上の点が Y_2 である（図５）。

(iii) 直線 XY で山折りして右上部を裏に折り込み，点 Y と X をそれぞれ直線 y と x に重なるように折る。点 Y が重なる直線 y 上の点が Y_3 である（図６）。

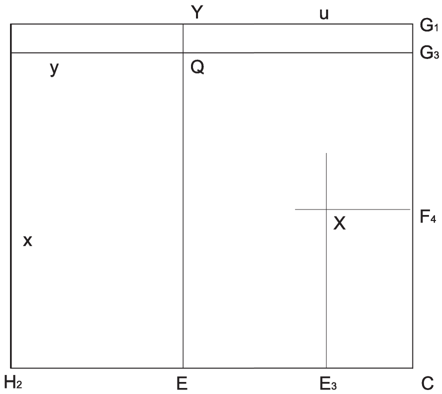

図 3: 点 Y_1 の作図の準備

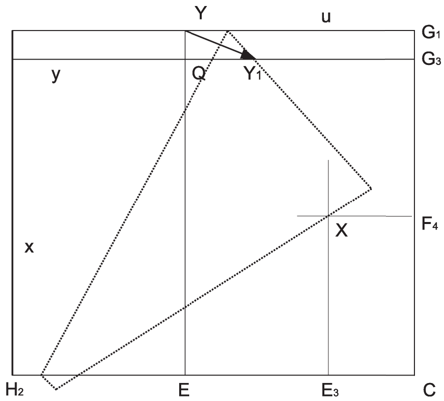

図 4: 点 Y_1 の作図

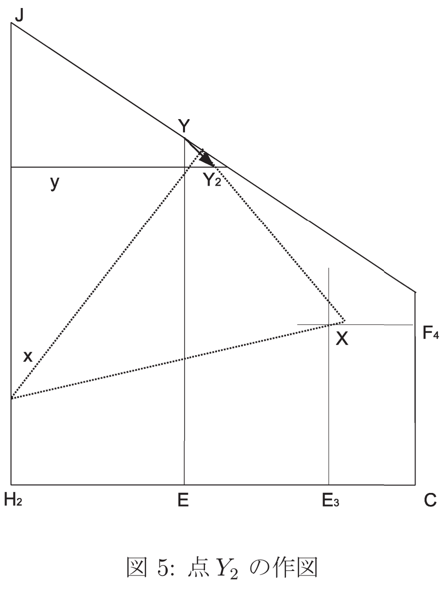

図 5: 点 Y_2 の作図

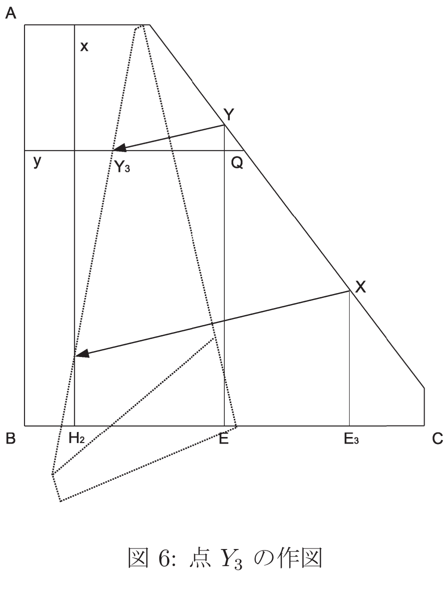

図 6: 点 Y_3 の作図

4.2　方程式 (2) $x^3 - y_2 x^2 + (y_3 - 1)x + (y_2 - 2) = 0$

次に方程式 (2) を定理 2.2 の方法で解いて x_3 を作図するために，点 $X'(y_2 - 1, \frac{y_3-1}{2})$ と直線 x' : $x = 1$ を作図する（図７）。辺 CD と直線 x を重ねて折った折り線を x' とし，直線 x' と直線 y の交点を I とする。点 Y_2 を通る直線 y の垂線が，直線 u と交わる点を Y_2' とし，点 Y_2 を支点として点 Y_2' が直線 y に重なるように左側に折ったときに Y_2' が重なる点を P_2，点 P_2 を通る直線 y の垂線を a とする。点 I を支点として Y_3 を直線 x' に下側で重ねた点を P_3 とし，直線 u と点 P_3 が重なるように，直線 x' に垂直に折った直線が，先の折れ線 a と交わる点を X' とする。

次に直線 u と x' でそれぞれ山折りして紙の上部と右部を裏側に折り込み，点 Y が直線 y に重なり，直線 x' が点 X' に重なるように折る（図８）。このときの点 Y が直線 y に重なる点を V と表す。

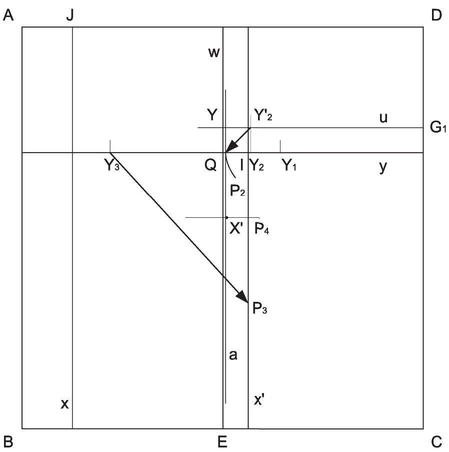

図 7: 点 X', 直線 x' の作図

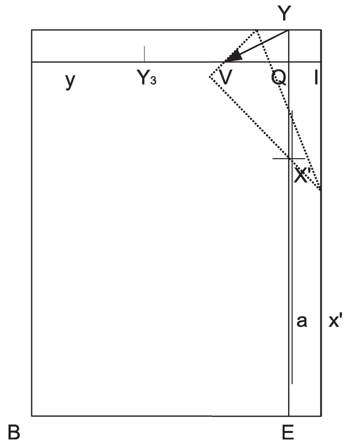

図 8: (2) の解 V の作図

4.3　方程式 (3) $w^3 - y_3 w^2 + (y_1 - 1)w + (y_3 - 2) = 0$

次に方程式 (3) を定理 2.2 の方法で解いて w_1 を作図するために，点 $X''(y_3 - 1, \frac{y_1-1}{2})$ を作図する（図９）。点 Y_3 から縦に伸びる直線と直線 u の交点を Y_3' とし，Y_3 を支点に Y_3' を直線

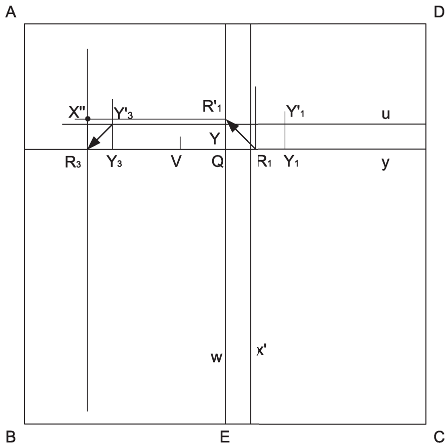

図 9: 点 X'' の作図

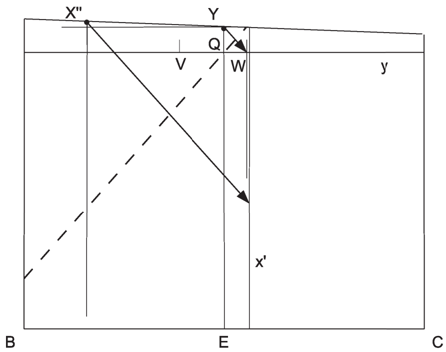

図 10: (3) の解 W の作図

y 上に左側で重ねて折ったときに，Y_3' が重なる点を R_3 とする。線分 QY_1 の中点を R_1 とし，点 Q を支点として R_1 を直線 w に上側で重なるように折ったときに，R_1 が重なる点 R_1' から，横に折り線を伸ばして，それが R_3 から縦に伸ばした折れ線と交わった点を X'' とする。

次に直線 $X''Y$ で山折りにして紙の上部を裏側に折り返し，2 点 X'', Y を直線 x', y にそれぞれ重なるように折る（図 10）。このとき点 Y が直線 y に重なる点を W と表す（注. $w_1 = 0.9853\cdots$ なので，W は先に作図した I と極めて近い点になる)。

4.4 方程式 (4) $u^2 - w_1u + x_3 = 0$

次に 2 点 $S(w_1, x_3)$, $(0, 1)$ と直線 z : $y = -1$ を作図して，定理 2.1 の方法で方程式 (4) を解いて，$\cos(\frac{4}{37}\pi)$ を作図する（図 11）。ここで Q を原点になるように縦の座標を $\frac{1}{2}$ だけ平行移動して，座標を取り替えれば，直線 y が x 軸となり，点 Y が $(0, 1)$ として考えられる。点 A と点 F_1 を重ねて折ることで 2 点の垂直 2 等分線として折り線 z : $y = -1$ を引く。点 Q を支点として点 V を直線 w に Q の下側で重ねて折ったときに，V が重なる点を V' とし，V' から横に伸ばした直線と W から縦に伸ばした直線の交点を S とする。次に点 S を支点として点 Y が直線 z に重なるように折る。これは，直線 SY で山折りして紙の左部を裏に折り込んでから折るとよい。この時の折れ線の傾きが $2\cos(\frac{4}{37}\pi)$ である。従って，この折り方で Y が重なった点 T の x 座標は $4\cos(\frac{4}{37}\pi)$ である。

最後に正方形の中心を O として，OF を半径とする円周の 37 等分点を作図する（図 12）。点 T を通る縦の折れ線を k とし，点 O を支点として，Y が直線 k に重なるように折った時に，Y

が重なる点を K とすると，$\angle FOK = \frac{4}{37}\pi$ が成り立つ。そこで $\angle FOK$ を２等分して，点 F がこの２等分線に重なるようにさらに２等分に折った時に，F が重なる点を M_1 とすれば，FM_1 は求める正 37 角形の１辺となる。あとは OM_1 に関して F と対称な点を M_2,OM_2 に関して M_1 と対称な点を M_3，$\cdots$ として頂点 M_n を順次求めていけばよい。

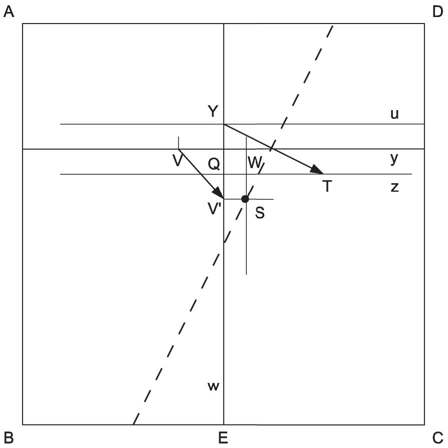

図 11: (4) の解 T の作図

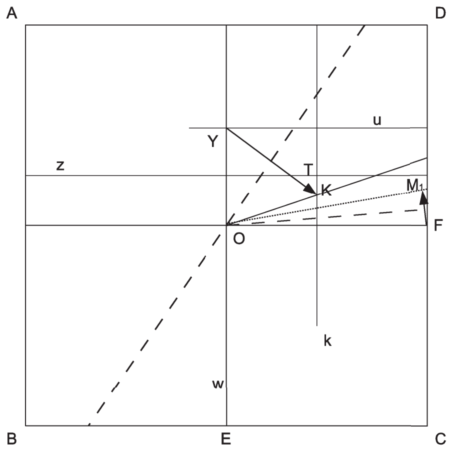

図 12: 正 37 角形の作図

参考文献

[1] エリック・D・ドメイン＆ジョセフ・オールク，上原隆平訳，幾何的な折りアルゴリズム，近代科学社 2009.

[2] Thomas Hull 編，川崎敏和訳，折り紙の数理と科学，森北出版 2005.

[3] 伏見康治＋伏見満枝，折り紙の幾何学，日本評論社 1979.

[4] 芳賀和夫，オリガミクスＩ【幾何図形折り紙】，日本評論社 1999.

[5] 畠山一平，折紙数学ー折紙で作図を楽しむー，東京図書出版会 2007.

[6] ロベルト・ゲレトシュレーガー，深川英俊訳, 折り紙の数学, 森北出版 2002.