相似概念の獲得と理解を促す授業展開の一例：身のまわりの題材や中点連結定理を導く課題を通して

実践論文

相似概念の獲得と理解を促す授業展開の一例
～身のまわりの題材や中点連結定理を導く課題を通して～

福井大学教育地域科学部附属中学校　草 桶 勇 人
永平寺町永平寺中学校　山 本 一 海
山形大学理学部数理科学科　井ノ口 順 一
福井大学教育地域科学部　伊 禮 三 之

本稿は，中学３年生の単元「図形と相似」における三角形の相似条件，相似における幾何的側面，中点連結定理，相似における測度的側面についての実践報告である。

相似の概念形成や三角形の相似条件に関しては，Ｂ４とＢ５の規格紙（コピー用紙）を準備し，これらの２枚のコピー用紙は「同じ形」であるかどうかを考えた。このような活動を通して，拡大・縮小や線分の比を目に見える形で具体的に表現しながら，相似とはどのようなことであるかを考えること，また，三角形の相似の意味をつかむことをねらいとした。相似における幾何的側面に関しては，３本の平行線と，３本の平行線を通る直線を２本引いた。そこに数字や文字を書き加え，相似であることや補助線を書き加えながら，線分と線分の関係を探った。中点連結定理に関しては，正方形が並んだ図を提示し，「ＰＭとＱＭの関係」について考えた。この関係を調べる過程で，中点連結定理が導き出され，中点連結定理の有用性について考えるきっかけとなった。相似における測度的側面に関しては，中点連結定理の図に中点Ｌを加えて，図中に存在する三角形の面積を考える中で，相似比と面積比を考えた。また，大きさの異なる２つの円錐の体積を比べる中で，相似比と体積比を考えた。

以上の実践の結果，相似比と面積比・体積比や相似の利用に関して，生徒の理解が深まることとなった。また，相似の概念を獲得する生徒が増加した。

キーワード：相似，規格紙（コピー用紙），中点連結定理，平行線と線分の比

１．はじめに

現行学習指導要領では，中学校数学科は「数と式」「図形」「関数」「資料の活用」の４領域で構成されている。

数学の基礎は数と図形であるといわれている。「数」は，身の回りにある様々な量（quantity）を認識するものである。最も根本的な数は自然数であり，離散的な量から導かれる。一方，自然の中で認識される量は連続量がほとんどで，単位を設定することで，有理数や実数が導かれる。また数学は，単に静的に確定した量だけではなく，「変化」する量や「不確定性」を持った量を取り扱うことで，その世界を豊かにする。「数と式」「関数」「資料の活用」の３領域が，こうした内容に対応する。

「数」を学習対象にする３領域に対し，「図形」は形の持つ特定の特徴にのみに着目して，他の一切を捨象する。すなわち，「空間」内にあるさまざまの「形」という特別な「質(quality)」を認識するものが「図形」の学習であるといえる。こうしてながめてみると，数学教育もやはり「数」と「図形」に関する学習内容が２本の大きな柱であるといえるだろう。

ところで，数学教育の大きな柱の一つである図形に関する学習指導の中で，論証の初期の内容である「平行線と角」や「三角形・四角形」等に関するものは比較的多く取り上げられているが，「図形の相似」に焦点を当てた研究はそれほど多くはない（國宗，2013）。また，中学３年生における「図形と相似」の指導は，「三角形の相似条件」「平行線と線分の比」「中点連結定理」に関しての知識の伝達の授業になる傾向があり，身近な題材を用いた相似の指導は，「相似の利用」だけに偏っているのが実情である。さらに，三角形の相似条件を用いた論証指導に重きを置きがちとなり，単元全体を貫くような論証に関する方法論がまだ存在していない。つまり，必要性と有用性を伴う論証がなされていないのである。

そこで，生徒が相似の概念形成を正確に行い，相似の意味を確実に認識できる題材について考えることにし，「同じ形」ということを正しく認識できるような授業展開を考えた。そして，身近な題材を用いて，辺の長さや角度の大きさを調べることを通して，相似の概念が日常生活の中で利用されていることを実感できるように指導を構想した。

こうした授業展開を考える上で中心となる題材を考える必要がある。本実践では，中点連結定理に注目する。中点連結定理を相似の幾何的側面の収束点，相似の測度的側面の出発点として捉え，中点連結定理を導く課題を設定し，生徒がその課題を解決する中で中点連結定理を導き，その有用性を実感できるような構成を考えた。こうすることで，相似の概念獲得を一貫した流れをもって行えると考えた。

本稿では，以上のような授業展開を通して，単元「図形と相似」の新たなカリキュラムのもとに授業を行い，考察を行う。

２．先行研究

「規格紙（コピー用紙）の比較」に関する先行研究については，山形大学附属中学校における実践研究「学習指導研究協議会要項」（山形大学附属中学校，2013）が挙げられる。山形大学附属中学校では，長方形の相似定理を生徒から引き出す授業を実践した。これは，規格紙（Ｂ４とＢ５）を用い，辺の長さの比に注目しながら，長方形の相似や三角形の相似条件などについて学習する展開となっていた。紙の規格については，「どこにでも居る幾何」（井ノ口，2010）を参照した。

中点連結定理を導く課題に関しては，「変換群入門」（セルゲイドゥージン他，2000）を参照して考案し，この課題を解決することを通して中点連結定理の意味を理解することを期待した。

３．研究方法

相似の理解度をはかること，特に，相似の概念が認識できているかをはかるために，以下のような観点で調査問題を実施した。（調査問題は省略）

(1) 國宗らが開発した問題。（「図形の論証の理解とその学習指導」（國宗進他，2013）
　問１：図形の相似の意味を理解している。
　問２：三角形の相似条件とその使い方を理解している。
　問３，問４：三角形と比，平行線と線分の比に関する性質を理解している。
　問５：相似な図形の面積比，体積比を理解している。
　問６：図形の相似を問題解決に利用することができる。
(2) 記述式のアンケート。
　問７：相似の概念が獲得できている。

実際の授業については，以下のような指導計画のもとに行った。

【指導計画】

第一次　相似の概念形成
　第１時　Ｂ４，Ｂ５のコピー用紙の比較
　第２時　相似の定義，辺の比の比較
　第３時　相似の概念形成のまとめ
　第４時　三角形の相似条件
　第５時　三角形の相似条件を利用した証明
第二次　相似における幾何的側面
　第６時　平行線と線分の比（数値）①
　第７時　平行線と線分の比（証明）②
　第８時　線分の比と平行線（数値）①
　第９時　線分の比と平行線（証明）②
第三次　中点連結定理
　第11時　中点連結定理に関する課題
第四次　相似における測度的側面
　第12時　相似比と面積比
　第13時　相似比と体積比
第五次　調査問題
　第14時　調査問題とアンケート

第一次は，Ｂ４とＢ５の規格（コピー用紙）を用いる。コピー用紙の辺の長さや大きさを比べることを通して，相似の概念をつかませる。そして，生徒から導き出された考えから，三角形の相似条件にまで思考が及ぶ展開となるようにする。

第二次は，３本の平行線を引き，その平行線を通る２本の直線を引く活動を取り入れる。これらの直線を引くことによって，相似な三角形が作られ，それらの線分の比に注目し，平行線と線分の比の性質を考えていく展開とする。

第三次は，中点連結定理を学ぶ。そのために，大きさの異なる２つの正方形と，これらによって作られる三角形の図を用いる課題を出題する。この課題を解決する中で，中点連結定理が導き出され，中点連結定理の理解が促進されるような展開となるようにしていく。また，平行線と線分の比の特別な場合が中点連結定理であることを認識させる。

第四次の相似比と面積比に関しては，中点連結定理での三角形の図を用いて理解を促したい。また，具体物を利用した実験を通して，相似比と体積の理解を促したい。

最後に，第五次として調査問題を行い，生徒の相似に関する理解を調査する。

４．実践記録・結果

第一次　相似の概念形成

第１時　Ｂ４とＢ５のコピー用紙を比較する

まず，教師が何も書かれていないコピー用紙（Ａ３，Ａ４，Ｂ４，Ｂ５）を提示し，「これらの長方形は同じ形でしょうか」と質問した。すると，「同じ形」を「同じ図形」すなわち合同な図形と捉える生徒がいる一方で，上の４枚の長方形は全て同じ形ではないと考える生徒も数人いた。そこで，教師は「『同じ形』とはどのようなことか？」と問いかけると，ある生徒が「長方形でも，長さの比が違ったら違う形といえるけれど，比が同じだと，とりあえず同じ形って感じる」と発言した。この発言を受け，長さの比が同じということに着目し，教師が以下の相似の定義を行った。

定義（相似）

ある２つの図形があり，拡大・縮小して別の図形に合わせると重なり合うとき，２つの図形の関係を相似という。

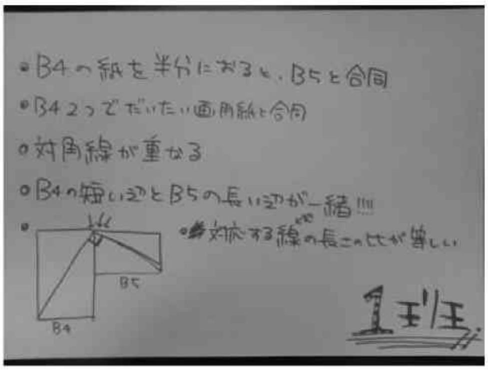
こうして，相似の定義を行った後，以下のような課題１を提示した。

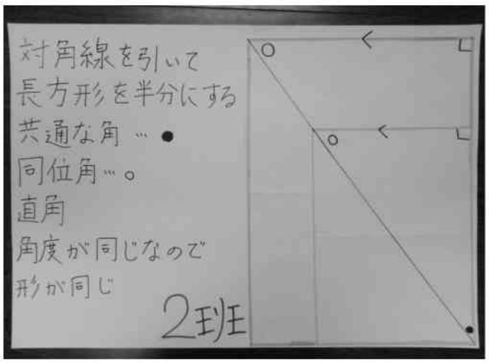
第１時（課題１） 　Ｂ４とＢ５の紙があります。この２つの長方形は同じ形でしょうか。

クラスを８班に分けて考えることにした。（１班４～５人）８班中４つの班が，以下のような考え（図１）を導き出した。

残りの班は，長さを出したり，角度を求めたりして，話し合いをする事はできていたが，考えをまとめるところまではいかなかったようであった。

【導き出された考え】
- Ｂ４の紙を半分に折ると，Ｂ５と合同（１班）
- Ｂ４が２枚でだいたい画用紙と合同（１班）
- 対角線が重なる（１班）
- Ｂ４に短い辺とＢ５の長い辺が一緒（１班）
- 対応する線（辺）の長さの比が等しい（１班）
- Ｂ４とＢ５で90°の角ができる（１班）
- 対角線を引いて長方形を半分にすると，角度が同じなので形が同じ（２班）
- 角度が等しいので三角形は相似（４班）
- 辺の比が等しいので四角形は相似（４班）
- 四角形を三角形に分割し，角度が等しいので相似である。さらに，２つの三角形同士が等しいので，四角形も相似（８班）





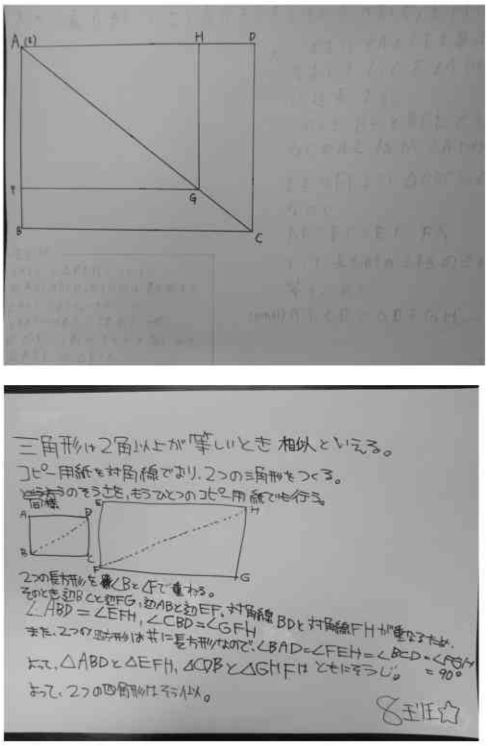


図１　課題１の答え

第２時　コピー用紙の辺の比に注目する

相似の定義を確認し，２班の意見をもとに，Ｂ４とＢ５の形が相似であることを確認した。その後，以下のような２つの長方形（図２）を提示した。

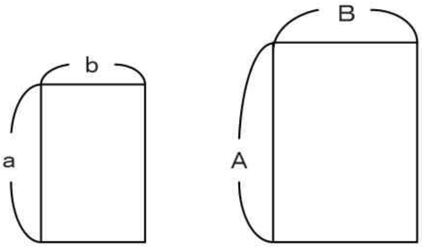
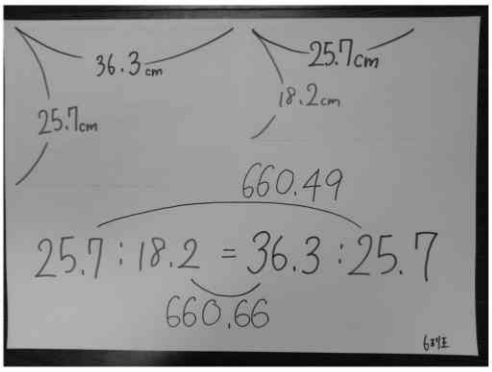


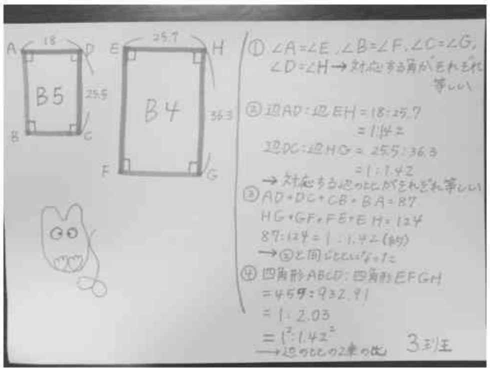
図２　２つの長方形

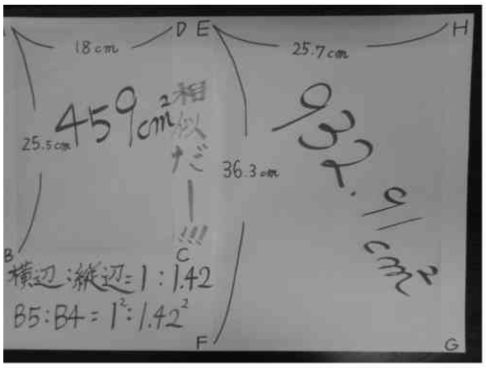
教師が「辺の比と言うとどこを考えるか？」と質問すると，相似比である「対応する辺の比」「ａとＡ，ｂとＢ」，形状比である「ａ：ｂ＝Ａ：Ｂ」と答える生徒が出てくる。そこで，「ａ：Ａ＝ｂ：Ｂならばａ：ｂ＝Ａ：Ｂ」を導き，形状比について考えることを述べ，以下のような課題２を提示した。

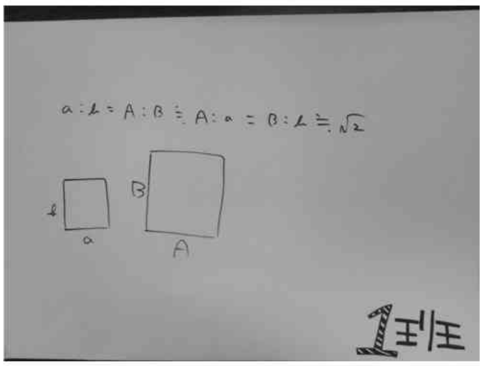
第２時（課題２） 　Ｂ５，Ｂ４の紙があります。２つの長方形の辺の比を考えよう。

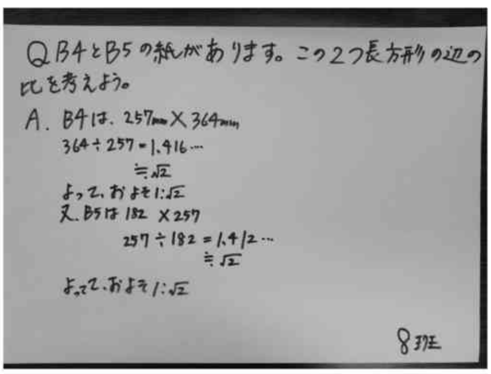
この課題は班で考えることにした。多くの班が定規を用いてそれぞれの長さを測り，辺の比がおよそ１：$\sqrt{2}$であることを結論付けた。班の中には，実測であったた

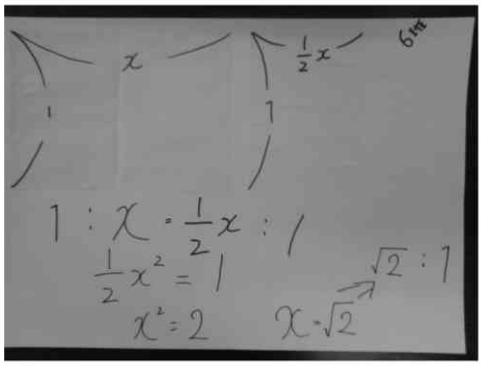


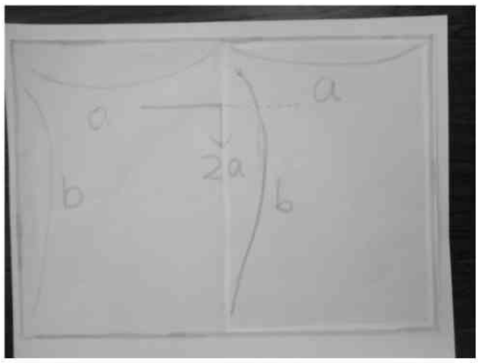












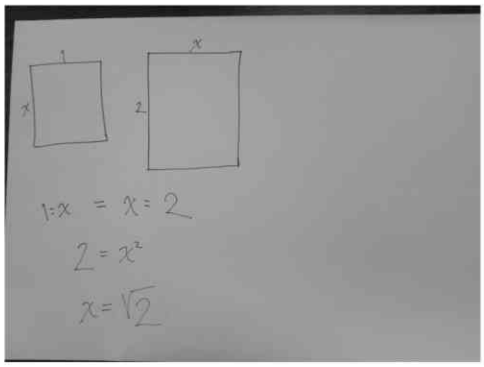


図３　課題２の答え（続き）

め，内項の積と外項の積が等しくならず，混乱する班も存在した。図３に各班の考えを示す。

【導き出された考え】（　）の数は班の数を表す。
・実際に辺の長さを計測し，辺の比を求める（４）
・文字式の計算を用いて，辺の比が１：$\sqrt{2}$であることを求める（２）
・相似比，形状比ともに１：$\sqrt{2}$であることを導く（１）
・辺を文字で表す（１）

第３時　相似概念の形成のまとめ

第３時は，相似概念の形成のまとめとして，第１・２時で導き出された考えを整理する時間とした。

まず，大きさの異なる２つの長方形が重なったスライドを見せた。そして，図４を提示しながら，「図の左下の部分を支点として，対角線に沿って，拡大したらぴったり重なる。スタートの長方形を基準として拡大していくこと」を，相似と言うことを確認し，相似の感覚的な

定義を述べた。

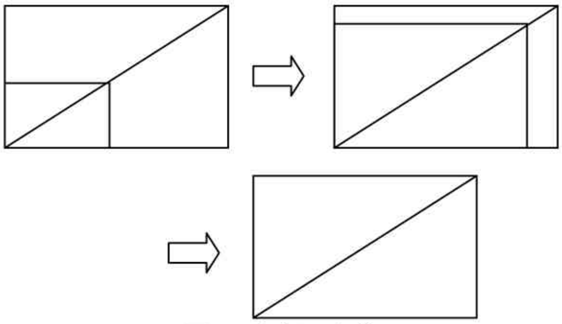


図４　相似の定義

次に，前時の，図３における比例式を用いて規格紙の比を求める考えをもとに，相似比が１：$\sqrt{2}$であることを計算で求めることを確認した。

そして，最後に，教師がコピー機の倍率の関係（図５）と規格紙の寸法の決め方（図６）を説明し，第３時を終えた。

規 格	サイズ(ミリ)	規 格	サイズ(ミリ)
A 0	841 × 1189	B 0	1030 × 1456
A 1	594 × 841	B 1	728 × 1030
A 2	420 × 594	B 2	515 × 728
A 3	297 × 420	B 3	364 × 515
A 4	210 × 297	B 4	257 × 364
A 5	148 × 210	B 5	182 × 257
A 6	105 × 148	B 6	128 × 182
A 7	74 × 105	B 7	91 × 128
A 8	52 × 74	B 8	64 × 91
A 9	37 × 52	B 9	45 × 64
A10	26 × 37	B10	32 × 45

図５　コピー機の倍率の関係

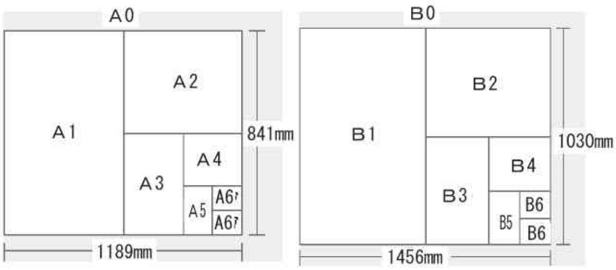


図６　規格紙の寸法の決め方

第４・５時　三角形の相似条件

第４時は三角形の相似条件を学習した。第１時に，生徒から「三角形において対応する２つの角がそれぞれ等しいとき相似になる」という意見が出ていた。この考えをもとに，「２組の角が，それぞれ等しいとき相似である」ことを説明した。

次に，第２時で注目したＢ４とＢ５の紙の辺の比について，「Ｂ５の横：Ｂ４の横＝Ｂ５の縦：Ｂ４の縦，そしてその間の角が90°である」ということを確認した。この考えをもとに，「２組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいとき相似である」ことを説明した。

最後に，３組の辺の比に関しては，残念ながら前時までの考えで押さえることができないと判断し，教科書の考えを用いた。「ある三角形を２倍にしたものを書きたいとき，どのようにするか」という質問から，「コンパスで長さを測って辺を２倍にする」という意見が生徒から出てきた。これを受け，「３組の辺の比が，すべて等しいとき相似である」ことを説明した。

第５時は，三角形の相似条件を用いた証明の問題１，２題解き，練習を行った。（問題は教科書の問題）

> 第５時（問題１）
> ２つの線分ＡＢとＣＤが点Ｏで交わっているとき，
> 　　ＡＯ＝２ＣＯ，ＤＯ＝２ＢＯ
> ならば，
> 　　△ＡＯＤ∽△ＣＯＢ
> であることを証明しなさい。

> 第５時（問題２）
> ∠Ａ＝90°の△ＡＢＣで，Ａから斜辺ＢＣに垂線ＡＨをひくとき，
> 　　△ＨＢＡ∽△ＡＢＣ
> であることを証明しなさい。

生徒たちは，問題１に関しては，アルファベットの対応に迷いが生じていたが，理解ができているようであった。問題２に関しては，理解している生徒がほとんであった。

第二次　相似における幾何的側面

第６時　平行線と線分の比①

第６時は，まず以下の課題を提示した。

> 第６時（課題３）
> 　ノートに３本の平行線と，３本の平行線を通る直線を２本引こう。

生徒はそれぞれ様々な書き方をし，代表の生徒に以下のような考え（図７）を板書させた。

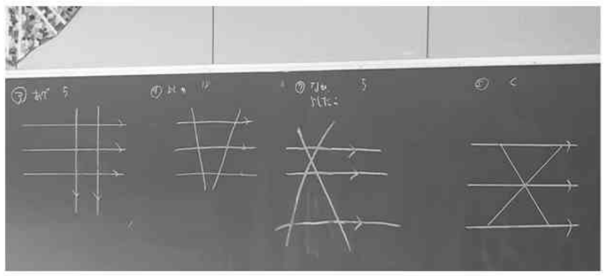


図７　課題３の答え

その後，教師が以下のように３本の平行線と２本の直線に数字と文字を加え（図８），生徒にx，y，zの値を求めさせた。生徒たちは補助線を引いたりしながら，それぞれの値を求めていき，答えの確認を行った。

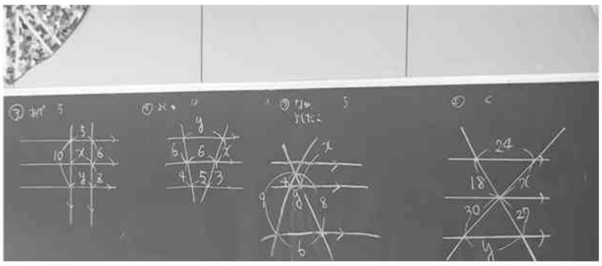


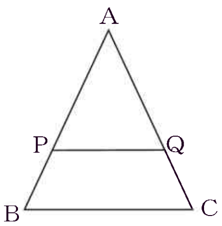
図８　線分の長さを求める

第７時　平行線と線分の比②

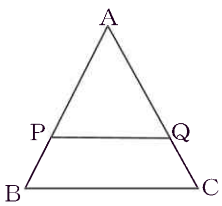
第７時は，第６時に解いた問題を，文字を用いて一般化しても成り立つかどうかを考える時間とした。

まず第６時で解決した問題は，どれも三角形の相似を用いていることを確認した。つまり，どの場合も「平行ならば，辺の比が等しい」ということを証明する必要があることを確認し，以下の課題４を提示し，生徒に考えさせた。

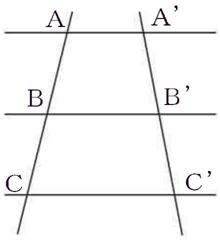
第７時（課題４）



（１）
ＰＱ//ＢＣならば，
ＡＰ：ＡＢ＝ＡＱ：ＡＣ
＝ＰＱ：ＢＣ



（２）
ＰＱ//ＢＣならば，
ＡＰ：ＰＢ＝ＡＱ：ＱＣ



（３）
ＡＡ'//ＢＢ'，
ＢＢ'//ＣＣ'ならば，
ＡＢ：ＢＣ＝ＡＢ'：Ｂ'Ｃ

この課題を解いている際の，生徒と教師の会話を以下にまとめる。(C1，C2は生徒，Ｔは教師)

C1：最初の問題は，相似って求めてから…あぁ，PQはBCの平行線だから同位角ね。

C2：(2)が先生わからないんですけど。文字が４つあると，パニックになる。

Ｔ：一瞬で解決する方法が，今日の最初の問題でやったような，補助線を引く。どう引くといいかを考える。ほしいのは，AP：PB＝AQ：QC。PBに平行な線を 点Ｑから引く。

C2：お～，みえた。すごい。

C1：こんな補助線，思いつくわけない。

C2：世の中には思いついた人がいるんです。

このように，(1)は容易に三角形を見つけ出し，三角形の相似を証明して，辺の比が等しいことをいうことは，ほとんどの生徒ができていた。しかし，(2)(3)に関しては，補助線を引くということを思いつくことがなかなかできず，課題を解決するのに苦労した生徒がほとんどであった。第６時における課題３では，具体的な数値であったため，辺の比から辺の長さを出すことが容易にできていた。しかし，一般的な文字に表すと，やはり辺の比が等しいことをいうのに苦労したようである。具体的な数値から，一般的な文字への考えの移行がなかなかスムーズにいかないことが明らかになった。

第８・９時　線分の比と平行線

第８時の前半では，前時の課題の証明を教師が行った。

後半では，図９（課題５）を提示した。三角形の中に線分が１本引かれているとき，底辺ＢＣと線分ＰＱが平行であるかを考える課題である。

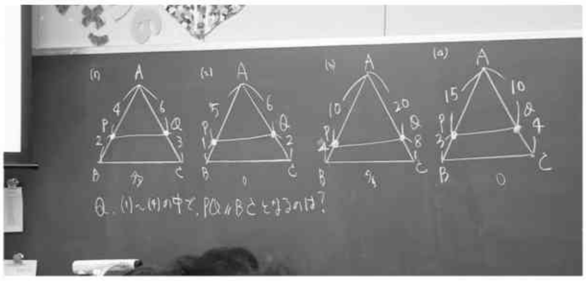


図９　課題５

まず，PQ∥BCとなるかを予想することにした。すると，平行になると答えた生徒は以下のようであった。

(1) 多数
(2) 0
(3) 多数
(4) 0

そこで，第９時ではまず，この予想が正しいかどうかを証明する時間となった。授業の中での教師と生徒の会話を以下にまとめる。(C1，C2は生徒，Ｔは教師)

Ｔ：前の時間，三角形が４つありました。長さが決まっています。PQ∥BCはどれかということを考えた。

１２３４としたとき，１，３が平行なんじゃないかなってことになった。何でかなってことを考えていて，昨日話していて，C1が説明してくれたので，説明してもらいます。

C1：△APQと△ABCはAP：ABとAQ：ACは２：３，∠Aは共通だから，２組の辺の比とその間の角が等しいから，△APQと△ABCが相似になることがわかって，このことから∠APQと∠ABCで同位角が等しいから２直線の同位角が等しいということになるので，平行になります。

Ｔ：今言ったことの概略はこのようになります。では，(2)は平行にならないの？

C2：ダメ。左右の辺の比が一緒じゃない。

Ｔ：左右の比，５：６，６：８ちがう。(3)は10：14で５：７，20：８で５：７。(4)は15：18で５：９，１０：14で。

C2：5：7。

Ｔ：あぁ，だから平行ではない。左右の比を比べていって一致した場合のみ，平行なんだよ，っていう考え方。で，実は，この平行になる見方っていうのをね，もう一つの見方で考えていきたい。平行に注目して，(1)で今，AP：PCについて考えたけど，AP：PBは４：２，AQ：QCは６：３。(3)はAP：PBは10：４，AQ：QCは20：８。これどうなっている？(1)は両方とも何でしょう？

C2：２：１

Ｔ：そうですね。(3)も。どうやら，AP：PB＝AQ：QCでも，平行になりそうだなってわかる。今，平行になることってわかっているんだけど，辺の比が等しかったら平行になるなっていうことを証明してみましょうか。今から一つ問題を出します。AP：PB＝AQ：QCならば，PQ∥BCになることを証明してください。

この会話の後，生徒は各々証明を行った。しかし，証明をするために必要な補助線を引ける生徒は少なかった。そこで，証明をすることができた生徒が代表で板書し，教師が解説を行って授業を終えた。

今回も直観的に辺の比に注目して平行であることは気づくことができるが，厳密に文字を用いて証明することに苦労する生徒がほとんであった。そのギャップをどう埋めるかが課題であると思われる。

第三次　中点連結定理

第10時　中点連結定理を導く課題を解く①

第10時はまず，以下の図10を板書し，本時の課題６を提示した。

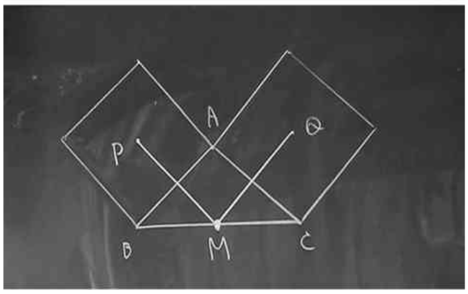


図10　課題６の図

> 第10時（課題６）
> ＰＱとＱMはどのような関係があるか。

（条件）三角形ABCがある。三角形のABを一辺とする正方形を辺AB上に作り，辺ACを一辺とする正方形を作る。辺BCの中点をM，辺AB上に作った正方形の中心を点P，辺AC上に作ったこちらの正方形の中心を点Qとする。

教師と生徒の対話を以下にまとめる。(C1，C2は生徒，Ｔは教師)

Ｔ：ところで，正方形の中心ってわかる？

C1：対角線の交点。

Ｔ：そうだね。対角線の交点とします。

C2：三角形ABCは二等辺三角形？

Ｔ：一般的な三角形。

C2：（２辺の関係は）同じかな。

Ｔ：辺の長さが等しい。他には？

C3：垂直に交わる。

C1：∠Aが垂直なら垂直。(※この発言の∠Aが垂直とは∠A＝90°を指す)

Ｔ：他ない？

C2：測れば同じってわかるよ。

Ｔ：測れば同じってわかるか…（ワークシートを配る)」

C2：え，先生，同じじゃないんですか？（※同じとは辺の長さのことを指す。)

Ｔ：同じじゃないかな。

C2：なら，同じじゃないよ。

Ｔ：今出た意見では，同じ，垂直っていうことがでてきた。では，証明してみよう。

このような会話の後，生徒たちは課題を解き出すが時間が経過しても誰一人証明することはできなかった。しかし，生徒たちの集中力が続いていたため，第10時は補助線のひき方を扱わず，生徒が問題を解く活動で終了した。

第11時　中点連結定理を導く課題を解く②

前時では誰一人証明をすることができなかったため，以下の２つのヒントを出すことにした。(図は図11参照)

ヒント①：点Qを通り，辺ACに垂直な線分，そして，点Pを通り，辺ABに垂直な線分を引く。交点をそれぞれ点Dと点Eとおく。
ヒント②：点Dと点M，点Eと点Mを結ぶ補助線を引く。

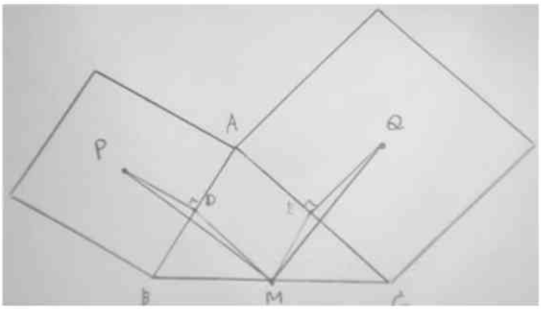


図11　ヒントの図

このヒントを与えたことにより，問題の方向性がわかった生徒が出てきた。代表の生徒が板書した証明方法は次の通りである。

（生徒の証明）
△DPMと△EMQで，
AD：DB＝AE：EC＝BM：MC＝1：1
△EMC：△ABC＝1：2より
EM：AB＝1：2・・・①
△APDは直角二等辺三角形なので
AD＝PD・・・②
AD＝BD・・・③
①　②，③より
PD＝EM・・・④
同様に
DM＝QE・・・⑤
AD＝EM，DM＝AEより2組の辺がそれぞれ等しいので，
ADMEは平行四辺形・・・⑥
⑥より
∠ADM＝∠AEM・・・⑦
∠PDM＝360°－∠PDA－∠ADM
＝270°－∠AEM・・・⑧
∠MEQ＝360°－∠AEQ－∠AEM
＝270°－∠AEM・・・⑨
⑦⑧⑨より
∠PDM＝∠MEQ・・・⑩
④⑤⑩より2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△PDM≡△MEQ
よって，PM＝MQ　（終）

また，平行四辺形の性質を利用してPMとQMが垂直になることを説明した。

第12時前半　中点連結定理を導く

第12時前半は，中点連結定理を紹介する時間とした。まず，前時で学習したように，PM＝QMを示すには△PDM≡△MEQを示す必要があること。そしてこの合同を示す途中で，△CEM∽△CABであることを証明したことを確認した。そしてその相似比が1：2であるため，EM：AB＝１：２が成り立つことを確認した。さらに，△CEM∽△CABより，∠CEM＝∠CABとなり，同位角が等しいことからEM∥ABが成り立つことを確認した。この２つの結論を中点連結定理ということを説明した。そして，課題４を解く中で中点連結定理を使っていること，証明していることを説明した。

また，AB，ACをそれぞれ三等分すると，MNとBCの関係は平行であり1/3であること。４等分したらMNとBCの関係は平行で1/4であること。中点連結定理は，比が１：１であること。比が等しければ平行という事実の１：１の特別なものであることを説明した。こうして，中点連結定理が平行線と線分の比の特殊であることをまとめとして述べた。

生徒の中に，「どれも一緒にしてあげればいいのに。」というように，平行線と線分の比の中で押さえる方がよいと思われる感想を述べる生徒もいた。

第四次　相似における測度的側面

第12時後半　相似比と面積比

第12時後半は，中点連結定理の説明で用いられた三角形を使って，相似比と面積比について考える時間とした。

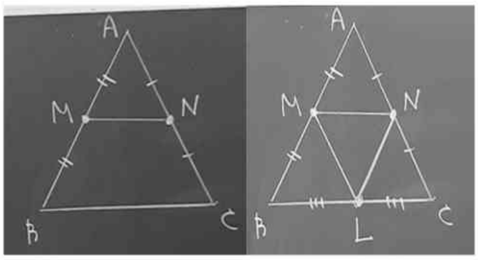


図12　三角形の図

教師は図12のように，辺ＢＣ上に中点Ｌを加え，以下の課題７を提示した。

第12時（課題７） この図において，わかることを挙げよう。

【生徒が出した考え】
・辺が等しい。
・四角形MBCNは台形Ｔ。
・△AMNと△MBLと△NLMと△NLCは合同。
・４つの三角形の面積が一緒。
・４つ三角形の面積の比は等しい。
・△AMNと△ABCの面積の比１：４。

△AMNと△ABCの相似比は１：２で，面積比が１：４ということから，面積比は二乗すると求められることを確認した。さらに，一般的に相似な図形において，相似比が$m:n$のとき，面積の比は$m^2:n^2$になっていることを押さえた。実際には，生徒の思考を促しながら相似比と面積比の関係に迫り，一般化していく場面であった。

第13時　相似比と体積比

第13時はバケツに水をはって水を使った実験を行った。教師は実験で使用する２つの円錐の直径と高さを定規で測定し（図13），相似比が１：２であると伝えた。

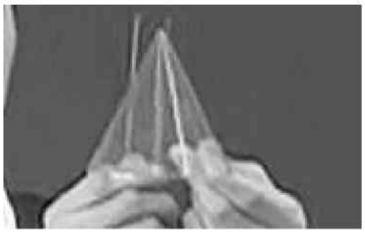


図13　実測している様子

こうして実験の内容を説明し，一方の円錐にもう一方の円錐の水は何杯入るか，予想を立てることにした。生徒の予想は以下の通りであった。

　１．２杯……０人　　２．４杯……０人
　３．６杯……１人　　４．８杯……20人
　５．その他…０人

予想を立てた後，生徒が実際に実験をしたところ，８杯入ることが確認できた。

その後，円柱についても，先ほどと同様に相似であることを実測で確かめた。そして，一方の円柱にもう一方の円柱の水は何杯入るか予想を取ると，生徒の予想は以下の通りであった。

　１．２杯……０人　　２．４杯……１人
　３．６杯……２人　　４．８杯……24人
　５．その他…０人

予想を立てた後，先ほどと同様に，生徒が実際に実験をしたところ，８杯入ることが確認できた。

その後，円錐，円柱ともに８杯になる理由を生徒とともに考えることにした。

教師と生徒の会話を以下にまとめる。（C1，C2は生徒，Ｔは教師）

Ｔ：どうやら，８杯になるんだけど，なんで８杯になるってわかった？
C1：体積は半径×半径×高さ。もとのやつの２倍（拡大した図形）だから，体積は２×２×２で８。
Ｔ：何で３回かけたの？
C1：縦×横×高さ。
Ｔ：縦×横×高さで８。他には？
C2：実際に測った。
Ｔ：実際に測ったか。では，今，直径が２倍ってなったけど，２：３ならどうかな，１：５ならどうかな。
C2：それぞれ３乗。
Ｔ：いろんな数字で示すにはどうしたらいい？
C2：比。
Ｔ：比をなんておく？この関係をどうおけばいいでしょう？
C2：x。
C3：相似比をx：yにおく。
Ｔ：なるほど。では，小さい方の半径をxr，高さをxh，大きい方の半径をyr，高さをyhと置いて実際の体積がどのようになるのかを求めて下さい。それと，円柱も同様にやってみて下さい。

以上のような対話を通して，８杯になる理由を考え，文字を用いて一般化することを行い，測度的側面の学習は終えた。

５．調査問題の結果

〈問１～６の正答率〉

	実験クラス	比較クラス
問１：相似の意味	92.3	97.4
問２：相似な三角形の選択	94.9	100.0
相似条件	94.9	97.4
証明	82.1	82.1
問３：平行線と線分の比	97.4	97.4
問４：中点連結定理	59.0	56.4
問５：相似比と面積比	84.6	71.8
相似比と体積比	74.4	69.2
問６：相似の利用	92.3	82.1

・実験クラス，比較クラスともに回答者39名
・単位は％（以下同じ）

〈問７の結果〉

第３時終了後：調査人数39名（回答38名，無答１名）

同じ形の認識が定式化されたと思われる回答	31.6
数学的に定式化出来ていない回答	34.2
角度が等しいと回答	34.2

第14時終了後：調査人数39名（回答38名，無答１名）

同じ形の認識が定式化されたと思われる回答	92.1
数学的に定式化出来ていない回答	7.9

（定式化されたと思われる回答の例）
・大きさや面積が違っても角度や辺の比が等しく，目でみたときにぱっとわかるようなもの。
・対応する角がすべて等しく，辺の比が等しい図形。
・大きさが違っていても角の大きさや辺の長さの比などが一緒だったら相似。角の数や辺の数が一緒でも同じ形といえる。

（評価の観点と対応する実践授業）

調査の観点	実践授業
問１：図形の相似の意味を理解している。	第１～３時
問２：三角形の相似条件とその使い方を理解している。	第４～５時
問３：三角形と比，平行線と線分の比に関する性質を理解している。	第６～９時
問４：三角形と比，平行線と線分の比に関する性質を理解している。	第10～12時
問５：相似な図形の面積比，体積比を理解している。	第12～13時
問６：図形の相似を問題解決に利用することができる。	第６～９時
問７：相似の概念が獲得できている。	第１～３時

６．考　察

問１に関しては，実験クラスと比較クラスとの差は１名であった。この結果から両クラスの差を分析することは難しい。ただ，今回の実践において，相似の定義を拡大・縮小を用いて行っただけであったので，実際の辺の長さにまで理解を促すことが必要であったと感じる。Ｂ４，Ｂ５の規格紙のように，相似比が１：$\sqrt{2}$という複雑な相似な図形を取り扱うことは重要である。しかし，それ以前に，より多くの単純な図形で具体的な値を例にして，相似の意味を考える学習も必要であると考える。

また，問題の内容について考えると，対応する角度を求めるよりも，対応する辺の長さを求めることの方が，定着率はわずかであるが低い結果となった（∠H，∠A：94.０％，辺FJ：92.3％，辺CD：89.7％）。この原因として，対応する辺の長さを求めることは，相似比と対応する辺という２つの認識が必要になってくるので，２つの理解を同時に行うことに困難を感じていることが考えられる。本実践では，学習者のこのような認識づくりに努めたが，至らなかった。新たな授業展開が望まれる。

問２に関しては，比較クラスと比べて，１～２名の差が生じた。誤った回答について考えると，相似な三角形を指摘すること，相似条件を利用することに関する理解度に課題が見られた。本実践においては，実際に相似な三角形を提示し，相似条件を用いて証明することに重きを置いた授業展開になっていた。これが１つの要因になったと考えられる。したがって，相似条件をもとに相似な三角形を判断する活動および相似な三角形を実際に作図するという体験をより多く取り入れていくことが必要であると考える。

問３に関しては，実験クラス，比較クラスともに正答率は同じ（98.6％）という結果となった。この結果からは本実践の有効性を述べることは難しいと考える。この点に関しては，問題自体が適切だったかを検証する必要があると考える。

問４に関しては，実験クラスと比較クラスとの差は１名という結果となり，この結果から違いを見出すことは難しい。誤答者数は，実験クラス16名，比較クラス17名であった。誤答の内訳は以下のようになる。

〈誤答の内訳〉

	白紙	等しい印を付ける・補助線を引く	その他
実験クラス	５名	６名	５名
比較クラス	８名	２名	７名

その他の回答は，「証明は正しいが中点連結定理を用いていない」「中点連結定理という言葉は使われているものの中点連結定理を用いていない」「その他の書き込み」である。これらの回答は，中点連結定理の意味を理解していないと見なす。ただし，等しい印を付ける・補助線を引くという活動は，中点連結定理の意味を理解しているものと見なすことにする。すると，正答者を含め考えると，中点連結定理の意味を理解している割合は，実験クラス74.4％（29名），比較クラス61.5％（24名）となり，実験クラスの方が比較クラスよりも中点連結定理の理解度が高いということが分かる。

問５に関しては，実験クラスが上回る結果となった。これは，中点連結定理の図を利用して，相似比と面積比を考える展開が生徒にとって考えやすいものになったと考える。また，具体物を用いて，予想→実験→確認という展開に重きを置き，感覚と数学的概念が一致したことが要因であると考えられる。

問６に関しても，実験クラスが上回る結果となった。この問題は平行線と線分の比の知識を活用する問題であった。すなわち，実際の問題を数学の問題として捉え，平行線と線分の比の知識を活用して問題解決することができているということが明らかになった。また，問３と関連付けて考えると，平行線と線分の比に関する性質の理解度が高いことを裏付けるものにもなっていたとも考えられる。

問７に関しては，同じ形の認識が定式化されたと思われる回答は，第３時終了後の12名から第14時終了後の35名に増え，認識の変化が見て取れた。なお，分析の視点として，「図形を拡大・縮小してぴったり重なる」「辺の比が等しい」と同じ趣旨であれば認識が定式化されたと見なし，「すべての角が等しい」は認識が定式化されていないと見なした。

第３時終了時では，生徒の認識が低い結果であった。この原因は授業時での相似の説明において，相似について拡大・縮小という言葉を用いて表現していたが，何が拡大されるのかという部分が不十分であったことが考えられる。相似の中心，相似の位置についての指導方針をより明確にする必要があったと感じる。しかし，その後の授業展開の中で，平行線と線分の比，中点連結定理，相似比と面積比・体積比を学習したことで，第14時終了時において，相似の認識を高めることにつながったと考えられる。

7．今後の展望

規格紙を用いた授業展開に関しては，生徒は興味を持って取り組む姿が見られ，規格紙を用いた導入は有効だと思われる。しかし，生徒たちが長方形の相似について検証する方法を工夫して取り組むことができるような授業展開をすることができなかった。今後，授業展開など具体的な指導内容の検討が望まれる。

ここで，第３時終了後の調査問題問７の結果を見ると，相似の意味の理解が曖昧であったことが明らかになった。したがって，相似の意味や定義を正確に指導することが必要であると言える。さらに，相似の意味や定義を区別させて指導することが，相似の概念を構築させるためにも重要なことなのである。

また，相似のカリキュラムの中心となる「平行線と線分の比→中点連結定理」という指導の流れを改める必要があると考える。現在，平行線と線分の比の一般化を行い，その特別な場合が中点連結定理として位置付けられている。そのため，今後は以下のような授業展開を提案したい。まず，平行方眼を用いて三角形を二倍の拡大・縮小を行わせ，そこからわかることを挙げさせ，中点連結定理の発見に導く。このような活動を通して，中点連結定理を導く課題から中点連結定理の有用性を実感させ，より一般的な平行線と線分の比の発見を行う展開とする。最後に，本授業実践のように中点連結定理で使われる図を利用して，相似比と面積比の内容につなげていく。

この授業展開は一つの案であり，相似の位置や三角形の相似条件を相似カリキュラムのどこに位置づけるのかが課題である。これからの授業実践による検討としたい。

引用・参考文献

井ノ口順一(2010)　どこにでも居る幾何－アサガオから宇宙まで－　日本評論社

山本一海(2014)　中学校幾何教育におけるカリキュラム開発－相似指導に焦点をあてて－　福井大学大学院教育学研究科修士論文

山形大学附属中学校(2013)　学習指導研究協議会要項　研究主題「対話力をみがき 実践力を高める授業のあり方　(１年次)」

國宗進，熊倉啓之，松元新一郎(2013)　図形の論証の理解とその学習指導—図形の相似に関する補助線を引く方法の意識化—　日本数学教育学会誌数学教育学論究第95巻臨時増刊

セルゲイドゥージン，ボリスチェボタレフスキー，名倉真紀，雪田修一（2000）変換群入門　シュプリンガーフェアラーク東京

啓林館(2009)　未来へひろがる数学３（中学３年用）

浪川幸彦（2008）　科学技術の智プロジェクト数理科学専門部会報告書
（http://www.jst.go.jp / csc / science4 All / minutes / download / report-suuri.pdf）
URL最終確認2013年1月31日

井ノ口順一（2007）　幾何学いろいろ距離と合同からはじめる大学幾何学入門　日本評論社　pp1-108

瀬山士郎（1990）　動機のある手紙　数学教育2月号　国土社　pp44-45

中川裕之（2010）　相似な図形の性質と平行線と線分の比の性質の関係について　論理的な思考力の育成のために　日本数学教育学会誌92　pp27-34

出口陽正（1997）　実験できる算数・数学　たのしい授業プラン集　仮説社　pp35-110

An example of a class to promote acquisition and understanding of the concept of similarity.

Hayato KUSAOKE and Kazuumi YAMAMOTO and Junichi INOGUCHI and Mitsuyuki IREI

By using the objects around us and through a problem to work out the mid-point theorem.

Keywords: similarity, copying paper, mid-point theorem, parallel lines and the ratio for the line