

PISA数学的リテラシーを育む教材開発

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2014-05-16 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 山本, 一海, 野澤, 拓人, 宮下, 奈央, 伊禮, 三之, 櫻本, 篤司, 西村, 保三 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/8271

PISA数学的リテラシーを育む教材開発

福井大学大学院教育学研究科 山本 一海
 福井大学大学院教育学研究科 野澤 拓人
 福井大学大学院教育学研究科 宮下 奈央
 福井大学教育地域科学部 伊禮 三之
 福井大学教育地域科学部 櫻本 篤司
 福井大学教育地域科学部 西村 保三

現在、OECDが行うPISA調査が教育政策に大きな影響を与えている。その中でPISA 数学調査が示すPISA数学的リテラシーは日本の数学教育に大きな影響を与えたといえる。我々、2012-2013年度福井大学大学院教育学研究科で実施している協働実践プロジェクト「数学的リテラシー」では、PISA数学的リテラシーを育む教材開発を4つの視点のもと3例行った。本稿ではPISA数学的リテラシーの概要を示し、当プロジェクトで開発した授業実践を報告し、若干の考察を行う。

キーワード：数学的リテラシー、OECD、PISA、教材開発、無限等比級数、安定結婚問題、折り鶴

0. はじめに

現在、OECD（経済協力開発機構）のDeSeCoプロジェクトの一貫として行われているPISA調査（Programme for International Students Assessment）が日本の教育政策に大きな影響を与えている。なかでも、2012年に主たる調査として行われたPISA数学調査（以下、PISA数学調査2012と略）が評価しようとする数学的リテラシー（以下、PISA数学的リテラシーと略）の枠組みとして使われている「数学化サイクル」は、小寺（2007）が指摘している「論理性・形式性を重視し現実世界との関連を二次的なものと見なしている」数学教育から「数や図形の世界を探索することや現実の問題を数学を用いて考えることなどをおして、数学の奥深さや考える楽しさを体験する」教育への転換を示したといえる。

近年、西村（2006）や西村ほか（2011）等によって、PISA数学的リテラシーを育む教材開発や、PISA数学的リテラシーにこだわらず「現実世界の問題を解決するプロセスで必要となる数学的能力群」である「プロセス能力」の育成を目標としたカリキュラム開発の基礎研究が行われているが、数学的リテラシーを育む教材開発の研究は十分とはいえない。このような問題意識の下、福井大学大学院教育学研究科で実施されている協働実践プロジェクト「数学的リテラシー」（以下、当プロジェクトと略）では、PISA数学調査2012で示されているPISA数学的リテラシーを検討し、PISA数学的リテラシーを育む教材開発と授業実践を行った。本稿では、PISA数学的リテラシー 2012の概要を示し、当プロジェクトで開発した授業を紹介して若干の考察を行う。

1. PISA 数学的リテラシー 2012

まず、PISA 調査が示す数学的リテラシーを概観する。PISA数学的リテラシーとはOECDのDeSeCo（Definition and Selection of Competencies）プロジェクトが提起するキー・コンピテンシーで示される能力の一つである。

キー・コンピテンシーとは「ある特定の文脈における複雑な要求(demands)に対し、心理社会的な前提条件(認知的側面・非認知的側面の両方を含む)の結集(mobilization)を通じてうまく対応する能力」と定義されるコンピテンシーのうち、『『個人の人生の成功』と『うまく機能する社会』に資するようなコンピテンシーであり、人生のさまざまな局面においてレリバンスをもち、すべての個人にとって重要とみなされるコンピテンシー』（松下，2010）と定義されており、〈1〉「道具を相互作用的に用いる」、〈2〉「異質な人々からなる集団で相互にかかわりあう」、〈3〉「自律的に行動する」という3つの大きなカテゴリーが選択されている。そしてPISA数学調査が評価しようとする数学的リテラシーは1Aに分類される能力の一部を測定可能なものに具体化したものである。（表1）

さて、前回主要調査であったPISA数学的リテラシー2003とは「数学が世界で果たす役割を見分け理解すること、十分な根拠にもとづいた判断を行うこと、そして、建設的で世の中のことに関心をもった思慮深い市民として生きていく上での必要にかなうようなしかたで数学を使い、数学とかわること、そうしたことができる力」（松下，2006）と定義された。では、PISA数学的リテラシー 2012で評価される能力とは何なのか。PISA数学調査2012の数学的リテラシーは次のように定義されてい

表1 OECD-DeSeCoのキー・コンピテンシー (松下, 2010)

1. 道具を相互作用的に用いる	A 言語, シンボル, テキストを相互作用的に用いる B 知識や情報を相互作用的に用いる C テクノロジーを相互作用的に用いる
2. 異質な人々からなる集団で相互にかかわりあう	A 他者とよい関係を築く B チームを組んで協同し, 仕事する C 対立を調整し, 解決する
3. 自律的に行動する	A 大きな展望の中で行動する B 人生のプランや個人的な計画を設計し実行する C 権利, 利害, 限界, ニーズを擁護し, 主張する

る (OECD, 2010)。

Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts, and tools to describe, explain, and predict phenomena. It assists individuals to recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens.

つまり, PISA数学調査2012が定義する数学的リテラシーとは, 現実の世界に存在する数学と関わりのある問題を定式化 (formulate) し, 定式化した問題を数学の事象等を用いて解決し (employ), 現実の解へと解釈し直す (interpret) 能力であり, 建設的で思慮深い市民に必要とされる判断や決定を手助けする能力といえる。

この定義からは, 従来, PISA数学調査で示されてきた大きな枠組みとさほど変化していないように思われる。しかし, PISA数学調査2012を作成する主要メンバーであるStacey (2012) が示す数学的リテラシー 2012のモデルをみると, 従来との違いが明らかである (図1)。

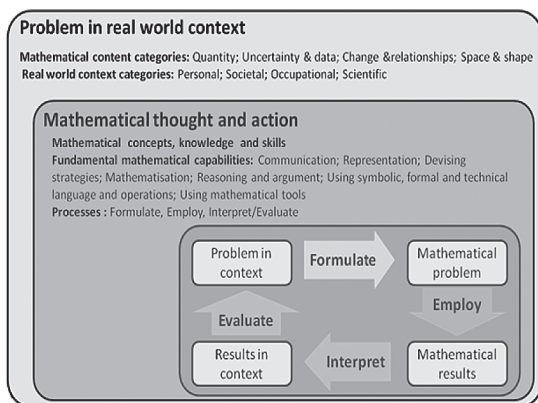


図1 PISA数学的リテラシー 2012モデル (Stacey, 2012)

従来, 清水 (2007) はPISA数学調査の問題内容について「数学は全体として, 国際比較という目的のた

め, …それほど高度の内容が含まれないものとなっている。したがって, 数学の「応用」を重視することが, 数学とその内外への応用という2分法に基づいて, 数学内 (intramathematics) の問題解決における数学的リテラシーの役割を軽視するものになりかねない」ことへの危惧, つまり, ペーパーテストという弊害によって, PISA数学的リテラシーが専門数学の解決を行う能力と乖離しているという誤解が生じる可能性があった。

しかし, このような議論に終止符をうつものが, PISA数学調査においてPISA数学的リテラシーの枠組みの中心として用いられてきた数学化サイクル (図2) のPISA数学的リテラシー 2012での位置づけであろう。

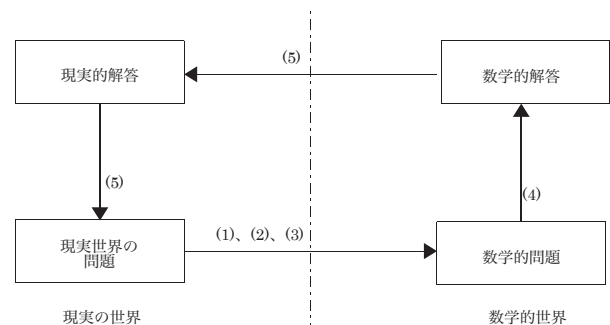


図2 数学化サイクル (国立教育政策所2004)

数学化サイクルとは, 「(1) 現実に位置づけられた問題から開始」し, 「(2) 数学的概念に即して問題を構成し, 関連する数学を特定」し「(3) 仮説の設定, 一般化, 定式化などのプロセスを通じて, 次第に現実を整理」したのち, 「(4) 数学の問題を解く」。その後, 「(5) 数学的な解答を現実の状況に照らして解釈する」過程を示したモデル (図2) であり, PISA数学的リテラシーを支えるモデルでもある。PISA数学的リテラシー 2012では, 改めて数学化サイクルで示される過程は整理されている (Stacey, 2012)。

では, PISA数学的リテラシー 2012における数学化サイクルの位置づけを見ておこう。図1で示されているように, PISA数学調査2012において数学化サイクルが適用される問題とは, 現実世界に内在する問題 (Problem in real world context) で数学的思考や行動を必要とするもの (Mathematical thought and action) すべてを含む。すなわち, これまで危惧されていた数学内の問題解決を行う能力もPISA数学的リテラシーに明記され, 数学的リテラシーは現実世界で数学を用いて解決する問題能力だけでなく, 専門の数学も解決する能力として改めて位置づけられたのである。

以上, PISA数学調査2012で示されているPISA数学的リテラシーを概観し, PISA数学的リテラシーでは専門数学の解決をも含む方略の一つとして数学化サイクルが位置づけられていることが分った。当プロジェクトでは, 従来あまり教材開発が行われてこなかった, 専門の数学

者が扱う、または研究している数学の教材化を行った。

そこで、PISA数学的リテラシーを育む教材開発を行う場合、①判断や主張をするようにする、②解決の必要性を持たせる、③現実性を大切にする、④数学的解答と現実世界の解が一致することを確認する、という4つの視点を考慮して行う。①から③は西村（2006）が数学的リテラシーを育むように題材を教材化する視点として述べている。ここで当プロジェクトが重点として置き、新たに提案したい視点として④数学的解答と現実世界の解の一致を確認する、がある。この確認をする過程を教材作成の段階で設けることで、生徒自身に授業で学ぶことだけでなく、授業全体で示される数理化サイクルという方略が正しいという「信念」が形成され、数学的リテラシーが育まれるに違いないと考える。

このような視点のもと、数学的リテラシーを育む教材開発を3例行い、高校生、大学生を対象に授業を行った。

2. 授業実践

2.1 無限等比級数の和

新学習指導要領では、数学Ⅲにおいて「(2) 極限(イ)

無限等比級数の和」を学習する。ここでは「無限等比級数の収束、発散について理解し、無限等比級数などの簡単な無限級数の和を求めること。また、それらを事象の考察に活用する」ことが目標として挙げられている。しかし、現実世界において無限等比級数が活用される現象は少なく、そのため現実世界と対応した授業実践は乏しい。そこで本実践では、現実世界に活用される無限等比級数の教材研究を行った。

教材は、週刊少年ジャンプで連載されている荒木飛呂彦作「ジョジョの奇妙な冒険第6部ストーンオーシャン」（荒木2002）と「アキレスと亀の問題」を題材として、扱う。なお、本実践で扱う「ジョジョの奇妙な冒険」の一場面を説明するには、高校数学の範疇を超える部分がある。そこで、高校数学で扱える内容に単純化して授業を構成する。

本実践は2013年1月17日、福井大学教育地域科学部理数教育コース数学教育サブコースの学生13名を対象に行った。指導案は表2の通りである。

表2 無限等比級数の和の指導案

○学習内容	・実際の生徒の反応	◎支援
○導入 ・「ジョジョの奇妙な冒険」の漫画を紹介する。	・漫画の中の「緑の赤ん坊に触れることができるか」という問題を考える。 ・触れられるかどうか分からないし、どうやって示せばよいかも分からない。	◎プリントを配る。 ◎緑の赤ん坊に触れられるかどうか予想をとる。
○発展1 ・問題を提示する。「ジョジョの奇妙な冒険」の問題を考える前に、まずは「アキレスと亀」の問題を考える。	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-bottom: 10px;"> <p>あるところにアキレスと亀がいて、2人は競走をすることになった。しかしアキレスの方が足が速いのは明らかなので亀がハンディキャップをもらって、いくらか進んだ地点（地点Aとする）からスタートすることになった。</p> <p>スタート後、アキレスが地点Aに達した時には、亀はアキレスがそこに達するまでの時間分だけ先に進んでいる（地点B）。アキレスが今度は地点Bに達したときには、亀はまたその時間分だけ先へ進む（地点C）。同様にアキレスが地点Cの時には、亀はさらにその先にいることになる。これはいくらかでも続けることができ、結果、いつまでたってもアキレスは亀に追いつけない。</p> <p>この考えは正しいだろうか？</p> </div> <div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> </div>	
・何を求めればいいのか考える。	・アキレスと亀の進む速さ、地点Aの場所が分かればよい。 ・グラフの交点を求める。 ・アキレスと亀の距離が0になる地点を求める。	◎ワークシートを配る。 ◎この問題の主張が正しいかどうか予想をとる。 ◎どんな条件が必要か、何を求めればいいのか確認する。

<ul style="list-style-type: none"> ・ 数学的に考える。 ・ 他の方法でも考えてみる。 ・ 問題のどこが間違っているかを示す。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ アキレスが亀に追いつくまでの時間を求める。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> アキレスと亀の進む速度, 地点Aの位置を文字を使って表現する ①アキレスは10m/sで進む ②亀は1m/sで進む ③地点Aはスタート地点から50m前方 </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ アキレスが亀に追いつくまでの時間の合計が初項5, 公比1/10の無限等比級数になっている。 ・ 公比が1より小さいので無限等比級数の和が収束する。よってアキレスは亀に追いつく。 ・ y軸を距離, x軸を時間としてグラフを描いてみると, アキレスが亀に追いつくことがすぐに分かる。 ・ グラフの交点での時間と無限等比級数の和が同じ値になっている。 ・ 操作は無限にできても, 時間は有限であることが無限等比級数の和を求めることで分かる。 ・ 追いつくのは分かるが, やはり問題文のどこが誤りであるかが分からない。 	<ul style="list-style-type: none"> ◎条件に沿って考えるように指導する。グラフなど, 他の方法で考えている生徒がいれば, まずはワークシートに沿って考え, 2つの考え方を比較してみるように促す。 ◎他の考え方をしていた生徒に発表してもらう。 ◎グラフと無限等比級数との関係を示しておく。 ◎教師が一つの考え方を述べる。 ◎納得できない生徒も多いと思うので, もっと知りたい人は自分で調べて考えてみようを促す。
<ul style="list-style-type: none"> ○発展2 ・ 問題を提示する。「アキレスと亀」の問題を踏まえて, 「ジョジョの奇妙な冒険」の問題を改めて考える。 ・ 条件を加えて考える。 ・ グラフに表す。 	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> 緑の赤ん坊は特殊能力をもっている。それは赤ん坊に1/2近づくと身長が1/2になる能力らしい。だが身長が1/2になると赤ん坊までの距離は2倍に思えるはずだ。緑の赤ん坊に触れることはできるのだろうか? </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <ul style="list-style-type: none"> ・ 赤ん坊との距離が100mのところ(地点A)から身長が縮み始めるとする。 ・ 漫画の中では, 連続的に身長が縮むが, 考えやすいように地点Aから距離が1/2になるとその時に身長は1/2になることとする。 ・ 近づく時の速度は2m/sとする。ただし身長が1/2になると, 近づく速度も1/2となる。 ・ 赤ん坊は動かないこととする。 </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ アキレスと亀と似たような問題だが, 今回は何を求めればいいのか分からない。 ・ 先の問題では追いつくまでの時間を求めたので, 今回も同じように考える。 ・ 触れるまでの時間の合計が初項10, 公比1の無限等比級数となっている。 ・ 公比が1なので, 無限等比級数の和が発散する。よって触れることはできない。 ・ y軸を距離, x軸を時間としてグラフを描くと, 指数関数のようになる。 	<ul style="list-style-type: none"> ◎ワークシートを配る。 ◎追いつけるかどうか予想をとる。 ◎図を描いて問題を整理する。 ◎分からない生徒には, 「アキレスと亀」の問題の解法を参考にするように助言する。 ◎早く終わった生徒には, アキレスと亀の問題のようにグラフを描くとどうなるかを考えるように促す。 ◎実際に黒板で描く
<ul style="list-style-type: none"> ○発展3 ・ 条件を加えないとどうなるか考える。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 無限等比級数の和では考えられないからどうすればいいか分からない。 ・ さっき描いたグラフが指数関数と似ていた理由が分かる。 	<ul style="list-style-type: none"> ◎プリントを配る。 ◎微分方程式の問題となってしまうので, お話程度で扱う。

第1時は本時で扱う漫画を提示し(図3)、問題提示を行った。

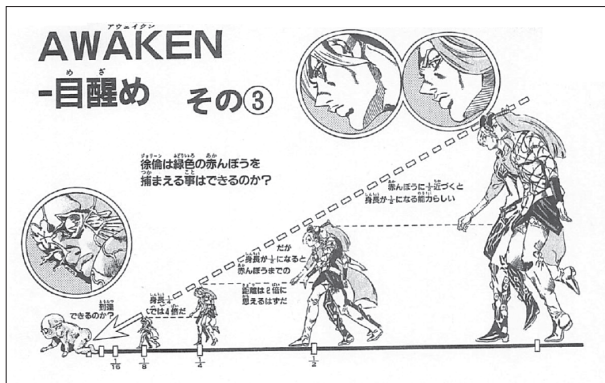


図3 「ジョジョの奇妙な冒険」の一場面

この問題を解決する前に類似問題として「アキレスと亀の問題」を提示する(図4)。

あるところにアキレスと亀がいて、2人は競走をすることになった。しかしアキレスの方が足が速いのは明らかなので亀がハンディキャップをもらって、いくらか進んだ地点(地点Aとする)からスタートすることになった。

スタート後、アキレスが地点Aに達した時には、亀はアキレスがそこに達するまでの時間分だけ先に進んでいる(地点B)。アキレスが今度は地点Bに達したときには、亀はまたその時間分だけ先へ進む(地点C)。同様にアキレスが地点Cの時には、亀はさらにその先にいることになる。これはいくらでも続けることができ、結果、いつまでたってもアキレスは亀に追いつけない。この考えは正しいだろうか?

図4 アキレスと亀の問題

そこで、図4のような問題の主張は正しいと思うか質問を行ったところ、結果は以下の通りであった。

- ・ 追いつける 10人
- 理由：一次関数のグラフの交点を求める問題であり、(速度としてあらわされる)傾きが異なるためいつか追いつく
- ・ 追いつけない 3人
- 理由：縮まっていく距離はどんどん1/2倍になっていくだけで、0にはならないから追いつかない

次に、問題を解決するためにどのような条件が必要かを考えさせると、アキレスと亀の速さや地点Aの場所、アキレスと亀の距離という意見が出てきた。

本授業では、追いつくまでの時間を焦点に授業を進めるため、以下のような条件を提示して進めていった(図5)。

アキレスと亀の進む速度、地点Aの位置を文字を使って表現する

- ①アキレスは10m/sで進む
- ②亀は1m/sで進む
- ③地点Aはスタート地点から50m前方

図5 アキレスと亀の問題の条件

アキレスがA地点に行くまでにかかる時間は

$$50\text{m} \div 10\text{m/s} = 5\text{s}$$

同様にA地点からB地点、B地点からC地点までにかかる時間はそれぞれ

$$5\text{m} \div 10\text{m/s} = 0.5\text{s}$$

$$0.5\text{m} \div 10\text{m/s} = 0.05\text{s}$$

となり、アキレスが亀に追いつくまでの時間 T_1 は

$$T_1 = 5 + 0.5 + 0.05 \dots$$

と表され、初項5、公比0.1の無限等比級数の和となる。ゆえに、公比が1より小さいため、アキレスが亀に追いつくまでの時間 T_1 は収束することを確認し、アキレスは亀に追いつき、図で示した問題は50/9sを超えない時間では追いつかないが、50/9sのときに追いつくため、この問題は間違っていると導いた。その後、xを時間、yをアキレスと亀の距離とするx-yグラフを示して確認した。

後半では、再度図3の問題を確認し、主人公が緑の赤ん坊に触れられるか予想した。予想した結果は以下の通りである。

- 触れられる 3人
- 触れられない 9人
- 分からない 1人

ここでアキレスと亀の問題同様、条件を新たに付け加えた問題(図6)を提示した。

- ・ 赤ん坊との距離が100mのところ(地点A)から身長が縮み始めるとする。
- ・ 漫画の中では、連続的に身長が縮むが、考えやすいように地点Aから距離が1/2になるとその時に身長は1/2になることとする。
- ・ 近づく時の速度は2m/sとする。ただし身長が1/2になると、近づく速度も1/2。
- ・ 赤ん坊は動かないこととする。

図6 「ジョジョの奇妙な冒険」に条件を付け加えた問題

アキレスと亀の問題同様、緑の赤ん坊に追いつく時間 T_2 を考えると、A地点から緑の赤ん坊から50m地点(B地点)に行くまでにかかる時間は

$$50\text{m} \div 2\text{m/s} = 25\text{s}$$

次に、B地点から緑の赤ん坊から(C地点)に行くまでにかかる時間は

$$25\text{m} \div 1\text{m/s} = 25\text{s}$$

よって、緑の追いつく時間 T_2 は

$$T_2 = 25 + 25 + \dots$$

と表され, 求める時間 T_2 は, 初項25, 公比1 の無限等比級数の和となる。ゆえに, T_2 は発散し, 緑の赤ん坊に触れることはできないことを示した。ここで前半と同様に緑の赤ん坊と時間に関する $x-y$ グラフを書き, 追いつけないことを確認した。なお, 図4で示された問題は微分方程式を使って説明することもできる。本授業では, 大学生を対象に行ったため, 微分方程式を用いて緑の赤ん坊に触れられないことまで確認して授業のまとめとした。

2.2 安定結婚問題

新学習指導要領では, 数学A「ア(イ) 順列・組合せ」を学習する。ここでは, 「具体的な事象の考察を通して順列及び組合せの意味について理解し, それらの総数を求める」ことが目標として挙げられている。しかし, 現実世界では組合せの総数を求めるだけでなく, 求めた総数の中から, 最適な組合せを最適な解としなければならない。

その中で2つのグループのメンバー同士をパートナーとしてマッチさせる問題として安定結婚問題がある。この分野の成果は理論面だけでなく, 日本の臨床研修医マッチング制度や, アメリカのニューヨーク市やボストン市の公立学校選択制など現実世界で利用されており(久保ほか2002), 2012年, 「安定配分の理論とマーケットデザインの実践に関する功績」が評価され, A.ロスとR.シャープレーはノーベル経済学賞を受賞している。

この安定結婚問題における組合せでは, 「ダブル不倫(ブロッキング・ペア)」と呼ばれる組合せを許さないことである。たとえば, 図7のような問題が提示され, 表3のような順位が決められていたとする。

お見合いパーティーの途中で, 参加者の異性に対して順位をつけるアンケートを取りました。結果は表のとおりです。この結果をふまえて, 主催者側はカップルを作りたいと思っています。このとき, 3組のカップルを作る方法はどのようになるでしょうか?

図7 本授業で扱う安定結婚問題

表3 参加者の異性に対する順位表

	1位	2位	3位		1位	2位	3位
平次	歩美	ラン	園子	歩美	快斗	平次	元太
快斗	園子	ラン	歩美	ラン	元太	平次	快斗
元太	歩美	園子	ラン	園子	平次	元太	快斗

このとき, (平次, 歩美)(快斗, 園子)(元太, ラン)という組合せAを考える。表3をもとに元太と園子の異性に対する順位を確認すると, 元太はランより園子, 園子は快斗より元太の順位が上である。つまり, Aの組合せでは, 元太と園子が二人揃って逸脱することで状況が改善, すなわち, 元太と園子がカップルになることで, 参加者にとってAより良い組合せが示されてしまう。このような状態が「ダブル不倫」という状態である。

このような状態を防ぐ組合せを見つけるために用いられている方法が, 本授業で紹介する「ゲール・シャープレーアルゴリズム(以下GSアルゴリズムと略)」と呼ばれるものである。このアルゴリズムを使うことにより, 「一般に複数存在しうる安定結婚問題の解の一つは, GSアルゴリズムによって導かれる」ことがわかっている(伊藤・宇野2010, 安田2013など参照)。

現在, 初等・中等教育においてGSアルゴリズムを用いた安定結婚問題の教材開発は行われていない。そこで本授業では, 現実世界の問題である婚活を題材とし, GSアルゴリズムを用いた安定結婚問題の教材開発を行った。

本実践は2013年3月14日, 福井県立藤島高等学校1年9組の生徒30名を対象に行った。指導案は表4の通りである。第1時は図8の問題を提示し, 組合せの総数を考えることから始めた。

男3人(平次さん, 快斗さん, 元太さん)女3人(歩美さん, ランさん, 園子さん)の計6人でお見合いパーティーに参加しました。このとき, 3組のカップルを作る分け方は何通りあるでしょうか?

図8 導入問題

この問題を解いた後, 図7に示した問題を提示し, グループで「ダブル不倫」が起こらない適切な組合せを求める作業を行った。図7, 表3で示される問題の適切な組合せは3通りであり, 第1時の後半と第2時前半で行った活動では, クラス全体で3組のカップルの組合せ(表5)をみつけることができた。

ここで, 第2時後半では組合せの一つを見つける方法としてGSアルゴリズムを紹介した。当初, 男性側提案のGSアルゴリズムを用いたカップルの組合せ(平次, 歩美)(快斗, ラン)(元太, 園子)のみを示したが, 生徒から女性提案のGSアルゴリズムではどうなるのかと疑問がでてきた。そこで, 女性側提案のGSアルゴリズムを行い(平次, 園子)(快斗, 歩美)(元太, ラン)の適切な組合せになることを確かめ(図9), 本授業のまとめとして安定結婚問題の経緯を紹介した。

表4 安定結婚問題指導案

○学習内容	・実際の生徒の反応	◎支援
<p>導入</p> <p>○問題を提示する。</p> <p>○立式し、答えを求める。</p>	<p>・C使う？ P使う？</p> <p>・36通り $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$</p> <p>・6通り $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$</p> <p>・しらみつぶし</p> <p>① (平次, 歩美), (快斗, 園子), (元太, ラン)</p> <p>② (平次, 歩美), (快斗, ラン), (元太, 園子)</p> <p>③ (平次, 園子), (快斗, 歩美), (元太, ラン)</p> <p>④ (平次, 園子), (快斗, ラン), (元太, 歩美)</p> <p>⑤ (平次, ラン), (快斗, 歩美), (元太, 園子)</p> <p>⑥ (平次, ラン), (快斗, 園子), (元太, 歩美)</p>	<p>◎ワークシート配布</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>男3人 (平次さん, 快斗さん, 元太さん), 女3人 (歩美さん, ランさん, 園子さん) の計6人でお見合いパーティーに参加しました。 このとき, 3組のカップルを作る分け方は何通りあるでしょうか？</p> </div>
<p>発展</p> <p>○カップルを組むときの条件を考える。(グループ活動)</p> <p>○不安定ペアの例を提示し, マッチングの定義を教える</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>お見合いパーティーの途中で, 参加者の異性に対して順位をつけるアンケートをとりました。結果は表のとおりです。 この結果をふまえて, 主催者側はカップルを作りたいと思っています。このとき, 3組のカップルを作る分け方はどのようになるでしょうか？</p> </div> <p>・好きなもの同士で組んでみる？</p> <p>・さっきの問題を使って何かできない？</p> <p>・順位足してみても一番少ないやつは？それが一番いい組合せなんじゃない？</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>(平次, 歩美), (快斗, 園子), (元太, ラン) の分け方になったとしましょう。表を見てみましょう。元太さんはカップルとなったランさんよりも園子さんのほうが好みで, 園子さんはカップルとなった快斗さんよりも元太さんのほうが好みます。これでは, 元太さんと園子さんがお互いに好きなのでそれぞれのカップルを解消してしまうことになってしまいます。このように, カップルとなっていない男Xさん女Aさんがそれぞれの相手よりもAさんまたはXさんの方が好みというような状況が起きないようにカップルを作らないといけません。</p> </div>	<p>◎グループを作る</p> <p>◎間違っても, 答えを導いたら答えを発表。</p> <p>◎ダブル不倫 (不安定ペア) が起きないようにしなければならぬことを伝える。</p>
<p>○安定結婚問題を解く。</p> <p>○どのように考えたか発表する。</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>ダブル不倫が起きないように3組のカップルを作る分け方はどのようになるでしょうか？</p> </div> <p>・仮に, 男性側がみんな自分の一番好きな人とカップルになったらどうなるかな。</p> <p>・しらみつぶしに全ての組合せを考えて, ダブル不倫が出ないようにペアを探したらこの3つだった。</p> <p style="margin-left: 20px;"> { ① (平次, 歩美), (快斗, ラン), (元太, 園子) ② (平次, ラン), (快斗, 歩美), (元太, 園子) ③ (平次, 園子), (快斗, 歩美), (元太, ラン) </p> <p>・男子が選んだ順位の和が一番少ないやつを求めてみたけど, ダメだったから二番目のやつを見てみたら大丈夫だった。</p> <p>× (平次, ラン), (快斗, 園子), (元太, 歩美)</p> <p>○ (平次, 歩美), (快斗, ラン), (元太, 園子)</p>	<p>◎組合せが何通りできるかも考えてみるよう伝えた。</p> <p>◎答えが分からなくても, 途中までわかったこと, 気がついたことがあれば発表してもらおう。</p>

○Gale-Shapleyアルゴリズムを紹介する。 まとめ ○おわりに	・男性側がみんな自分の一番好きな人とカップルになるように考えたけど、平次さんと元太さんはどちらも歩美さんを1位に指名しているから、どうしたらいいかわからなかった。 ・逆に、女性側から考えたら大丈夫だった。 ・ダブル不倫が起きないように考えるのはめんどろ…。 ・もっと楽に探せたらいいのに。	
	安定結婚問題を解くのに便利なアルゴリズムがあります。このアルゴリズムを実行すると、必ず1つは組合せが見つかることが証明されています。	◎ワークシート配布
	・誰からやっても同じ結果だ！ ・楽！便利！ ・女の子からやってみたらどうなるかな。 ・1つはわかったけど、他のはどうやって見つける？ ・男→女→男→女→…の順でやったらどうなる？	◎授業者が最初の希望リストをもとに黒板にてアルゴリズムを実行する。
	ロイド・シャプレー氏と、デビット・ゲール氏が安定結婚問題を考えました。シャプレー氏はアルゴリズム開発等の功績で2012年ノーベル経済学賞を受賞しています。また、同じくして受賞したアルビン・ロス氏は安定結婚問題の理論を応用して、臓器移植での提供者と患者の組合せや、医学実習生と研修先の病院の組合せの仕組みを考えました。	◎プリント配布

表5 表3で示した安定結婚問題で考えられる組合せ

(平次, ラン), (快斗, 歩美), (元太, 園子)
 (平次, 歩美), (快斗, ラン), (元太, 園子)
 (平次, 園子), (快斗, 歩美), (元太, ラン)



図9 GSアルゴリズムを行っている場面

2.3 折り鶴の数学

学校教育における折り鶴の授業実践には堀井（1977）や伊禮（2005）の先行実践などが存在する。しかし、これらの先行実践では、「折り鶴が折れる」とはどのようなことが数学的には曖昧であり、問題も数学的に定式化されていない。そこで本授業では「折り鶴の基本形」を図10で厳密に定義し、とし変形折り鶴の教材開発を行った。

なお、変形折り鶴の数学は伏見、前川、J.ジュスタン、川崎らによって研究され、本授業の変形鶴よりも一般の

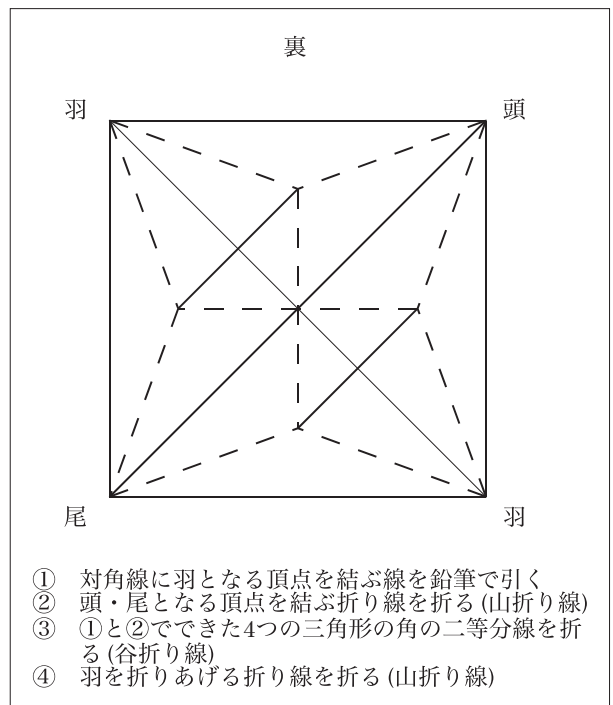


図10 本授業でとりあげる折り鶴の基本形

変形鶴が考察されている（川崎1998, 2005 など参照）。しかし、本授業では簡単のために四角形の対角線の交点に折り鶴の中心をとる特殊な変形鶴を扱うことにした。

ここで、本実践で「折り鶴を折る」ことは、基本形に必要な折り線をつけて折り線通り折りたたむことを指す

(図11)。

もし仮に基本形の折り線をつけたが折り線通り折りたためない、もしくは余分な折り線がついた場合、基本形は折りたためない、と考える。

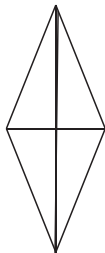


図11 折りたたまれた基本形

この考え方をういて正方形以外の紙で折り鶴を折り、折れない四角形と折れない四角形を分類し、折り鶴が折れる条件を発見させる。なお、本実践の基本形を折りたたむことができる図形は補助線として用いられる図10の①の直線が線対称の軸となるたこ形に限る。

本実践は、2013年6月26日、福井県立藤島高等学校第2学年研究Sの生徒13名を対象に行った。指導案は表5の通りである。

第1時の前半は折り鶴を、日本に古くから伝わる折り方で折ることから始めた(図12)。全員が折り終わったあと、折り鶴を広げて紙にできた折り線を調べる作業を行った。鶴を折るために必要な折り線がどれかを考察して、後半では図10に示した「鶴の基本形」を提示した。



図12 折り線をつけ基本形を折りたたむ場面

第2時では、はじめに正方形以外の四角形でも図10の折り鶴を折れるかどうか予想した。

ひし形、たこ形、長方形、等脚台形を示し、どの紙なら折り鶴を折ることができるのか生徒に予想させ、実際に折らせてみて検証を行った。なお、生徒の予想と折り鶴を折ることか可能かどうかは表6の通りである。この検証の後、それぞれの紙に残っている基本形の折り線を分析し、折り鶴を折ることができる紙の条件とは何かを考えさせた(図12)。生徒が発見した「折り鶴基本形が折れる条件」は、補助線として引いた直線と④で折った折り線が直交することである。だが、それがたこ形に限ることを発見した生徒はいなかった。本授業では以上のような活動を通して、生徒自身からこの条件にたどりつくことができた。なお、本授業では数学の厳密な証明は行わず、帰納的に折り鶴を折ることができる四角形の条件を求めて授業のまとめとした。

表6 折り鶴の数学的指導案

過程	時配	○学習内容と活動	・教師の支援
導入	5分	○今日のテーマを知る	・折り鶴をみせ、本授業のテーマを伝える
展開	5分	折り鶴を数学の目で見よう	
		○正方形の紙で折り鶴を折る ・折れた ・折れない ・ここからどうするんだっけ	・折り図を渡す ・折り紙ができる生徒とできない生徒を洗い出す ・ここでは折れなくても大丈夫なことを伝える
	15分	正方形以外の紙で折り鶴は折れるのだろうか	
	20分	○折り鶴の基本形を知る ○基本形を折り、紙を広げてついている折り線を調べる ・二等分線がある ○基本形を折りたたむ ・折れた ・折れない	・基本形を提示 ・基本形が折れない生徒を支援 (T2) ・事前に基本形の折り線(基本線)をつけた紙を提示 ・ワークシート配布 ・班にさせる ・提示した基本線通り折りたためない生徒を支援 (T2)
	5分	○まとめ 基本線通り折りたたむことで基本形を折ることができる。	・基本形の折り線と次時の活動を説明

	時配	○学習内容と活動	支援
発展	30分	○折ることができる四角形を予想する。 ・長方形は折りたためない	・予想をきき, 表にまとめる
	15分	○様々な四角形を折りたたむ ・長方形は折れない ・どうして折れないのかな ・折れた ・ある形は折れてある形は折れない ○折りたためた図形と折りたためない図形を分類 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">折れる四角形と折れない四角形の違いは何だろうか</div> ・わからない ・折り線が違う ○基本形が折れる四角形と折れない四角形の違いを知る ・補助線と折り線が直角になっている	・無理矢理折りたたまないよう注意を促す ・折りたたむ紙の種類を説明(たこ形, ひし形, 長方形, 等脚台形) ・考えた折り線通り折りたためない生徒の支援 ・用意した折り図を黒板に張り, 折りたためたか確認 ・黒板で折れたか折れないかで分類

表7 生徒の予想と折りたたんだ結果

図形の種類と折り線		生徒の予想		結果
		折れる	折れない	
ひし形1		12人	1人	○
ひし形2		12人	1人	○
たこ形1		7人	6人	○
たこ形2		7人	6人	×
長方形		7人	6人	×
等脚台形		2人	11人	×

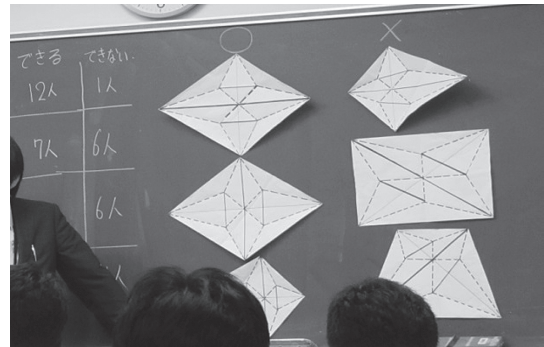


図12 折り線を見ながら条件を模索している場面

れの授業分析を行う。

無限等比級数の和を扱った授業では「導入として漫画を扱っていたので, 興味をもつことができた」という感想があり, 漫画を用いたことで, 「②解決の必要性をもたせる」, 「③現実性を大切にする」の視点である, 無限等比級数の和という数学の問題を現実の問題として素直に扱うことができ, 大学生に問題を解く必然性を与えることができたのではないかと考えられる。しかし, 授業では「生徒からの意見がうまく取り入れられてなかった」という指摘があったことから, 「①判断・主張をするようにする」という点が足りなかったと考える。

次に, 安定結婚問題を扱った授業では「Gale-Shapley アルゴリズムをしらなかった状態でしらみつぶしや点数などでカップルを作ろうとするとややこしくて少し難しかった。でも, Gale-Shapley アルゴリズムを使えば簡単に正確に求めることができてすごかった。この方法を考えた2人はすごいと思った。」という感想があり, 「①判断・主張をするようにする」点が達成され, 「②解決の必要性をもたせる」ことができたと考えられる。

一方で多くの生徒が「(GS) アルゴリズムの方法を知っ

3. 考察

本稿では, PISA 数学的リテラシー 2012を示し, 数学的リテラシーを育む教材開発を4つの視点をもとに教材開発を行った。ここでは, 生徒の感想をもとに, それぞ

た時はすごい簡単だと驚いた」「あんなにがんばって探したのに、こんなに簡単に見つけられることに驚いた」など、教材として取り上げたGS アルゴリズムの有用性に気づくことができた。これは「④数学的解答と現実世界の解が一致することを確認する」の視点である、グループ活動で見つけた組合せとGS アルゴリズムで求めた解が一致したことによるものと考えられる。

最後に折り鶴の数学を扱った授業では、「小さい頃から色々な折り鶴を折ってきたけど、それを図形的に考えることで、様々な形の紙から折り鶴を折ることができる」と学び面白かった。という感想があり、折り鶴を折るという操作を行うことで、生徒一人ひとりに「①判断・主張をするようにする」機会を設け、「④数学的解答と現実世界の解が一致することを確認する」ことで、「②解決の必要性」を生徒たちに感じさせることができたと考えられる。また、「基本線を折り、そこから基本形が折りたためる条件というものがわかったので、他の紙で折ってみるとどのような鶴ができるか確かめてみたいと思った。」という感想から、本時の授業で行った数学化サイクルという方略の有用性を感じることができたのではないかと考えられる。

4. おわりに

本稿ではPISA数学的リテラシー 2012の枠組みを示し、数学的リテラシーを育む教材開発を西村（2006）が提案したものに加えた4つの視点をもとに教材開発、授業実践を行った。本実践では数学を専攻している大学生や学校設定科目として数学を研究しているような数学の能力が高く信念が形成されていると思われるグループと、通常クラスのようにまだ数学の能力や信念形成が不十分なグループにわけることができると考えられる。この2つのグループで数学的リテラシーの形成の度合いや信念形成に差、つまり、数学の能力が高く、信念形成が十分なグループの方が、能力や信念形成が不十分なグループに比べ数学的リテラシーが育まれたと考えられる。しかし、これらの関係性を評価する心理学的な調査を行っていないため、実証はできていない。特に数学の信念形成と数学的リテラシーが育まれる関係性については、今後の研究の課題としたい。最後に数学的リテラシーを育む教材開発の課題を述べる。

まず、このような授業を学校教育のカリキュラムにどのように位置づけるのか、または、どうやって時間数を確保するのかといったカリキュラム開発の問題がある。このような実践をトピックスとして取り上げても数学的リテラシーを育むことは難しい。そのため、数学的リテラシーを育む継続的な実践を行う必要がある。

また、PISA数学的リテラシーの測定・評価法の開発が喫緊の課題であろう。本稿で示した事例では生徒に数学的リテラシーが育まれたかという点を評価することは難しい。数学的リテラシーを育むカリキュラムを作成す

るためには、測定・評価のキジュン、方法が必要となる。そのため、西村ほか（2011）などの基礎研究や多くの実践報告をもと、測定・評価法、カリキュラム開発を行うことが求められるだろう。

註) なお、これは科学教育研究費補助金N.23501034を受けて行われた。

引用・参考文献

- 小寺隆幸（2007）「市民のリテラシーとしての数学」、小寺隆幸、清水美憲編著『世界をひらく数学的リテラシー』明石書店
- 西村圭一（2006）「数学的リテラシーを育成するための教材開発—PISA 数学調査をふまえて—」、日本数学教育学会誌第88巻第5号、pp.26-32
- 西村圭一、山口武志、清水宏幸、本田千春（2011）「数学教育におけるプロセス能力育成のための教材と評価に関する研究：イギリス「ボールド数学（Bowland Maths）」の考察」、日本数学教育学会誌 93 巻第9 号、pp.2-12
- ドミニク・S・ライチェン（2006）「キー・コンピテンシー—人生の重要な課題に対応する」、ドミニク・S・ライチェン、ローラ・H・サルガニク編著、立田慶裕監訳『キー・コンピテンシー 国際標準の学力をめざして』明石書店、pp.85-125
- 松下佳代（2010）「〈新しい能力〉概念と教育—その背景と系譜」、松下佳代編著「〈新しい能力〉は教育を変えるか—学力・リテラシー・コンピテンシー—」ミネルヴァ書房
- 松下佳代（2006）「評価の枠組み（特集 世界から見た日本の数学教育）」、『数学教室』2月号（No.651）、国土社
- Kaye Stacey（2012）THE INTERNATIONAL ASSESSMENT OF MATHEMATICAL LITERACY: PISA 2012 FRAMEWORK AND ITEMS, http://www.icme12.org/upload/submission/2001_F.pdf
- OECD（2010）PISA 2012 MATHEMATICS FRAMEWORK, <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf>
- 国立教育政策所（2004）「PISA 2003 調査 評価の枠組：OECD生徒の学習到達度調査」ぎょうせい
- 清水美憲（2007）「数学的リテラシー論が提起する数学教育の新しい展望」、小寺隆幸、清水美憲編著「世界をひらく数学的リテラシー」明石書店
- 文部科学省（2009）「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」実教出版株式会社
- 荒木飛呂彦（2002）「ジョジョの奇妙な冒険PART 6 ストーンオーシャン」10（73）巻、集英社、p.109

伊藤大雄, 宇野裕之 (2010) 「離散数学のすすめ」現代
数学社
久保幹雄, 田村明久, 松井知則 (2002) 「応用数理計画
ハンドブック」朝倉書店
安田洋祐 (2013) 「マッチングの数理」数学セミナー
2013年4月号 pp40-45 日本評論社
堀井洋子 (1977) 「数学への招待「折り鶴」の授業の実際」,
遠山啓序, 堀井洋子著 『折り紙と数学』 明治図書,
pp.157-163

伊禮三之 (2005) 「数学への招待-折り鶴-「折り鶴」
の絵本を作ろう- (連載「楽しい数学」の1年②)」『数
学教室』 5月号 (No.642), 国土社
川崎敏和 (1998) 「バラと折り紙と数学と」 森北出版株
式会社
川崎敏和 (2005) 「折り鶴の数学」, Thomas Hull 編著,
川崎敏和監訳 『折り紙の数理と科学』 森北出版株式
会社, pp.59-70

Development of Teaching Materials for Expanding Student's PISA Mathematical Literacy.

Kazuumi YAMAMOTO, Takuto NOZAWA, Nao MIYASHITA, Mitsuyuki IREI, Atsushi SAKURAMOTO, Yasuzo NISHIMURA

Key words : Mathematical Literacy, OECD, PISA, Development of Teaching Materials, Infinit Geometric Series, Stable marriage problem, Orizuru

Currently PISA Mathematical Literacy has impacted on mathematics education in Japan. We developed three teaching materials for expanding students PISA Mathematical Literacy from four standpoints. In this paper, we provides an overview of the PISA Mathematical Literacy 2012 and three classroom practice for expanding students PISA mathematical Literacy.