整数の逆数からなる2重級数の和について

整数の逆数からなる 2 重級数の和について

櫻本　篤司 [*1]　上道　直哉 [*2]

（2011年 9 月30日　受付）

1　序文

整数列の逆数の無限級数については多くの研究がなされ，様々な級数の和が計算されている．よく知られた例としては，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2$$

などがあり，この 2 つはマクローリン展開を利用して示される．また，多角数の逆数の無限和，一般に n の一次式の積で表される整数列の逆数の無限和については，先の論文 ([2]) でその値を求めた．逆数の和で定義された関数としてはゼータ関数がある．

定義 1.1. (ゼータ関数) $\mathrm{Re}(s) > 1$ を満たす複素数 s に対して

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定め，これをゼータ関数という．

ゼータ関数は複素平面全体に解析接続され，$s = 1$ において 1 位の極を持つ有理型関数となる．また，その値についても様々なことが知られており，正の偶数や非正整数における値は，ベルヌーイ数 B_n を使って表される．

定理 1.1. (偶数に対するゼータ関数の値) 正の整数 n に対して

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} \pi^{2n} B_{2n}}{(2n)!}$$

[*1] 福井大学教育地域科学部理数教育講座
[*2] 福井県立武生東高等学校

定理 1.2. (非正整数に対するゼータ関数の値) 正の整数 n に対して

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$$

ここで，ベルヌーイ数の定義を示す．

定義 1.2. (ベルヌーイ数) 次の関係式によって定まる数 B_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ をベルヌーイ数という．

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = n+1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

n が 10 までのベルヌーイ数の値は以下の通りである．

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

3 以上の奇数に対するベルヌーイ数は全て 0 になることが分かっている．

命題 1.1. ([1, 命題 1.4]) n を 3 以上の奇数とするとき $B_n = 0$.

定理 1.1 より，n^2 や n^4 など n の偶数乗の逆数の和がわかる．例えば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = (-1)^2 \frac{2\pi^2}{2!} B_2 = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = (-1)^3 \frac{2^3\pi^4}{4!} B_4 = \frac{\pi^4}{90}$$

である．

このように整数列の逆数の無限和については様々な結果が得られているが，2 重数列の逆数の無限和についても何世紀も前から研究されている．そのような例としては深さ 2 の多重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2)$ や Barnes 2 重ゼータ関数 $\zeta_2(s, \omega, a)$ などがある．

定義 1.3. (多重ゼータ値) 正の整数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ に対して，

$$\zeta(k_1, k_2, \cdots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

を多重ゼータ値といい，n を深さという．

定義 1.4. (Barnes 2 重ゼータ関数) ω, a を正の実数とし，$\mathrm{Re}(s) > 2$ を満たす複素数 s に対して

$$\zeta_2(s, \omega, a) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(m + n\omega + a)^s}$$

と定め，これを Barnes 2 重ゼータ関数という．

深さ 2 の多重ゼータ値は $m^{k_1} n^{k_2}$ $(m > n)$ の，Barnes 2 重ゼータ関数は $(m + n\omega + a)^s$ の逆数の和であるが，この論文では 2 重数列 $m^p n^q (am + bn)^r$ の逆数の和について考える．ただし，p, q, r は正の偶数，a, b は 0 でない整数とする．この 2 重級数の和はベルヌーイ多項式の積分の形で表すことができるので，このことを利用して和の値を求める．この論文で示す和の値に関する公式はベルヌーイ数やベルヌーイ多項式の有限和の形で表され，これにより比較的容易に和を求めることができる．さらに，得られた公式をゼータ関数などを用いて表す．

本論文の構成は次のようになっている．2 節では，重要な役割を果たすベルヌーイ多項式に関する様々な命題を挙げる．3 節が論文の中心となる節で，$m^p n^q (am + bn)^r$ の逆数の和の値を求める．まず 3.1 ではこの 2 重級数の和に関する性質を示し，a, b が互いに素な正の整数で，$a \geq b$ の場合に和を求めれば，任意の a, b に対して和が計算できることを示す．3.2 では $b = 1$ の場合，3.3 では $b \geq 2$ の場合の和を求める．4 節では，前節で求めた和の公式をゼータ関数などを用いて表す．

2 準備

この節では，本論文で重要な役割を果たすベルヌーイ多項式について，その定義や命題などを挙げる．

まず，ベルヌーイ多項式の定義を示す．ベルヌーイ多項式の定義方法はいくつかあるが，ここでは積分を用いた方法を挙げる．

定義 2.1. (ベルヌーイ多項式) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ を

$$\int_x^{x+1} B_n(y)\, dy = x^n$$

により定める．

ベルヌーイ多項式については次が成り立つ．

命題 2.1. ([1, 命題 4.9])

(1) $B_n(1) = B_n$ である．また，$n \neq 1$ ならば $B_n(0) = B_n$ である．

(2) $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$

(3) $B_n^{'}(x) = nB_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$

(4) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$

(5) $B_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} B_j x^{n-j}$

(6) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} B_n(x+\tfrac{i}{k}) = k^{1-n}B_n(kx) \qquad (k \geq 1)$

この命題から，ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ の $x = 0, 1$ における値がわかるが，$x = \frac{1}{2}$ における値も求めることもできる．

命題 2.2. n を正の整数とするとき

$$B_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} (2^{1-n}-1)B_n & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

<u>証明</u>.

(i) n が奇数のとき

命題 2.1(4) において $x = \frac{1}{2}$ とすると

$$B_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = (-1)^n B_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = -B_n\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ B_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

(ii) n が偶数のとき

命題 2.1(6) において $k = 2, x = 0$ とすると

$$B_n(0) + B_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-n}B_n(0)$$

よって，

$$B_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = (2^{1-n}-1)B_n(0) = (2^{1-n}-1)B_n$$

□

また，命題 2.1 を用いると，累乗の和をベルヌーイ多項式やベルヌーイ数で表すことができる．

命題 2.3. k を正の整数とするとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^k &= \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1)) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}\end{aligned}$$

逆に，ベルヌーイ多項式を級数の和で表わすこともできる．

定理 2.1. ([1, 定理 4.11]) k を正の整数とするとき

$$B_k(x-[x]) = -\frac{k!}{(2\pi \mathrm{i})^k} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} \frac{e^{2\pi \mathrm{i} nx}}{n^k} \tag{2.1}$$

が，$k \geq 2$ ならばすべての実数 x について，$k=1$ ならば $x \notin \mathbb{Z}$ に対して成り立つ．尚，和は n が 0 でない整数全体をわたることを意味し，$[x]$ はガウス記号を表す．但し，$k=1$ のとき右辺の無限和は

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{e^{2\pi \mathrm{i} nx}}{n}$$

を意味するものとする．また $k \geq 2$ ならば (2.1) の右辺は絶対かつ x について一様に収束する．

最後に，ベルヌーイ多項式の積分に関する命題を挙げておく．

命題 2.4. 正の整数 m, n に対して

$$\int_0^1 B_m(x)B_n(x)\,dx = \frac{(-1)^{n-1}m!n!}{(m+n)!} B_{m+n}$$

3　2 重数列の逆数の無限和

この節では 2 重数列 $m^p n^q (am+bn)^r$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ の逆数の無限和を求める．

3.1　$S(p,q,r;a,b)$ について

定義 3.1. p, q, r を正の偶数，a, b を 0 でない整数とするとき

$$S(p,q,r;a,b) = \sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0 \\ am+bn\neq 0}} \frac{1}{m^p n^q (am+bn)^r}$$

と定める．但し，m, n は条件 $m \neq 0, n \neq 0, am+bn \neq 0$ を満たす整数全体を動く．

定義から $S(p,q,r;a,b)$ は次のような性質を持つことが言える．

命題 3.1.

(1) $S(p,q,r;a,b)=S(q,p,r;b,a)$

(2) $S(p,q,r;-a,b)=S(p,q,r;a,b)$

(3) k を 0 でない整数とするとき，$S(p,q,r;ka,kb)=\dfrac{1}{k^r}S(p,q,r;a,b)$

証明.

(1)
$$\begin{aligned}
S(p,q,r;a,b) &= \sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ am+bn\neq 0}} \frac{1}{m^p n^q (am+bn)^r}\\
&= \sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ bn+am\neq 0}} \frac{1}{n^q m^p (bn+am)^r}\\
&= S(q,p,r;b,a)
\end{aligned}$$

(2)
$$S(p,q,r;-a,b) = \sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ -am+bn\neq 0}} \frac{1}{m^p n^q (-am+bn)^r}$$

ここで，$k=-m$ とおくと

$$\begin{aligned}
S(p,q,r;-a,b) &= \sum_{\substack{k\neq 0,\, n\neq 0\\ ak+bn\neq 0}} \frac{1}{(-k)^p n^q (ak+bn)^r}\\
&= \sum_{\substack{k\neq 0,\, n\neq 0\\ ak+bn\neq 0}} \frac{1}{k^p n^q (ak+bn)^r}\\
&= S(p,q,r;a,b)
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
S(p,q,r;ka,kb) &= \sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ kam+kbn\neq 0}} \frac{1}{m^p n^q (kam+kbn)^r}\\
&= \frac{1}{k^r}\sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ am+bn\neq 0}} \frac{1}{m^p n^q (am+bn)^r}\\
&= \frac{1}{k^r}S(p,q,r;a,b)
\end{aligned}$$

□

この命題より，$a\geq b>0$ で，a と b が互いに素な場合についてのみ $S(p,q,r;a,b)$ の値を求めれば，任意の a,b に対する値も求められることがわかる．また，$S(p,q,r;a,b)$ は次のように定積分を使って表すことができる．

命題 3.2. ([1, 命題 4.14]) p, q, r を正の偶数，a, b を 0 でない整数とする．このとき

(1) $$S(p,q,r;a,b) = \frac{(-1)^{\frac{p+q+r-2}{2}}(2\pi)^{p+q+r}}{p!q!r!}\int_0^1 B_p(ax-[ax])B_q(bx-[bx])B_r(x)\,dx \quad (3.1)$$

(2) $\pi^{-p-q-r}S(p,q,r;a,b) \in \mathbb{Q}$

ここで，(3.1) の右辺の定積分を $I(p,q,r;a,b)$ で表す．

定義 3.2. p, q, r を正の偶数，a, b を 0 でない整数とするとき

$$I(p,q,r;a,b) = \int_0^1 B_p(ax-[ax])B_q(bx-[bx])B_r(x)\,dx$$

と定める．

例 3.1. $S(4,2,2;1,1)$

命題 2.1(3) を利用して部分積分を行い，命題 1.1, 2.1, 2.4 を用いると

$$\begin{aligned}
I(4,2,2;1,1) &= \int_0^1 B_4(x)B_2(x)^2\,dx \\
&= \int_0^1 B_4(x)B_2(x)\left(\frac{1}{3}B_3(x)\right)'dx \\
&= \left[\frac{1}{3}B_4(x)B_2(x)B_3(x)\right]_0^1 \\
&\quad -\frac{1}{3}\int_0^1 \{4B_3(x)B_2(x)+2B_4(x)B_1(x)\}B_3(x)\,dx \\
&= -\frac{4}{3}\int_0^1 B_3(x)^2B_2(x)\,dx - \frac{2}{3}\int_0^1 B_4(x)B_3(x)B_1(x)\,dx \\
&= -\frac{4}{3}\left[\frac{1}{3\cdot 3}B_3(x)^3\right]_0^1 \\
&\quad -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2\cdot 4}B_4(x)^2B_1(x)\right]_0^1 + \frac{1}{12}\int_0^1 B_4(x)^2\,dx \\
&= -\frac{1}{12}B_4^2 + \frac{1}{12}\cdot(-1)^3\frac{(4!)^2}{8!}B_8 \\
&= -\frac{1}{2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7}
\end{aligned}$$

よって，

$$S(4,2,2;1,1) = \frac{(-1)^3(2\pi)^8}{4!2!2!}I(4,2,2;1,1) = -\frac{2^3\pi^8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7}\right) = \frac{2\pi^8}{3^4\cdot 5^2\cdot 7}$$

3.2　$S(2p,2q,2r;a,1)$ の値

ここからは，p,q,r が偶数であることを明示するために，p,q,r の代わりに $2p,2q,2r$ とし，$S(2p,2q,2r;a,b)$ と表すことにする．

ここでは，$b=1$ の場合について調べる．$k=0,1,\cdots,a$ に対して $\alpha(k)=\frac{k}{a}$ と定めると，$\alpha(k)\leq x<\alpha(k+1)$ のとき $[ax]=k$，また $0\leq x<1$ で $[x]=0$ であるから

$$
\begin{aligned}
I(2p,2q,2r;a,1) &= \int_0^1 B_{2p}(ax-[ax])B_{2q}(x-[x])B_{2r}(x)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{a-1}\int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)} B_{2p}(ax-k)B_{2q}(x)B_{2r}(x)\,dx \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，次の補題を示す．

補題 3.1. a,n を正の整数, k を 0 以上の整数とし，$\alpha(k)=\frac{k}{a}$ とする．また，$f(x)$ を x の多項式とするとき，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int B_{2n}(ax-k)f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2n+i}\mathrm{P}_i\,a^i}B_{2n+i}(ax-k)f^{(i-1)}(x)+C$

(2) $\displaystyle\int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)} B_{2n}(ax-k)f(x)\,dx=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2n+2i}}{{}_{2n+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\left\{f^{(2i-1)}(\alpha(k+1))-f^{(2i-1)}(\alpha(k))\right\}$

証明.

(1) 部分積分を繰り返し行うことにより

$$
\begin{aligned}
\int B_{2n}(ax-k)f(x)\,dx &= \int\left\{\frac{1}{(2n+1)a}B_{2n+1}(ax-k)\right\}' f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{(2n+1)a}B_{2n+1}(ax-k)f(x) \\
&\qquad -\frac{1}{(2n+1)a}\int\left\{\frac{1}{(2n+2)a}B_{2n+2}(ax-k)\right\}' f'(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2n+i}\mathrm{P}_i\,a^i}B_{2n+i}(ax-k)f^{(i-1)}(x) \\
&\qquad +\frac{1}{{}_{2n+2}\mathrm{P}_2\,a^2}\int\left\{\frac{1}{(2n+3)a}B_{2n+3}(ax-k)\right\}' f''(x)\,dx \\
&= \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2n+i}\mathrm{P}_i\,a^i}B_{2n+i}(ax-k)f^{(i-1)}(x)+C
\end{aligned}
$$

(2) (1) より

$$
\begin{aligned}
&\int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)} B_{2n}(ax-k)f(x)\,dx \\
&= \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2n+i}\mathrm{P}_i\, a^i} B_{2n+i}(ax-k) f^{(i-1)}(x)\right]_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2n+i}\mathrm{P}_i\, a^i} \left\{ B_{2n+i}(1) f^{(i-1)}(\alpha(k+1)) - B_{2n+i}(0) f^{(i-1)}(\alpha(k)) \right\}
\end{aligned}
$$

$m \geq 2$ のときは $B_m(1) = B_m(0) = B_m$ であり，m が 3 以上の奇数のときは $B_m = 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)} B_{2n}(ax-k)f(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2i-1}}{{}_{2n+2i}\mathrm{P}_{2i}\, a^{2i}} B_{2n+2i} \left\{ f^{(2i-1)}(\alpha(k+1)) - f^{(2i-1)}(\alpha(k)) \right\} \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2n+2i}}{{}_{2n+2i}\mathrm{P}_{2i}\, a^{2i}} \left\{ f^{(2i-1)}(\alpha(k+1)) - f^{(2i-1)}(\alpha(k)) \right\}
\end{aligned}
$$

□

注意 3.1. 補題 3.1 に現れる無限和は，$f(x)$ が多項式であるので実際は有限和となる．$f(x)$ が m 次式の場合は (1) では $1 \leq i \leq m+1$ の範囲で，(2) では $1 \leq i \leq \left[\frac{m+1}{2}\right]$ の範囲で和をとればよい．

ここで，$f(x) = B_{2q}(x)B_{2r}(x)$ とおいて，補題 3.1 を (3.2) に適用すると，$f(x)$ は $2(q+r)$ 次式であるから

$$
\begin{aligned}
I(2p, 2q, 2r; a, 1) &= -\sum_{k=0}^{a-1}\sum_{i=1}^{q+r} \frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\, a^{2i}} \left\{ f^{(2i-1)}(\alpha(k+1)) - f^{(2i-1)}(\alpha(k)) \right\} \\
&= -\sum_{i=1}^{q+r} \frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\, a^{2i}} \left\{ f^{(2i-1)}(1) - f^{(2i-1)}(0) \right\}
\end{aligned}
$$

ライプニッツの公式より

$$
\begin{aligned}
f^{(2i-1)}(x) &= \sum_{j=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{j} B_{2q}^{(j)}(x) B_{2r}^{(2i-1-j)}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{j} {}_{2q}\mathrm{P}_j\ {}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j}\, B_{2q-j}(x) B_{2r-2i+j+1}(x)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&f^{(2i-1)}(1) - f^{(2i-1)}(0)\\
&= \sum_{j=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{j} {}_{2q}\mathrm{P}_j\, {}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j} B_{2q-j}(1) B_{2r-2i+j+1}(1)\\
&\qquad - \sum_{j=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{j} {}_{2q}\mathrm{P}_j\, {}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j} B_{2q-j}(0) B_{2r-2i+j+1}(0)\\
&= \sum_{j=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{j} {}_{2q}\mathrm{P}_j\, {}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j} \left\{ B_{2q-j}(1) B_{2r-2i+j+1}(1) - B_{2q-j}(0) B_{2r-2i+j+1}(0) \right\}
\end{aligned}
$$

ここで，次の補題を示す.

補題 3.2. m, n を 0 以上の整数とするとき

$$
B_m(1)B_n(1) - B_m(0)B_n(0) = \begin{cases} B_n & (m = 1, n \neq 1 \text{ のとき}) \\ B_m & (m \neq 1, n = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq 1, n \neq 1 \text{ または } m = n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

証明.

(i) $m = 1, n \neq 1$ のとき

$$
B_m(1)B_n(1) - B_m(0)B_n(0) = \frac{1}{2}B_n - \left(-\frac{1}{2}\right)B_n = B_n
$$

(ii) $m \neq 1, n = 1$ のとき
m, n に関する対称性と (i) より

$$
B_m(1)B_n(1) - B_m(0)B_n(0) = B_m
$$

(iii) $m \neq 1, n \neq 1$ のとき

$$
B_m(1)B_n(1) - B_m(0)B_n(0) = B_m B_n - B_m B_n = 0
$$

(iv) $m = n = 1$ のとき

$$
B_m(1)B_n(1) - B_m(0)B_n(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0
$$

□

この補題を用いると，$B_{2q-j}(1)B_{2r-2i+j+1}(1)-B_{2q-j}(0)B_{2r-2i+j+1}(0)$ が 0 とならないのは，

「$2q-j=1, 2r-2i+j+1\neq 1$」または「$2q-j\neq 1, 2r-2i+j+1=1$」

の場合に限られる．

1) $2q-j=1, 2r-2i+j+1\neq 1$ の場合
$2q-j=1$ となるのは $j=2q-1$ のときで，このとき $2r-2i+j+1=2q+2r-2i\neq 1$ となる．従って，

$$B_{2q-j}(1)B_{2r-2i+j+1}(1)-B_{2q-j}(0)B_{2r-2i+j+1}(0)=B_{2q+2r-2i}$$

となり，

$$\begin{aligned}&\binom{2i-1}{j}{}_{2q}\mathrm{P}_{j}\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j}\left\{B_{2q-j}(1)B_{2r-2i+j+1}(1)-B_{2q-j}(0)B_{2r-2i+j+1}(0)\right\}\\&=\binom{2i-1}{2q-1}{}_{2q}\mathrm{P}_{2q-1}\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2i-2q}\,B_{2q+2r-2i}\\&=\binom{2i-1}{2q-1}(2q)!(2r)!\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\end{aligned}$$

また，$0\leq j\leq 2i-1$ であるから，$j=2q-1$ となるのは $0\leq 2q-1\leq 2i-1$ のとき，即ち $i\geq q$ のときである．

2) $2q-j\neq 1, 2r-2i+j+1=1$ の場合
$2r-2i+j+1=1$ となるのは，$j=2i-2r$ のときで，このとき $2q-j=2q+2r-2i\neq 1$ となる．従って，

$$B_{2q-j}(1)B_{2r-2i+j+1}(1)-B_{2q-j}(0)B_{2r-2i+j+1}(0)=B_{2q+2r-2i}$$

となり，

$$\begin{aligned}&\binom{2i-1}{j}{}_{2q}\mathrm{P}_{j}\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j}\left\{B_{2q-j}(1)B_{2r-2i+j+1}(1)-B_{2q-j}(0)B_{2r-2i+j+1}(0)\right\}\\&=\binom{2i-1}{2i-2r}{}_{2q}\mathrm{P}_{2i-2r}\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2r-1}B_{2q+2r-2i}\\&=\binom{2i-1}{2r-1}(2q)!(2r)!\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\end{aligned}$$

また，$0\leq j\leq 2i-1$ であるから，$j=2i-2r$ となるのは $0\leq 2i-2r\leq 2i-1$ のとき，即ち $i\geq r$ のときである．

以上の事から，

$$
\begin{aligned}
&I(2p,2q,2r;a,1)\\
&=-\sum_{i=1}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i-1}{j}{}_{2q}\mathrm{P}_{j}\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j}\\
&\qquad\qquad\times\{B_{2q-j}(1)B_{2r-2i+j+1}(1)-B_{2q-j}(0)B_{2r-2i+j+1}(0)\}\\
&=-\sum_{i=q}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\binom{2i-1}{2q-1}(2q)!(2r)!\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\
&\quad-\sum_{i=r}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\binom{2i-1}{2r-1}(2q)!(2r)!\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\
&=-(2p)!(2q)!(2r)!\left\{\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}a^{-2i}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}a^{-2i}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

よって，$S(2p,2q,2r;a,1)$ の値は

$$
\begin{aligned}
&S(2p,2q,2r;a,1)\\
&=\frac{(-1)^{\frac{2p+2q+2r-2}{2}}(2\pi)^{2p+2q+2r}}{(2p)!(2q)!(2r)!}I(2p,2q,2r;a,1)\\
&=(-1)^{p+q+r}(2\pi)^{2p+2q+2r}\left\{\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}a^{-2i}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}a^{-2i}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right\}
\end{aligned}
$$

従って，次の定理が得られる．

定理 3.1. 正の整数 p,q,r,a に対して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\neq0,\,n\neq0\\ am+n\neq0}}\frac{1}{m^{2p}n^{2q}(am+n)^{2r}}\\
&=(-1)^{p+q+r}(2\pi)^{2p+2q+2r}\left\{\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}a^{-2i}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}a^{-2i}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

注意 3.2. (3.4) の括弧内は次のようにまとめることもできる.

$$\sum_{i=1}^{q+r}\left\{\binom{2i-1}{2q-1}+\binom{2i-1}{2r-1}\right\}a^{-2i}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}$$

例 3.2. $\sum\dfrac{1}{m^2n^4(3m+n)^2}$

定理 3.1 より

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ 3m+n\neq 0}}\frac{1}{m^2n^4(3m+n)^2}\\
&=(-1)^4(2\pi)^8\left\{\sum_{i=2}^{3}\binom{2i-1}{3}3^{-2i}\frac{B_{2+2i}}{(2+2i)!}\frac{B_{6-2i}}{(6-2i)!}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sum_{i=1}^{3}\binom{2i-1}{1}3^{-2i}\frac{B_{2+2i}}{(2+2i)!}\frac{B_{6-2i}}{(6-2i)!}\right\}\\
&=(2\pi)^8\left\{\binom{3}{3}3^{-4}\frac{B_6}{6!}\frac{B_2}{2!}+\binom{5}{3}3^{-6}\frac{B_8}{8!}\frac{B_0}{0!}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\binom{1}{1}3^{-2}\frac{B_4}{4!}\frac{B_4}{4!}+\binom{3}{1}3^{-4}\frac{B_6}{6!}\frac{B_2}{2!}+\binom{5}{1}3^{-6}\frac{B_8}{8!}\frac{B_0}{0!}\right\}\\
&=\frac{14\pi^8}{3^8\cdot 5^2}
\end{aligned}$$

$I(2p,2q,2r;a,1)$ の式 (3.3) において $a=1$ とすると，ベルヌーイ多項式 3 つの積の定積分に関する命題が得られる.

命題 3.3. 正の整数 p,q,r に対して

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 B_{2p}(x)B_{2q}(x)B_{2r}(x)\ dx\\
&=-(2p)!(2q)!(2r)!\left\{\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right\}
\end{aligned}$$

3.3　$S(2p,2q,2r;a,b)$ の値

次に，$b>1$ の場合を考える．正の整数 a,b は $a>b>1$ を満たし，互いに素であるとする．$\alpha(k)=\frac{k}{a}$ $(k=0,1,\cdots,a)$, $\beta(l)=\frac{l}{b}$ $(l=0,1,\cdots,b)$ と定め，$j=1,2,\cdots,b-1$ に対して，正の整数 n_j を $\alpha(n_j)<\beta(j)<\alpha(n_j+1)$ となるように定める．具体的には，$n_j=[a\beta(j)]$ とすればよい．さらに，$n_0=-1, n_b=a-1$ と定める．ここで，$\alpha(k)\le x<\alpha(k+1)$ のとき $[ax]=k$ であるから

$$I(2p,2q,2r;a,b)=\sum_{k=0}^{a-1}\int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)}B_{2p}(ax-k)B_{2q}(bx-[bx])B_{2r}(x)\,dx$$

さらに，$j=0,1,\cdots,b-1$ に対して $n_j+1\le k\le n_{j+1}-1$ のとき，$j=b-1$ の場合は $k=n_{j+1}$ のときも，$\alpha(k)\le x<\alpha(k+1)$ において $[bx]=j$ であるから

$$\int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)}B_{2p}(ax-k)B_{2q}(bx-[bx])B_{2r}(x)\,dx=\int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)}B_{2p}(ax-k)B_{2q}(bx-j)B_{2r}(x)\,dx$$

また，$j=1,2,\cdots,b-1$ に対して，$\alpha(n_j)<\beta(j)<\alpha(n_j+1)$ であり，$\alpha(n_j)\le x<\beta(j)$ のときは $[bx]=j-1$, $\beta(j)\le x\le\alpha(n_j+1)$ のときは $[bx]=j$ であるから

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha(n_j)}^{\alpha(n_j+1)}B_{2p}(ax-n_j)B_{2q}(bx-[bx])B_{2r}(x)\,dx\\
&=\int_{\alpha(n_j)}^{\beta(j)}B_{2p}(ax-n_j)B_{2q}(bx-(j-1))B_{2r}(x)\,dx\\
&\qquad+\int_{\beta(j)}^{\alpha(n_j+1)}B_{2p}(ax-n_j)B_{2q}(bx-j)B_{2r}(x)\,dx\\
&=\int_{\alpha(n_j)}^{\alpha(n_j+1)}B_{2p}(ax-n_j)B_{2q}(bx-(j-1))B_{2r}(x)\,dx\\
&\qquad+\int_{\beta(j)}^{\alpha(n_j+1)}B_{2p}(ax-n_j)\{B_{2q}(bx-j)-B_{2q}(bx-(j-1))\}B_{2r}(x)\,dx
\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}
&I(2p,2q,2r;a,b)\\
&=\sum_{j=0}^{b-1}\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)}B_{2p}(ax-k)B_{2q}(bx-j)B_{2r}(x)\,dx\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{b-1}\int_{\beta(j)}^{\alpha(n_j+1)}B_{2p}(ax-n_j)\{B_{2q}(bx-j)-B_{2q}(bx-(j-1))\}B_{2r}(x)\,dx
\end{aligned}$$

ここで，$f_j(x) = B_{2q}(bx - j)B_{2r}(x)$ とおいて補題 3.1 を用いると，$f_j(x)$ は $2(q + r)$ 次式であるから

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \int_{\alpha(k)}^{\alpha(k+1)} B_{2p}(ax - k)B_{2q}(bx - j)B_{2r}(x)\, dx \\
&= -\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \sum_{i=1}^{q+r} \frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\, a^{2i}} \left\{ f_j^{(2i-1)}(\alpha(k+1)) - f_j^{(2i-1)}(\alpha(k)) \right\} \\
&= -\sum_{i=1}^{q+r} \frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\, a^{2i}} \left\{ f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_{j+1}+1)) - f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1)) \right\}
\end{aligned}
$$

一方，命題 2.1(2) より

$$
\begin{aligned}
f_j(x) - f_{j-1}(x) &= \{B_{2q}(bx - j) - B_{2q}(bx - (j-1))\}\, B_{2r}(x) \\
&= -2q(bx - j)^{2q-1} B_{2r}(x)
\end{aligned}
$$

となり，$f_j(x) - f_{j-1}(x)$ は $(2q + 2r - 1)$ 次式であるから

$$
\begin{aligned}
&\int_{\beta(j)}^{\alpha(n_j+1)} B_{2p}(ax - n_j)\{B_{2q}(bx - j) - B_{2q}(bx - (j-1))\}B_{2r}(x)\, dx \\
&= \int_{\beta(j)}^{\alpha(n_j+1)} B_{2p}(ax - n_j)\{f_j(x) - f_{j-1}(x)\}\, dx \\
&= \left[\sum_{i=1}^{2q+2r} \frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_i\, a^i} B_{2p+i}(ax - n_j) \left\{ f_j^{(i-1)}(x) - f_{j-1}^{(i-1)}(x) \right\} \right]_{\beta(j)}^{\alpha(n_j+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{2q+2r} \frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_i\, a^i} B_{2p+i}(1) \left\{ f_j^{(i-1)}(\alpha(n_j+1)) - f_{j-1}^{(i-1)}(\alpha(n_j+1)) \right\} \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{2q+2r} \frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_i\, a^i} B_{2p+i}(a\beta(j) - n_j) \left\{ f_j^{(i-1)}(\beta(j)) - f_{j-1}^{(i-1)}(\beta(j)) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{q+r} \frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\, a^{2i}} \left\{ f_{j-1}^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1)) - f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1)) \right\} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{2q+2r} \frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_i\, a^i} B_{2p+i}(a\beta(j) - n_j) \left\{ f_{j-1}^{(i-1)}(\beta(j)) - f_j^{(i-1)}(\beta(j)) \right\}
\end{aligned}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
&I(2p,2q,2r;a,b)\\
&=-\sum_{j=0}^{b-1}\sum_{i=1}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\left\{f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_{j+1}+1))-f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))\right\}\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{b-1}\sum_{i=1}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\left\{f_{j-1}^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))-f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))\right\}\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{b-1}\sum_{i=1}^{2q+2r}\frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_{i}\,a^{i}}B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)\left\{f_{j-1}^{(i-1)}(\beta(j))-f_j^{(i-1)}(\beta(j))\right\}\\
&=-\sum_{i=1}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\left[\sum_{j=0}^{b-1}\left\{f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_{j+1}+1))-f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))\right\}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\sum_{j=1}^{b-1}\left\{f_{j-1}^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))-f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))\right\}\right]\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{b-1}\sum_{i=1}^{2q+2r}\frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_{i}\,a^{i}}B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)\left\{f_{j-1}^{(i-1)}(\beta(j))-f_j^{(i-1)}(\beta(j))\right\}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{b-1}\left\{f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_{j+1}+1))-f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))\right\}\\
&\qquad-\sum_{j=1}^{b-1}\left\{f_{j-1}^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))-f_j^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))\right\}\\
&=\sum_{j=1}^{b}f_{j-1}^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))-\sum_{j=1}^{b-1}f_{j-1}^{(2i-1)}(\alpha(n_j+1))-f_0^{(2i-1)}(\alpha(n_0+1))\\
&=f_{b-1}^{(2i-1)}(\alpha(n_b+1))-f_0^{(2i-1)}(\alpha(n_0+1))\\
&=f_{b-1}^{(2i-1)}(1)-f_0^{(2i-1)}(0)
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
&I(2p,2q,2r;a,b)\\
&=-\sum_{i=1}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\left\{f_{b-1}^{(2i-1)}(1)-f_0^{(2i-1)}(0)\right\}\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{2q+2r}\sum_{j=1}^{b-1}\frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_{i}\,a^{i}}B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)\left\{f_{j-1}^{(i-1)}(\beta(j))-f_j^{(i-1)}(\beta(j))\right\}
\end{aligned}
$$

まず，$f_{b-1}^{(2i-1)}(1)-f_0^{(2i-1)}(0)$ を計算する．
$f_{b-1}(x)=B_{2q}(bx-b+1)B_{2r}(x), f_0(x)=B_{2q}(bx)B_{2r}(x)$ より

$$\begin{aligned}
f_{b-1}^{(2i-1)}(x) &= \sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i-1}{j}\{B_{2q}(bx-b+1)\}^{(j)}B_{2r}^{(2i-1-j)}(x)\\
&= \sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i-1}{j}{}_{2q}\mathrm{P}_j\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j}\,b^jB_{2q-j}(bx-b+1)B_{2r-2i+j+1}(x)\\
f_0^{(2i-1)}(x) &= \sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i-1}{j}\{B_{2q}(bx)\}^{(j)}B_{2r}^{(2i-1-j)}(x)\\
&= \sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i-1}{j}{}_{2q}\mathrm{P}_j\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j}\,b^jB_{2q-j}(bx)B_{2r-2i+j+1}(x)
\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned}
&f_{b-1}^{(2i-1)}(1)-f_0^{(2i-1)}(0)\\
&=\sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i-1}{j}{}_{2q}\mathrm{P}_j\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j}\,b^jB_{2q-j}(1)B_{2r-2i+j+1}(1)\\
&\qquad-\sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i-1}{j}{}_{2q}\mathrm{P}_j\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2i-1-j}\,b^jB_{2q-j}(0)B_{2r-2i+j+1}(0)\\
&=\sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i-1}{j}{}_{2q}\mathrm{P}_j\,{}_{2r}\mathrm{P}_{2j-1-j}\,b^j\{B_{2q-j}(1)B_{2r-2i+j+1}(1)-B_{2q-j}(0)B_{2r-2i+j+1}(0)\}
\end{aligned}$$

よって，$I(2p,2q,2r;a,1)$ の場合と同様に，補題 3.2 を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\left\{f_{b-1}^{(2i-1)}(1)-f_0^{(2i-1)}(0)\right\}\\
&=\sum_{i=q}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\binom{2i-1}{2q-1}b^{2q-1}(2q)!(2r)!\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\
&\qquad+\sum_{i=r}^{q+r}\frac{B_{2p+2i}}{{}_{2p+2i}\mathrm{P}_{2i}\,a^{2i}}\binom{2i-1}{2i-2r}b^{2i-2r}(2q)!(2r)!\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\
&=(2p)!(2q)!(2r)!\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}a^{-2i}b^{2q-1}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\
&\qquad+(2p)!(2q)!(2r)!\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}a^{-2i}b^{2i-2r}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}
\end{aligned}$$

次に，$f_{j-1}^{(i-1)}(\beta(j)) - f_j^{(i-1)}(\beta(j))$ を計算する．
$f_{j-1}(x) - f_j(x) = 2q(bx-j)^{2q-1}B_{2r}(x)$ より

$$\begin{aligned} f_{j-1}^{(i-1)}(x) - f_j^{(i-1)}(x) &= \sum_{k=0}^{i-1} 2q \binom{i-1}{k} \{(bx-j)^{2q-1}\}^{(k)} B_{2r}^{(i-1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} 2q \binom{i-1}{k} {}_{2q-1}\mathrm{P}_k\, b^k (bx-j)^{2q-k-1}\ {}_{2r}\mathrm{P}_{i-1-k} B_{2r+k-i+1}(x) \end{aligned}$$

この式に，$x = \beta(j)$ を代入すると，$k \neq 2q-1$ のときは $\{(bx-j)^{2q-1}\}^{(k)}$ の部分が 0 となる．また，$0 \leq k \leq i-1$ であるから，$k = 2q-1$ となるのは $0 \leq 2q-1 \leq i-1$ のとき，即ち $i \geq 2q$ のときであり，このときは

$$\begin{aligned} f_{j-1}^{(i-1)}(\beta(j)) - f_j^{(i-1)}(\beta(j)) &= 2q \binom{i-1}{2q-1} {}_{2q-1}\mathrm{P}_{2q-1}\, b^{2q-1}\ {}_{2r}\mathrm{P}_{i-2q}\, B_{2q+2r-i}(\beta(j)) \\ &= (2q)!(2r)! \binom{i-1}{2q-1} b^{2q-1} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2q+2r} \sum_{j=1}^{b-1} \frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_i a^i} B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)\{f_{j-1}^{(i-1)}(\beta(j)) - f_j^{(i-1)}(\beta(j))\} \\ &= \sum_{i=2q}^{2q+2r} \sum_{j=1}^{b-1} \frac{(-1)^{i-1}}{{}_{2p+i}\mathrm{P}_i a^i} B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)(2q)!(2r)! \binom{i-1}{2q-1} b^{2q-1} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!} \\ &= -(2p)!(2q)!(2r)! \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b-1} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!} \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} &I(2p,2q,2r;a,b) \\ &= -(2p)!(2q)!(2r)! \sum_{i=q}^{q+r} \binom{2i-1}{2q-1} a^{-2i} b^{2q-1} \frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!} \frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!} \\ &\qquad - (2p)!(2q)!(2r)! \sum_{i=r}^{q+r} \binom{2i-1}{2r-1} a^{-2i} b^{2i-2r} \frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!} \frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!} \\ &\qquad - (2p)!(2q)!(2r)! \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b-1} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで，i が偶数のときは $B_{2p+i}(1) = B_{2p+i}, B_{2q+2r-i}(1) = B_{2q+2r-i}$，$i$ が奇数のときは $B_{2p+i}(1) = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i}\, b^{2q-1} \frac{B_{2p+i}(a\beta(b)-n_b)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(b))}{(2q+2r-i)!} \\
&= \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i}\, b^{2q-1} \frac{B_{2p+i}(1)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(1)}{(2q+2r-i)!} \\
&= \sum_{i=q}^{q+r} \binom{2i-1}{2q-1} a^{-2i}\, b^{2q-1} \frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!} \frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!} \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

よって，(3.5) の第 1 項と第 3 項は

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=q}^{q+r} \binom{2i-1}{2q-1} a^{-2i} b^{2q-1} \frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!} \frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!} \\
&\qquad + \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b-1} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!} \\
&= \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}
\end{aligned}$$

とまとめることができるから，

$$\begin{aligned}
&I(2p,2q,2r;a,b) \\
&= -(2p)!(2q)!(2r)! \sum_{i=r}^{q+r} \binom{2i-1}{2r-1} a^{-2i} b^{2i-2r} \frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!} \frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!} \\
&\qquad - (2p)!(2q)!(2r)! \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}
\end{aligned}$$

これを

$$S(2p,2q,2r;a,b) = \frac{(-1)^{\frac{2p+2q+2r-2}{2}} (2\pi)^{2p+2q+2r}}{(2p)!(2q)!(2r)!} I(2p,2q,2r;a,b)$$

に代入することにより，次の定理を得る．

定理 3.2. p, q, r を正の整数とし，a と b は互いに素な正の整数で，$a > b > 1$ とする．$\beta(j) = \frac{j}{b}$ $(j = 1, 2, \cdots, b)$, $n_j = [a\beta(j)]$ $(j = 1, 2, \cdots, b-1), n_b = a-1$ と定めるとき

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ am+bn\neq 0}} \frac{1}{m^{2p}n^{2q}(am+bn)^{2r}}\\
&\quad = (-1)^{p+q+r}(2\pi)^{2p+2q+2r}\\
&\qquad \times \left\{ \sum_{i=r}^{q+r} \binom{2i-1}{2r-1} a^{-2i} b^{2i-2r} \frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!} \frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!} \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i} b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!} \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

注意 3.3. 定理 3.2 を導くときは $b > 1$ を仮定していたが，(3.7) の右辺で $b = 1$ としてみると，(3.6) より

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i} b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}\\
&= \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i} b^{2q-1} \frac{B_{2p+i}(a\beta(b)-n_b)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(b))}{(2q+2r-i)!}\\
&= \sum_{i=q}^{q+r} \binom{2i-1}{2q-1} a^{-2i} b^{2q-1} \frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!} \frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}
\end{aligned}$$

となり，(3.7) は定理 3.1 の式と一致する．このことから，定理 3.2 は $a \geq b \geq 1$ かつ a, b が互いに素な場合に使えることが言える．

また，(3.7) で $b = 2$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ am+2n\neq 0}} \frac{1}{m^{2p}n^{2q}(am+2n)^{2r}}\\
&\quad = (-1)^{p+q+r}(2\pi)^{2p+2q+2r}\\
&\qquad \times \left\{ \sum_{i=r}^{q+r} \binom{2i-1}{2r-1} a^{-2i} 2^{2i-2r} \frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!} \frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!} \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{i=2q}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i} 2^{2q-1} \sum_{j=1}^{2} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!} \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

括弧内の第 2 項に注目すると，$b=2$ のとき a は奇数であるから $a\beta(1)-n_1=\frac{a}{2}-\left[\frac{a}{2}\right]=\frac{1}{2}$ となり

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{2}\frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}\\
&=\frac{B_{2p+i}(a\beta(1)-n_1)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(1))}{(2q+2r-i)!}+\frac{B_{2p+i}(a\beta(2)-n_2)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(2))}{(2q+2r-i)!}\\
&=\frac{B_{2p+i}(\frac{1}{2})}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\frac{1}{2})}{(2q+2r-i)!}+\frac{B_{2p+i}}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}}{(2q+2r-i)!} \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

ここで，命題 1.1, 2.2 より i が奇数のときは (3.9) は 0 となるから，i として偶数だけを考えればよいことがわかる．従って，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2q}^{2q+2r}\binom{i-1}{2q-1}(-a)^{-i}2^{2q-1}\sum_{j=1}^{2}\frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}\\
&=\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}a^{-2i}2^{2q-1}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\
&\qquad+\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}a^{-2i}\,2^{2q-1}\frac{B_{2p+2i}(\frac{1}{2})}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}(\frac{1}{2})}{(2q+2r-2i)!}
\end{aligned}$$

となり，これを (3.8) に代入すると次を得る．

系 3.1. p,q,r を正の整数，a を 3 以上の奇数とするとき

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\neq0,\,n\neq0\\ am+2n\neq0}}\frac{1}{m^{2p}n^{2q}(am+2n)^{2r}}\\
&=(-1)^{p+q+r}(2\pi)^{2p+2q+2r}\\
&\quad\times\left\{\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}a^{-2i}2^{2i-2r}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right.\\
&\qquad+\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}a^{-2i}2^{2q-1}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\
&\qquad\left.+\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}a^{-2i}2^{2q-1}\frac{B_{2p+2i}(\frac{1}{2})}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}(\frac{1}{2})}{(2q+2r-2i)!}\right\}
\end{aligned}$$

注意 3.4. 命題 2.2 より n が偶数のときは $B_n(\frac{1}{2})=(2^{1-n}-1)B_n$ となるから，系 3.1 の式はベルヌーイ数だけで表すことができる．

例 3.3. $\sum \dfrac{1}{m^2n^2(3m+2n)^2}$

系 3.1 より

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ 3m+2n\neq 0}} \frac{1}{m^2n^2(3m+2n)^2}\\
&= (-1)^3(2\pi)^6\left\{\sum_{i=1}^{2}\binom{2i-1}{1}3^{-2i}2^{2i-2}\frac{B_{2+2i}}{(2+2i)!}\frac{B_{4-2i}}{(4-2i)!}\right.\\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{2}\binom{2i-1}{1}3^{-2i}2\frac{B_{2+2i}}{(2+2i)!}\frac{B_{4-2i}}{(4-2i)!}\\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{i=1}^{2}\binom{2i-1}{1}3^{-2i}2\frac{B_{2+2i}(\frac{1}{2})}{(2+2i)!}\frac{B_{4-2i}(\frac{1}{2})}{(4-2i)!}\right\}\\
&= -(2\pi)^6\left\{\binom{1}{1}3^{-2}\frac{B_4}{4!}\frac{B_2}{2!} + \binom{3}{1}3^{-4}2^2\frac{B_6}{6!}\frac{B_0}{0!} + \binom{1}{1}3^{-2}2\frac{B_4}{4!}\frac{B_2}{2!}\right.\\
&\qquad \left. + \binom{3}{1}3^{-4}2\frac{B_6}{6!}\frac{B_0}{0!} + \binom{1}{1}3^{-2}2\frac{B_4(\frac{1}{2})}{4!}\frac{B_2(\frac{1}{2})}{2!} + \binom{3}{1}3^{-4}2\frac{B_6(\frac{1}{2})}{6!}\frac{B_0(\frac{1}{2})}{0!}\right\}\\
&= \frac{293\pi^6}{2^2\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7}
\end{aligned}$$

4　ゼータ関数による表示

この節では，定理 3.2 の式

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\neq 0,\, n\neq 0\\ am+bn\neq 0}} \frac{1}{m^{2p}n^{2q}(am+bn)^{2r}}\\
&= (-1)^{p+q+r}(2\pi)^{2p+2q+2r}\\
&\qquad \times\left\{\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}a^{-2i}b^{2i-2r}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{i=2q}^{2q+2r}\binom{i-1}{2q-1}(-a)^{-i}b^{2q-1}\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}\right\}
\end{aligned}$$

をゼータ関数を用いて表すことを考える．

定理 1.1 より，正の整数 n に対して，

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!} = (-1)^{n+1}\frac{2}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n) \tag{4.1}$$

となる．また，定理 1.2 において $n=1$ とすると

$$\zeta(0)=-\frac{B_1}{1}=-\frac{1}{2}$$

となり，この値を用いると (4.1) が $n=0$ のときも成立することがわかる．従って，

$$\begin{aligned}&\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\&=(-1)^{p+i+1}\frac{2}{(2\pi)^{2p+2i}}\zeta(2p+2i)\cdot(-1)^{q+r-i+1}\frac{2}{(2\pi)^{2q+2r-2i}}\zeta(2q+2r-2i)\\&=\frac{(-1)^{p+q+r}}{(2\pi)^{2p+2q+2r}}4\zeta(2p+2i)\zeta(2q+2r-2i)\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned}&(-1)^{p+q+r}(2\pi)^{2p+2q+2r}\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}a^{-2i}b^{2i-2r}\frac{B_{2p+2i}}{(2p+2i)!}\frac{B_{2q+2r-2i}}{(2q+2r-2i)!}\\&=\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}4a^{-2i}b^{2i-2r}\zeta(2p+2i)\zeta(2q+2r-2i)\end{aligned}$$

次に，$\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}$ について考える．一般に，$B_n(\beta(j))$ はゼータ関数では表すことができないので，フルヴィッツゼータ関数を用いる．

定義 4.1. (フルビッツゼータ関数) $\mathrm{Re}(s)>1$ を満たす複素数 s と正の実数 a に対して

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$$

と定め，これをフルヴィッツゼータ関数という．

$B_k(\beta(j))$ はフルヴィッツゼータ関数を用いて表すことができる．

命題 4.1. b,k を 2 以上の整数とし，$j=1,2,\cdots,b$ に対して $\beta(j)=\frac{j}{b}$ と定めるとき

$$B_k(\beta(j))=-\frac{k!}{(2\pi b\mathrm{i})^k}\sum_{l=1}^{b}\left(e^{2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}+(-1)^k e^{-2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}\right)\zeta(k,\beta(l))$$

証明.

定理 2.1 において $x=\beta(j)$ とすると，

$$B_k(\beta(j)-[\beta(j)]) = -\frac{k!}{(2\pi\mathrm{i})^k}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}}{n^k}$$

$$= -\frac{k!}{(2\pi\mathrm{i})^k}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}}{n^k}+\frac{e^{2\pi\mathrm{i}(-n)\beta(j)}}{(-n)^k}\right\}$$

$$= -\frac{k!}{(2\pi\mathrm{i})^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}+(-1)^k e^{-2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}}{n^k}$$

ここで，$n=bm+l\ (m=0,1,2,\cdots;l=1,2,\cdots,b)$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}+(-1)^k e^{-2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}}{n^k}$$

$$=\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi\mathrm{i}(bm+l)\beta(j)}+(-1)^k e^{-2\pi\mathrm{i}(bm+l)\beta(j)}}{(bm+l)^k}$$

$$=\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}+(-1)^k e^{-2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}}{b^k(m+\beta(l))^k}$$

$$=\frac{1}{b^k}\sum_{l=1}^{b}\left(e^{2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}+(-1)^k e^{-2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}\right)\zeta(k,\beta(l))$$

よって，

$$B_k(\beta(j)-[\beta(j)]) = -\frac{k!}{(2\pi b\mathrm{i})^k}\sum_{l=1}^{b}\left(e^{2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}+(-1)^k e^{-2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}\right)\zeta(k,\beta(l))$$

$1\leq j<b$ のときは，$[\beta(j)]=0$ であるから $B_k(\beta(j)-[\beta(j)])=B_k(\beta(j))$．$j=b$ のときは，

$$B_k(\beta(j)-[\beta(j)])=B_k(0)=B_k(1)=B_k(\beta(j))$$

従って，

$$B_k(\beta(j)) = -\frac{k!}{(2\pi b\mathrm{i})^k}\sum_{l=1}^{b}\left(e^{2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}+(-1)^k e^{-2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}\right)\zeta(k,\beta(l))$$

□

次に，$j=1,2,\cdots,b$ に対して，$k_j\in\{1,2,\cdots,b\}$ を $\beta(k_j)=a\beta(j)-n_j$ となるように定める．このとき，次が成立する．

補題 4.1. b, s, t は 2 以上の整数で，$s+t$ が偶数であるとき

$$\sum_{j=1}^{b} \frac{B_s(\beta(k_j))}{s!} \frac{B_t(\beta(j))}{t!}$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{s+t}{2}} 2b}{(2\pi b)^{s+t}} \left[\left(1+(-1)^t\right) \zeta(s)\zeta(t) + \sum_{l=1}^{b-1} \zeta(s,\beta(l)) \left\{ \zeta(t,\beta(b-k_l)) + (-1)^t \zeta(t,\beta(k_l)) \right\} \right]$$

証明.

命題 4.1 より

$$B_s(\beta(k_j))B_t(\beta(j))$$
$$= -\frac{s!}{(2\pi b\mathrm{i})^s} \sum_{l=1}^{b} \left(e^{2\pi \mathrm{i} l \beta(k_j)} + (-1)^s e^{-2\pi \mathrm{i} l \beta(k_j)} \right) \zeta(s,\beta(l))$$
$$\times \left\{ -\frac{t!}{(2\pi b\mathrm{i})^t} \sum_{m=1}^{b} \left(e^{2\pi \mathrm{i} m \beta(j)} + (-1)^t e^{-2\pi \mathrm{i} m \beta(j)} \right) \zeta(t,\beta(m)) \right\}$$
$$= \frac{s!t!}{(2\pi b\mathrm{i})^{s+t}} \sum_{l=1}^{b} \sum_{m=1}^{b} \left\{ \left(e^{2\pi \mathrm{i} l \beta(k_j)} + (-1)^s e^{-2\pi \mathrm{i} l \beta(k_j)} \right) \right.$$
$$\left. \times \left(e^{2\pi \mathrm{i} m \beta(j)} + (-1)^t e^{-2\pi \mathrm{i} m \beta(j)} \right) \zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(m)) \right\}$$

ここで，$\beta(k_j) = a\beta(j) - n_j$ より $e^{2\pi \mathrm{i} l \beta(k_j)} = e^{2\pi \mathrm{i} l (a\beta(j) - n_j)} = e^{2\pi \mathrm{i} a l \beta(j)}$ となる．また，$s+t$ が偶数であることから，s と t の偶奇は一致するので $(-1)^s = (-1)^t$ となり

$$B_s(\beta(k_j))B_t(\beta(j))$$
$$= \frac{s!t!}{(2\pi b\mathrm{i})^{s+t}} \sum_{l=1}^{b} \sum_{m=1}^{b} \left\{ \left(e^{2\pi \mathrm{i} a l \beta(j)} + (-1)^t e^{-2\pi \mathrm{i} a l \beta(j)} \right) \right.$$
$$\left. \times \left(e^{2\pi \mathrm{i} m \beta(j)} + (-1)^t e^{-2\pi \mathrm{i} m \beta(j)} \right) \zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(m)) \right\}$$

従って，

$$\sum_{j=1}^{b} \frac{B_s(\beta(k_j))}{s!} \frac{B_t(\beta(j))}{t!}$$
$$= \sum_{j=1}^{b} \frac{1}{(2\pi b\mathrm{i})^{s+t}} \sum_{l=1}^{b} \sum_{m=1}^{b} \left\{ \left(e^{2\pi \mathrm{i} a l \beta(j)} + (-1)^t e^{-2\pi \mathrm{i} a l \beta(j)} \right) \right.$$
$$\left. \times \left(e^{2\pi \mathrm{i} m \beta(j)} + (-1)^t e^{-2\pi \mathrm{i} m \beta(j)} \right) \zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(m)) \right\}$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{s+t}{2}}}{(2\pi b)^{s+t}} \sum_{l=1}^{b} \sum_{m=1}^{b} c(l,m)\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(m))$$

となる．但し，

$$c(l,m)=\sum_{j=1}^{b}\left(e^{2\pi\mathrm{i}al\beta(j)}+(-1)^te^{-2\pi\mathrm{i}al\beta(j)}\right)\left(e^{2\pi\mathrm{i}m\beta(j)}+(-1)^te^{-2\pi\mathrm{i}m\beta(j)}\right)$$

である．$c(l,m)$ を計算すると

$$\begin{aligned}c(l,m)&=\sum_{j=1}^{b}\left(e^{2\pi\mathrm{i}al\beta(j)}+(-1)^te^{-2\pi\mathrm{i}al\beta(j)}\right)\left(e^{2\pi\mathrm{i}m\beta(j)}+(-1)^te^{-2\pi\mathrm{i}m\beta(j)}\right)\\&=\sum_{j=1}^{b}\Big\{e^{2\pi\mathrm{i}(al+m)\beta(j)}+(-1)^te^{2\pi\mathrm{i}(al-m)\beta(j)}\\&\qquad\qquad+(-1)^te^{-2\pi\mathrm{i}(al-m)\beta(j)}+e^{-2\pi\mathrm{i}(al+m)\beta(j)}\Big\}\\&=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{b}e^{2\pi\mathrm{i}(al+m)\beta(j)}+2(-1)^t\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{b}e^{2\pi\mathrm{i}(al-m)\beta(j)}\end{aligned}$$

ここで，整数 n に対して $\sum_{j=1}^{b}e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}$ を求める．$w=e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(1)}$ とおくと，

$$\sum_{j=1}^{b}e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}=\sum_{j=1}^{b}w^j$$

(i) $n\in b\mathbb{Z}$ のときは $w=1$ であるから

$$\sum_{j=1}^{b}e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}=\sum_{j=1}^{b}1=b$$

(ii) $n\notin b\mathbb{Z}$ のときは $w\neq 1$ であるから

$$\sum_{j=1}^{b}e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}=\sum_{j=1}^{b}w^j=\frac{w(1-w^b)}{1-w}=0$$

従って，$c(l,m)$ の値は以下のようになる．

1) $al+m\in b\mathbb{Z}$, $al-m\in b\mathbb{Z}$ のとき

$$c(l,m)=2b+2(-1)^tb=2(1+(-1)^t)b$$

このときは $2al,2m\in b\mathbb{Z}$ となり，b が奇数の場合は，$(l,m)=(b,b)$ である．b が偶数の場合は $(l,m)=(\frac{b}{2},\frac{b}{2}),(\frac{b}{2},b),(b,\frac{b}{2}),(b,b)$ となるが，a と b は互いに素であるから a は奇数となり，$al+m$, $al-m\in b\mathbb{Z}$ を満たすのは，$(l,m)=(\frac{b}{2},\frac{b}{2}),(b,b)$ に限られる．

2) $al+m \in b\mathbb{Z}$, $al-m \notin b\mathbb{Z}$ のとき

$$c(l,m) = 2b$$

$al+m \in b\mathbb{Z}$ より l に対して m が一つ決まるが，その m が $al-m \notin b\mathbb{Z}$ を満たすのは，b が奇数の場合は $l \neq b$ のときで，b が偶数のときは $l \neq \frac{b}{2}, b$ のとき．さらに，$al+m \in b\mathbb{Z}$ より $a\beta(l)+\beta(m) \in \mathbb{Z}$ となる．$a\beta(l) = \beta(k_l)+n_l$ より

$$\beta(k_l)+n_l+\beta(m) \in \mathbb{Z}$$

$$k_l+m \in b\mathbb{Z}$$

$l \neq b$ のときは $0 < k_l+m < 2b$ だから，$m = b-k_l$ である．

3) $al+m \notin b\mathbb{Z}$, $al-m \in b\mathbb{Z}$ のとき

$$c(l,m) = (-1)^t 2b$$

$al-m \in b\mathbb{Z}$ より l に対して m が一つ決まるが，その m が $al+m \notin b\mathbb{Z}$ を満たすのは，b が奇数の場合は $l \neq b$ のときで，b が偶数のときは $l \neq \frac{b}{2}, b$ のとき．さらに，$al-m \in b\mathbb{Z}$ より $a\beta(l)-\beta(m) \in \mathbb{Z}$ となる．$a\beta(l) = \beta(k_l)+n_l$ より

$$\beta(k_l)+n_l-\beta(m) \in \mathbb{Z}$$

$$k_l-m \in b\mathbb{Z}$$

$-b < k_l-m < b$ より，$m = k_l$ である．

4) $al+m \notin b\mathbb{Z}$, $al-m \notin b\mathbb{Z}$ のとき

$$c(l,m) = 0$$

以上のことから，b が奇数のときは

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{b} c(l,m)\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(m)) \\
&= 2(1+(-1)^t)b\,\zeta(s,\beta(b))\zeta(t,\beta(b)) \\
&\qquad + 2b\sum_{l=1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(b-k_l)) + (-1)^t 2b\sum_{l=1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(k_l)) \\
&= 2b\left[(1+(-1)^t)\,\zeta(s)\zeta(t) + \sum_{l=1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\left\{\zeta(t,\beta(b-k_l)) + (-1)^t\zeta(t,\beta(k_l))\right\}\right]
\end{aligned}$$

となり，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{b}\frac{B_s(\beta(k_j))}{s!}\frac{B_t(\beta(j))}{t!}\\
&=\frac{(-1)^{\frac{s+t}{2}}}{(2\pi b)^{s+t}}\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{b}c(l,m)\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(m))\\
&=\frac{(-1)^{\frac{s+t}{2}}2b}{(2\pi b)^{s+t}}\left[(1+(-1)^t)\,\zeta(s)\zeta(t)+\sum_{l=1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\left\{\zeta(t,\beta(b-k_l))+(-1)^t\zeta(t,\beta(k_l))\right\}\right]
\end{aligned}
$$

b が偶数のときは

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{b}c(l,m)\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(m))\\
&=2(1+(-1)^t)b\,\zeta(s,\beta(b))\zeta(t,\beta(b))+2(1+(-1)^t)b\,\zeta(s,\beta(\tfrac{b}{2}))\zeta(t,\beta(\tfrac{b}{2}))\\
&\qquad+2b\sum_{l=1}^{\frac{b}{2}-1}\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(b-k_l))+2b\sum_{l=\frac{b}{2}+1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(b-k_l))\\
&\qquad+(-1)^t2b\sum_{l=1}^{\frac{b}{2}-1}\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(k_l))+(-1)^t2b\sum_{l=\frac{b}{2}+1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(k_l))\\
&=2(1+(-1)^t)b\,\zeta(s)\zeta(t)+2(1+(-1)^t)b\,\zeta(s,\beta(\tfrac{b}{2}))\zeta(t,\beta(\tfrac{b}{2}))\\
&\qquad+2b\sum_{l=1}^{\frac{b}{2}-1}\zeta(s,\beta(l))\left\{\zeta(t,\beta(b-k_l))+(-1)^t\zeta(t,\beta(k_l))\right\}\\
&\qquad+2b\sum_{l=\frac{b}{2}+1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\left\{\zeta(t,\beta(b-k_l))+(-1)^t\zeta(t,\beta(k_l))\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，

$$\beta(k_{\frac{b}{2}})=a\beta(\tfrac{b}{2})-\left[a\beta(\tfrac{b}{2})\right]=\frac{a}{2}-\left[\frac{a}{2}\right]=\frac{1}{2}=\beta\left(\tfrac{b}{2}\right)$$

であるから，$k_{\frac{b}{2}}=\frac{b}{2}$ となり

$$
\begin{aligned}
&\zeta(s,\beta(\tfrac{b}{2}))\{\zeta(t,\beta(b-k_{\frac{b}{2}}))+(-1)^t\zeta(t,\beta(k_{\frac{b}{2}}))\}\\
&=\zeta(s,\beta(\tfrac{b}{2}))\{\zeta(t,\beta(\tfrac{b}{2}))+(-1)^t\zeta(t,\beta(\tfrac{b}{2}))\}\\
&=(1+(-1)^t)\zeta(s,\beta(\tfrac{b}{2}))\zeta(t,\beta(\tfrac{b}{2}))
\end{aligned}
$$

よって，

$$\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{b} c(l,m)\zeta(s,\beta(l))\zeta(t,\beta(m))$$
$$= 2(1+(-1)^t)b\,\zeta(s)\zeta(t) + 2b\sum_{l=1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\left\{\zeta(t,\beta(b-k_l)) + (-1)^t\zeta(t,\beta(k_l))\right\}$$

となり，b が偶数の場合も

$$\sum_{j=1}^{b}\frac{B_s(\beta(k_j))}{s!}\frac{B_t(\beta(j))}{t!}$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{s+t}{2}}2b}{(2\pi b)^{s+t}}\left[(1+(-1)^t)\,\zeta(s)\zeta(t) + \sum_{l=1}^{b-1}\zeta(s,\beta(l))\left\{\zeta(t,\beta(b-k_l)) + (-1)^t\zeta(t,\beta(k_l))\right\}\right]$$

となる． □

補題 4.1 を用いて

$$\sum_{i=2q}^{2q+2r}\binom{i-1}{2q-1}(-a)^{-i}\,b^{2q-1}\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}$$

を計算すると，$2q \le i \le 2q+2r-2$ の場合は，$2p+i, 2q+2r-i$ がともに 2 以上となるので

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2q}^{2q+2r-2}\binom{i-1}{2q-1}(-a)^{-i}\,b^{2q-1}\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}\\
&= \sum_{i=2q}^{2q+2r-2}\binom{i-1}{2q-1}(-a)^{-i}\,b^{2q-1}\frac{(-1)^{p+q+r}2b}{(2\pi b)^{2p+2q+2r}}\\
&\quad\times\Bigg[(1+(-1)^{2q+2r-i})\,\zeta(2p+i)\zeta(2q+2r-i)\\
&\qquad+\sum_{l=1}^{b-1}\zeta(2p+i,\beta(l))\left\{\zeta(2q+2r-i,\beta(b-k_l)) + (-1)^{2q+2r-i}\zeta(2q+2r-i,\beta(k_l))\right\}\Bigg]\\
&= \frac{(-1)^{p+q+r}}{(2\pi)^{2p+2q+2r}}\sum_{i=q}^{q+r-1}\binom{2i-1}{2q-1}4\,a^{-2i}\,b^{-2p-2r}\zeta(2p+2i)\zeta(2q+2r-2i)\\
&\quad+\frac{(-1)^{p+q+r}}{(2\pi)^{2p+2q+2r}}\sum_{i=2q}^{2q+2r-2}\binom{i-1}{2q-1}2\,(-a)^{-i}\,b^{-2p-2r}\sum_{l=1}^{b-1}\zeta(2p+i,\beta(l))\\
&\qquad\qquad\times\left\{\zeta(2q+2r-i,\beta(b-k_l)) + (-1)^i\zeta(2q+2r-i,\beta(k_l))\right\}
\end{aligned}\tag{4.2}$$

次に，$i = 2q + 2r - 1, 2q + 2r$ の場合は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=2q+2r-1}^{2q+2r} \binom{i-1}{2q-1} (-a)^{-i}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!} \frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!} \\
&= \binom{2q+2r-2}{2q-1} (-a)^{-2q-2r+1}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+2q+2r-1}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+2q+2r-1)!} \frac{B_1(\beta(j))}{1!} \\
&\qquad + \binom{2q+2r-1}{2q-1} (-a)^{-2q-2r}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+2q+2r}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+2q+2r)!} \frac{B_0(\beta(j))}{0!} \\
&= \binom{2q+2r-2}{2q-1} (-a)^{-2q-2r+1}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+2q+2r-1}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+2q+2r-1)!} \left(\beta(j) - \frac{1}{2}\right) \\
&\qquad + \binom{2q+2r-1}{2q-1} (-a)^{-2q-2r}\, b^{2q-1} \sum_{j=1}^{b} \frac{B_{2p+2q+2r}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+2q+2r)!}
\end{aligned}
$$

命題 4.1 より

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{b} B_n(a\beta(j)-n_j) &= \sum_{j=1}^{b} B_n(\beta(k_j)) \\
&= -\frac{n!}{(2\pi b\mathrm{i})^n} \sum_{j=1}^{b} \sum_{l=1}^{b} \left(e^{2\pi \mathrm{i} l \beta(k_j)} + (-1)^n e^{-2\pi \mathrm{i} l \beta(k_j)} \right) \zeta(n, \beta(l)) \\
&= -\frac{n!}{(2\pi b\mathrm{i})^n} \sum_{l=1}^{b} \sum_{j=1}^{b} \left(e^{2\pi \mathrm{i} a l \beta(j)} + (-1)^n e^{-2\pi \mathrm{i} a l \beta(j)} \right) \zeta(n, \beta(l)) \\
&= -\frac{n!}{(2\pi b\mathrm{i})^n} b(1+(-1)^n)\zeta(n, \beta(b)) \\
&= -\frac{n!}{(2\pi b\mathrm{i})^n} b(1+(-1)^n)\zeta(n)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{b} B_{2p+2q+2r-1}(a\beta(j)-n_j) = 0 \\
&\sum_{j=1}^{b} B_{2p+2q+2r}(a\beta(j)-n_j) = -\frac{(2p+2q+2r)!}{(2\pi b\mathrm{i})^{2p+2q+2r}} 2b\zeta(2p+2q+2r)
\end{aligned}
$$

よって

$$\begin{aligned}
&\binom{2q+2r-1}{2q-1}(-a)^{-2q-2r}\,b^{2q-1}\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{2p+2q+2r}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+2q+2r)!}\\
&=\binom{2q+2r-1}{2q-1}a^{-2q-2r}\,b^{2q-1}\left\{-\frac{2b}{(2\pi b\mathrm{i})^{2p+2q+2r}}\zeta(2p+2q+2r)\right\}\\
&=-\frac{(-1)^{p+q+r}}{(2\pi)^{2p+2q+2r}}\binom{2q+2r-1}{2q-1}2\,a^{-2q-2r}\,b^{-2p-2r}\zeta(2p+2q+2r)
\end{aligned}$$

ここで，$\zeta(0)=-\dfrac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned}
&\binom{2q+2r-1}{2q-1}(-a)^{-2q-2r}\,b^{2q-1}\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{2p+2q+2r}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+2q+2r)!}\\
&=\frac{(-1)^{p+q+r}}{(2\pi)^{2p+2q+2r}}\binom{2q+2r-1}{2q-1}4\,a^{-2q-2r}\,b^{-2p-2r}\zeta(2p+2q+2r)\zeta(0) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

と表すこともできる．次に，$\sum_{j=1}^{b}\beta(j)B_{2p+2q+2r-1}(a\beta(j)-n_j)$ を計算する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{b}\beta(j)B_{2p+2q+2r-1}(a\beta(j)-n_j)\\
&=\sum_{j=1}^{b}\beta(j)B_{2p+2q+2r-1}(\beta(k_j))\\
&=-\frac{(2p+2q+2r-1)!}{(2\pi b\mathrm{i})^{2p+2q+2r-1}}\sum_{j=1}^{b}\beta(j)\sum_{l=1}^{b}\left(e^{2\pi\mathrm{i}l\beta(k_j)}+(-1)^{2p+2q+2r-1}e^{-2\pi\mathrm{i}l\beta(k_j)}\right)\\
&\qquad\qquad\times\zeta(2p+2q+2r-1,\beta(l))\\
&=-\frac{(2p+2q+2r-1)!}{(2\pi b\mathrm{i})^{2p+2q+2r-1}}\sum_{l=1}^{b}\sum_{j=1}^{b}\beta(j)\left(e^{2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}-e^{-2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}\right)\zeta(2p+2q+2r-1,\beta(l))
\end{aligned}$$

ここで，整数 n に対して $s(n)=\sum_{j=1}^{b}\beta(j)e^{2\pi\mathrm{i}n\beta(j)}$ とおくと

$$\sum_{j=1}^{b}\beta(j)\left(e^{2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}-e^{-2\pi\mathrm{i}l\beta(j)}\right)=s(l)-s(-l)$$

となる．また，$s(n)$ の値を求めると

(i) $n \in b\mathbb{Z}$ のときは

$$s(n) = \sum_{j=1}^{b} \beta(j) = \frac{b+1}{2}$$

(ii) $n \notin b\mathbb{Z}$ のときは，$w = e^{2\pi \mathrm{i} n\beta(1)}$ とおくと

$$\begin{aligned} s(n) - ws(n) &= \sum_{j=1}^{b} \beta(j)w^j - \sum_{j=1}^{b} \beta(j)w^{j+1} \\ &= \beta(1)\sum_{j=1}^{b} w^j - \beta(b)w^{b+1} \\ &= -w \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{-w}{1-w} = \frac{e^{2\pi \mathrm{i} n\beta(1)}}{e^{2\pi \mathrm{i} n\beta(1)} - 1} = \frac{e^{\pi \mathrm{i} n\beta(1)}}{e^{\pi \mathrm{i} n\beta(1)} - e^{-\pi \mathrm{i} n\beta(1)}} \\ &= \frac{\cos(\pi n\beta(1)) + \mathrm{i}\sin(\pi n\beta(1))}{2\mathrm{i}\sin(\pi n\beta(1))} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cot(\pi n\beta(1))\mathrm{i} \end{aligned}$$

従って，$l = b$ のときは

$$s(l) - s(-l) = 0$$

$l = 1, 2, \cdots, b-1$ のときは

$$s(l) - s(-l) = -\cot(\pi l\beta(1))\mathrm{i} = -\cot(\pi\beta(l))\mathrm{i}$$

よって，

$$\begin{aligned} &\binom{2q+2r-2}{2q-1}(-a)^{-2q-2r+1}\,b^{2q-1}\sum_{j=1}^{b}\beta(j)\frac{B_{2p+2q+2r-1}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+2q+2r-1)!} \\ &= \binom{2q+2r-2}{2q-1}(-a)^{-2q-2r+1}\,b^{2q-1}\frac{1}{(2\pi b\mathrm{i})^{2p+2q+2r-1}} \\ &\qquad \times \sum_{l=1}^{b-1}\cot(\pi\beta(l))\mathrm{i}\,\zeta(2p+2q+2r-1,\beta(l)) \\ &= \frac{(-1)^{p+q+r}}{(2\pi)^{2p+2q+2r}}\binom{2q+2r-2}{2q-1}2\pi a^{-2q-2r+1}\,b^{-2p-2r}\sum_{l=1}^{b-1}\cot(\pi\beta(l))\zeta(2p+2q+2r-1,\beta(l)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

従って，(4.2),(4.3),(4.4) より

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{p+q+r}(2\pi)^{2p+2q+2r}\sum_{i=2q}^{2q+2r}\binom{i-1}{2q-1}(-a)^{-i}\,b^{2q-1}\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{2p+i}(a\beta(j)-n_j)}{(2p+i)!}\frac{B_{2q+2r-i}(\beta(j))}{(2q+2r-i)!}\\
&=\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}4a^{-2i}b^{-2p-2r}\zeta(2p+2i)\zeta(2q+2r-2i)\\
&\quad+\sum_{i=2q}^{2q+2r-2}\binom{i-1}{2q-1}2(-a)^{-i}\,b^{-2p-2r}\sum_{l=1}^{b-1}\zeta(2p+i,\beta(l))\\
&\qquad\times\left\{\zeta(2q+2r-i,\beta(b-k_l))+(-1)^i\zeta(2q+2r-i,\beta(k_l))\right\}\\
&\quad+\binom{2q+2r-2}{2q-1}2\pi a^{-2q-2r+1}\,b^{-2p-2r}\sum_{l=1}^{b-1}\cot(\pi\beta(l))\zeta(2p+2q+2r-1,\beta(l))
\end{aligned}
$$

以上のことから，定理 3.2 の式はゼータ関数とフルヴィッツゼータ関数を用いて表すことができる．

定理 4.1. p,q,r を正の整数とし，a と b は互いに素な正の整数で，$a \geq b \geq 1$ とする．$\beta(j)=\frac{j}{b}$, $k_j=aj-b[a\beta(j)]$ $(j=1,2,\cdots,b-1)$ と定めるとき

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\neq0,\,n\neq0\\ am+bn\neq0}}\frac{1}{m^{2p}n^{2q}(am+bn)^{2r}}\\
&\quad=\sum_{i=r}^{q+r}\binom{2i-1}{2r-1}4a^{-2i}b^{2i-2r}\zeta(2p+2i)\zeta(2q+2r-2i)\\
&\qquad+\sum_{i=q}^{q+r}\binom{2i-1}{2q-1}4a^{-2i}b^{-2p-2r}\zeta(2p+2i)\zeta(2q+2r-2i)\\
&\qquad+\sum_{i=2q}^{2q+2r-2}\binom{i-1}{2q-1}2(-a)^{-i}\,b^{-2p-2r}\sum_{l=1}^{b-1}\zeta(2p+i,\beta(l))\\
&\qquad\qquad\times\left\{\zeta(2q+2r-i,\beta(b-k_l))+(-1)^i\zeta(2q+2r-i,\beta(k_l))\right\}\\
&\qquad+\binom{2q+2r-2}{2q-1}2\pi a^{-2q-2r+1}\,b^{-2p-2r}\sum_{l=1}^{b-1}\cot(\pi\beta(l))\zeta(2p+2q+2r-1,\beta(l))
\end{aligned}
$$

注意 4.1. 定理 4.1 の式は，$b=1,2$ のときはゼータ関数だけで表せる．$b=2$ の場合は $\zeta(n,\frac{1}{2})$ が現れるが，$\zeta(n,\frac{1}{2})=(2^n-1)\zeta(n)$ によりゼータ関数だけの式となる．

参考文献

[1] 荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店, 2001

[2] 上道直哉，櫻本篤司, 多項式によって定義された整数列の逆数の無限和について, 福井大学教育地域科学部紀要 **1** (2011) 121-146