ハノイの塔とニムを題材にした授業実践：共通教育科目「ゲームとパズルの数学」の実践より

福井大学教育実践研究　2013，第38号，pp.111－119

実践報告・資料

ハノイの塔とニムを題材にした授業実践
― 共通教育科目「ゲームとパズルの数学」の実践より ―

福井大学教育地域科学部　西　村　保　三

筆者は，平成23年度より福井大学において共通教育科目「ゲームとパズルの数学」を開講している。この授業では，ゲームやパズルを題材にして，そこに現れる数理を解明し，実生活における数学の有用性を示すとともに，数学の楽しさや面白さを伝えることを目標にしている。扱う数学の内容は，大学生が教養として学ぶ水準を保ち，なおかつ全15講がなるべく体系的なカリキュラムになるよう構成した。本稿ではこの授業の中から，ハノイの塔とニムを題材にした授業実践（第2～5講）について報告する。

キーワード：数学教育，ゲーム，パズル，2進数，ハノイの塔，ニム

1．はじめに

高等学校学習指導要領における数学の目標は，“数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基いて判断する態度を育てる”とある。特に，新学習指導要領で新たに設置された「数学活用」では，“数学と人間のかかわりや数学の社会的有用性についての認識を深めるとともに，事象を数理的に考察する能力を養い，数学を積極的に活用する態度を育てる”ことを目標として掲げている。しかし,実際の学校現場における数学の授業では,“事象を数学的に考察”して“数学のよさを認識し，それらを積極的に活用する”といった局面は極めて少ないと言われている。実際この趣旨で設置された新科目「数学活用」も，選択科目の位置づけであり，高校生の履修率は極めて低い。そのため，多くの生徒にとって，数学の目的は，受験問題を解くことが中心という，本来の目的から外れたものになってしまっている。

そこで，“事象を数学的に考察して数学のよさを認識し，それらを活用する”という数学本来の目的に沿った授業を，大学入学後の早い時期に経験して，数学学習に対する意識を転換することが望ましいと考えた。「数学活用」のテーマの1つに「遊びの中の数学」として，“数理的なゲームやパズルなどを通して論理的に考えることのよさを認識し，数学と文化とのかかわりについて理解すること”が挙げられている。このことを念頭において，「ゲームとパズルの数学」をテーマとした授業を，大学の共通教育科目として，平成23年度より開講した。

2．ゲームとパズルの数学

本授業のカリキュラムの内容は表1の通りである。初年度は，実験的に教材化した題材が多く，時間の関係で準備した内容を十分授業で取り上げることができなかったところがあった。そこで次年度は基本的には同じ内容を踏襲したが，内容を精選して，細かい部分を修正した。内容はなるべく体系的なカリキュラムになることを意識しており，前半は2進数によるパズルとゲームの解析から，完全情報2人ゲームの理論に一般化して，チェスの数理を取り上げた。

表１：「ゲームとパズルの数学」の内容

回	テーマ	内容
1	ガイダンス	数理パズル
2	数当てマジック	2進数
3	ハノイの塔	2進数によるパズルの解析
4	ニム	2進数によるゲームの解析
5	2人組合せゲーム	グランディー数
6	三目並べ	完全情報2人ゼロ和ゲーム
7	チェス	チェス戦略における数学
8	8人の女王問題	チェス・パズルの解析
9	ダイス・ゲーム	確率・期待値
10	ブラックジャック	カードゲームの戦略
11	密輸ゲーム	最適戦略，ゲーム理論
12	カード・シャッフル	素数・フェルマーの小定理
13	あみだくじ	置換
14	15パズル	群論
15	ルービック・キューブ	群論の応用
16	期末試験	

中盤は,ダイスやギャンブルの数理から確率論を扱い,不完全情報ゲームの戦略から線形計画法に基づく，ゲーム理論をテーマとした。後半は，カードのシャッフルを題材に，配列を変換するパズルなどを取り上げ，素数の性質から群論へと発展させた。初年度は確率分野で正規分布や大数の法則などを盛り込み，もう1コマ使っていたが，第15講のルービック・キューブを1回の講義で扱うのは少し無理があったので，平成24年度は15パズル

とルービック・キューブで2コマの構成とし，確率分野を少し削減した。

テキストは様々な題材を参考に作成したオリジナルのプリントを配布した。毎回コミュニケーション・ペーパーに演習課題や感想を提出させ，途中に4回のレポートを課した。最後に期末試験を行って，これまでのレポート提出状況や，出席を含めた授業に対する積極性などと合わせて総合的に成績を評価した。

なおこの授業の履修者はH23・24年度とも50名で，工学部の学生が多いが，教育地域科学部の文系コースの学生も含まれている。生涯学習市民開放プログラムとしても開放されており，H23年度に開放プログラム生として社会人が1名受講していた。

3．授業実践

本稿では，全15回の講義のうち，前半の2進数を用いたパズルとゲームの解析の授業実践を紹介する。ここで取り上げた主なパズルとゲームは，ハノイの塔とニムである。これらは数学遊戯の世界では昔から非常に有名で（Kraitchik 1942など），これらを題材にした数学の授業実践は従来からよく行われており，高校数学の「数学基礎」（旧課程科目：現3年生まで）や「数学活用」（新課程科目：現2年生以降）の教科書（長岡他 2002，根上他 2012）でも扱われている。これらの事情から，ゲームとパズルを題材とした数学においては，ハノイの塔とニムは最低限取り上げるべき，必修的な項目だと考え，この授業でも最初に取り上げることにした。

3.1 数当てカードと2進数（第2講）

初めに2進数の導入のため，図1に示す古典的な数字当てカードによる誕生日当てマジックを演じた。学生に5枚のカードを渡して，その中に自分の生まれた日付のあるカードだけを返してもらい，即座に相手の誕生日を当てる。答えは，相手が返したカードの最初の数字（左上の1, 2, 4, 8, 16）の合計で求まる。例えば，2・3・5枚目のカードを学生が返して来たら，2＋4＋16＝22よりその学生の誕生日は22日とわかる。数のマジックでは最も古いものの一つで，日本で江戸時代に出版された数学書「塵劫記」にも記載があるという（根上他 2012，ガードナー 1959等）。

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

図1：数当てマジックカード

このマジックの原理を理解するため，どのカードに何の数字が書いてあるのかを，各自ワークシートに記入させ，「ある＝1」と「ない＝0」の2種類の5つの情報で，0 ～ 31の自然数を表せることを確認した（表2）。カードは順にⅠ～Ⅴとする。

表2：マジックカードと2進数

	Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	2進数
0						00000
1					○	00001
2				○		00010
3				○	○	00011
4			○			00100
…						…
22	○		○	○		10110
…						…
31	○	○	○	○	○	11111

例えば，先の例の22は，5・3・2枚目に「ある」，4・1枚目が「ない」だから上から順に並べて10110と表される。これは22の2進数表記そのものである（図2）。

◆2進数

2進数は，0と1の2つの数字を使って数を表現します。数は0，1と順に増え，次に位が増えて10になります。このように2進数では，$2^0(1)$, $2^1(2)$, $2^2(4)$, $2^3(8)$,…と2倍毎に位が繰り上がります。例えば，2進数で10110という数は，以下のように22を表しています。

2^4の位	2^3の位	2^2の位	2^1の位	2^0の位
1	0	1	1	0

$$1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0=16+4+2=22$$

通常の数の表記では，一・十・百・千・万…と10倍毎に位が上がる10進法が使われています。一般に，n倍毎に位が上がるn進法も定義できます。何進法で表した数かを明記したい時は，2進数の10110であれば$10110_{(2)}$のように，添字を付けて表します。

図2：2進数の説明（配布テキストより）

この誕生日当てマジックおよび2進数の原理については，学生にとっては周知の事項と予想されるが，対象の学生は高校で2進数を学習していない学年であるため（H24年度施行の新学習指導要領では高校の「数学A」で2進数が復活している），2進数をよく知らない学生も一部いる可能性がある。そこで，2進数の原理と，10進数と2進数の変換方法，2進数の小数，2進数の計算法，n進数について，簡単な講義と演習問題を行った。

問題．次の数を2進数に，2進数表記された数を10進数で表せ

i) 4.3125，　5.3，　1/3，　π　　ii) $101.011_{(2)}$，$0.\dot{0}11\dot{0}_{(2)}$

解答. i) $1/3=0.\dot{3}$の場合：

$1/3=\underline{0}.333\cdots$　より整数部分は 0　①

①の小数部：$0.333\cdots\times2=\underline{0}.666\cdots$ より小数第1位は0 ②

②の小数部：$0.666\cdots\times2=\underline{1}.333\cdots$ より小数第2位は1 ③

③の小数部　$0.333\cdots$は①と同じなので以下②③を繰り返す。

$\therefore 1/3=0.010101\cdots_{(2)}=0.\dot{0}\dot{1}_{(2)}$

ii) $0.\dot{0}11\dot{0}(2)$ の場合：

$x=0.\dot{0}11\dot{0}=0.011001100110\cdots$　とおく　④

xを$10000_{(2)}=16$倍すると4桁繰り上がる。すなわち，

$16x=110.011001100110\cdots$である。　⑤

xと16xは小数部が等しいので⑤から④を引いて

$15x=110_{(2)}=6$

$\therefore x=6/15=2/5=0.4$

上の問題の応用として，普通の電卓で2の立方根を計算する方法を紹介した。$1/3=0.\dot{0}\dot{1}_{(2)}=1/4+1/4^2+1/4^3+\cdots$であるから，

$$\sqrt[3]{2}=2^{1/3}=2^{1/4+1/4^2+1/4^3+\cdots}=\left(2\left(2\left(2(\cdots)^{1/4}\right)^{1/4}\right)^{1/4}\right)^{1/4}$$

ここで，1/4乗は電卓の$\boxed{\sqrt{}}$キーで計算できる。具体的には，$\sqrt[3]{2}$を計算する場合，$\boxed{2}$を押した後，$\boxed{\sqrt{}}\,\boxed{\sqrt{}}\times\boxed{2}\,\boxed{=}$を何度も繰り返し，電卓に表示される値が一定のサイクルに収束したところで最後に$\boxed{\sqrt{}}\,\boxed{\sqrt{}}$と押せばよい。同様に，πの2進数表記を利用すれば，2のπ乗も電卓で計算できる。これは各自の演習問題とした。

この他，整数の10進数と2進数の変換の例として，図1の数当てカードをより巧妙に原理を隠して，カードマジックに応用した「ジェルゴンのトリック」を実演した。このトリックは，フランスの数学者ジェルゴン（Joseph Diez Gergonne）が1813年に発表した古典的なカードマジックである（ガードナー 1959）。普通は3進数を応用して27枚のカードで行うが，何進数にも転用可能で，ここでは2進数を応用して32枚のカードを使用した。客に任意の1枚のカードを覚えさせてよく混ぜたのち，1枚ずつ2つの山に分けて，客のカードがどちらの山にあるかを尋ねた後，それらを重ねて1つにする。これを5回繰り返した後，①客のカードが何枚目にあるかを当てる。あるいは，②客があらかじめ指定した枚数目から客のカードが現れるという現象である。基本原理が図1のマジックカードと同じであることは誰にもすぐにわかると思うが，枚数目を当てるカードマジックは新鮮な印象だったようだ。実際には，このトリックでは毎回の操作でカードの配列がどう変わるかを考察する必要があるのだが，それについては，第12講「シャッフルの数理」で詳しく扱うことを予告して，ここでは基本原理のみの理解とした。

3.2 ハノイの塔（第3講）

ハノイの塔とは，1883年に数学者エドワード・リュカが発売した有名なパズルである。3本の杭に大きさの異なる複数の円盤で構成され，小さい円盤が上になる順で1本の杭に積まれている（図3）。

図３：ハノイの塔

円盤は1回に1枚ずつどれかの杭に移動できるが，小さな円盤の上に大きな円盤を置くことはできない。このルールに沿って，全ての円盤を別の杭に移動することが目標である。オリジナルのハノイの塔のパッケージには，ハノイの塔にまつわる伝説（リュカの創作）が書かれており，インドの寺院にある64枚のハノイの塔を完成させたとき，世界は滅びるという。64枚のハノイの塔を完成させるには何手掛かるのだろうか？

パズルのルールを説明したのち，折り紙を配って，それを短冊状に切って4～6段のハノイの塔を作らせ，まずは簡単な4段の場合に（移動は左端の杭から右端の杭とする），このパズルを考えさせて，ワークシートに解答手順を記録させた（図4・図5）。ただし記録用紙には初期配置も含めて16個しか記入欄がないので，15手以内で行うことを要件とした。早くできた人は，5段や6段に挑戦したり，解答を見て気付いた規則性をワークシートに記入させた。

図４：ハノイの塔に挑戦

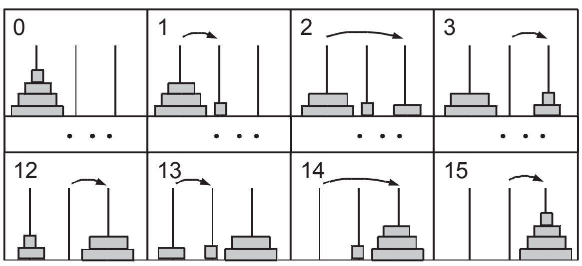

図５：４段のハノイの塔の解答図

このパズルは4段の場合，最短15手で解くことができ，またその方法は一意的である。10分ほど時間を与えて，ほとんどの人が解けたところで，代表者に前で解答してもらい，できていない人はそれを記録することで，全員に図5の解答図を埋めさせた。

図5の解答図や，5段・6段と増やした場合などを考えてみて，学生が気付いた規則性は，主に次の3点であった。

(i)　n段のハノイの塔は，2^n-1手で解ける
(ii)　奇数手目には一番小さい円盤を動かす
(iii)　奇数番目同士・偶数番目同士の円盤が重なることはない

(iii)は2色の円盤を交互に重ねさせることで発見を誘導した。(i)と(ii)は実験による観察から得られた帰納的な結果であるので，まずは(i)を数学的帰納法で証明した。

定理１．n段のハノイの塔は 2^n-1手で解ける。またそれが最短手数である。

証明．n＝1のとき：明らかに1手で解ける。$2^1-1=1$より定理1は成立する。
n＝kのとき，k段のハノイの塔が 2^k-1手で解けると仮定する。n＝k＋1のとき，まず一番大きい円盤を除く上のk段を中央の杭に移動するのに，帰納法の仮定より2^k-1手掛かる。次に最大の円盤を右端の杭に移動させ（1手），中央のk段を右端の杭に移動させるのに再び 2^k-1手掛かるので，全部で$(2^k-1)+1+(2^k-1)=2^{k+1}-1$手で解ける。数学的帰納法により，n段のハノイの塔は 2^n-1手で解けることが証明された。またこれ未満の手数では移動できないことも同様に証明できる。なぜなら，k＋1段のハノイの塔を解く場合，最大の円盤を右端の杭に動かすには，その前に上のk段を中央の杭に移動しておかなければならず，それには帰納法の仮定から 2^k-1手を要するからである（以下略）。□

上記の証明は，単に手数だけでなく，ハノイの塔を解く具体的なアルゴリズムをも与えていることに注意したい。すなわち，k＋1枚のハノイの塔を解くのに，k枚のハノイの塔の手順を利用して，全体の手順が完全に決まっている。これを再帰的アルゴリズムという。例えば，5段のハノイの塔を解くプログラム（Tiny Basic）は，再帰的アルゴリズムを使って次のように書ける（奥村1987参照）。

```
Call Hanoi(5,1,3,2)
End
Sub Hanoi(n,A,B,C)
  If n>0 then
    Call Hanoi(n−1,A,C,B)
    Print  n;”番の円盤を”;A;”から”;B;”へ移動”
    Call Hanoi(n−1,C,B,A)
  End if
End Sub
```

ここで，Hanoi(n,A,B,C) はn段のハノイの塔で，杭Aから杭Bへ移動させる手順である（変数Cは補助的に使う第3の杭を表す）。帰納法の証明の通り，Hanoi(n,A,B,C)を，まず上の n−1段をAからCへ退避させ（＝Hanoi(n−1,A,C,B)），次に n番の円盤をA→Bに移動し，最後にCに退避していた n−1段をBに移動（＝Hanoi(n−1,C,B,A)）するという形で再帰的に定義している。

数学的帰納法と，再帰的アルゴリズムの関連を説明した後，気付いたこと(ii)に関連して，より一般に，何手目にどの円盤をどの杭からどの杭へ移動しているのか，その規則性に気づいてもらうため，円盤の移動をワークシートに記録させ，各自気付いたことを記入させた（表3）。

表３：ハノイの塔と２進数のワークシート

手番＼円盤	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	2進数
0					0000
1				①→②	0001
2			①→③		0010
3				②→③	0011
4		①→②			0100
…	…	…	…	…	…
14			①→③		1110
15				②→③	1111

3本の杭は①②③で表している。表3を見て，学生が気付いた規則性は次の2点であった。

・k手目に動かす円盤は，kの2進数表記で最下位に1がある桁数目の円盤になっている
・奇数番目の円盤は①→②→③→①の順，偶数番目の円盤は①→③→②→①の順で動いている

このうち，最初の性質については，定理1の証明に若干の補足をすることで，一般の枚数のハノイの塔で証明できる。この性質を数式で表すと，k手目に動かす円盤$f(k)$は，

$$f(k)=\nu_2(k)+1=\log_2((k\oplus(k-1))+1)$$

等で表せる。ここで $\nu_2(k)=\max\{l\in\mathbf{Z}_{\geqq 0} \mid k\equiv 0 \pmod{2^l}\}$で定義され，⊕は数を2進数で表した時に桁毎に排他的論理和をとる演算とする（XOR等とも書かれる）。排他的論理和は，次式で定義される。

$$0\oplus 0=0,\quad 0\oplus 1=1,\quad 1\oplus 0=1,\quad 1\oplus 1=0$$

例えば，$23\oplus 19=10111\oplus 10011=00100_{(2)}=4$のように計算する。

排他的論理和は，ここで必ずしも必要というわけではないが，次講で扱うので，新しい演算に慣れておくためにここで紹介して，幾つか計算問題を行った。さらに，この演算が次の基本性質を満たすことについて，後日レポート課題として課した。

> **レポート課題**：0以上の整数の集合$\mathbf{Z}_{\geqq 0}$は演算 $\oplus$ に関して，加法群となることを証明せよ。また，0以上2^k未満の整数の集合Mは，この演算で部分群になることを証明せよ。

さて，上記の性質から，k番目の円盤は，全部で2^{n-k}回動くことがわかる。ここで$2^{n-k}=(3-1)^{n-k}\equiv(-1)^{n-k}(\mathrm{mod}\ 3)$であるから，n-k が奇数ならmod 3で 2，n-k が偶数ならmod 3で1回動く。従って，n＝4のときは，kが奇数番目の円盤は①→②→③と動かしたが，一般には n-k の偶奇に従って動かす順番が決まる。ここまでの考察の後，次の問題を出した。

> **問題**．10枚のハノイの塔で，666手目に動く円盤は，何番目の円盤か？またどの杭からどの杭に移動させるのか答えよ。

解答． $\nu_2(666)+1=2$より，動かすのは円盤Ⅱ。円盤Ⅱが動くのは，偶数であって4の倍数でない手番であるが，666までにそのような数は，$[666/2]-[666/4]=333-166=167$個ある。10-8は偶数なので，2番目の円盤の動きは①→③→②であり，$167\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ であるから，666手目は杭③から杭②に円盤Ⅱを動かす。□

各手番の円盤の動きの規則性が完全にわかったので任意の手番目のハノイの塔の状態も求めることができる。

> **例題**．6枚のハノイの塔で25手目の配置を描け。

解答． 円盤は6枚より，奇数番目の円盤は①→②→③，偶数番目は①→③→②と動く。$25=011001_{(2)}$に注意して，大きい円盤から順に何回動いてどの杭に移動したかを求める。例えば，25を2^3で割った商は，011<u>001</u>の下3桁を消して$011_{(2)}=3$で求まることに注意する。

Ⅵ：6桁目が0だからまだ動いていない。∴杭①にある。
Ⅴ：5桁目以上は01より1回動いている。∴杭②にある。
Ⅳ：4桁目以上は011=3だがうち1回は円盤Ⅴを動かしているので，2回動いている。円盤Ⅳは①→③→②と動くので，杭②にある。
Ⅲ：0110＝6より6-3＝3回動いている。∴杭①にある。
Ⅱ：01100＝12より12-6＝6回動いている。∴杭①にある。
Ⅰ：25-12＝13≡1 (mod 3) 回動いている。∴杭②にある。

以上より，25手目の状態は図6の通りである。

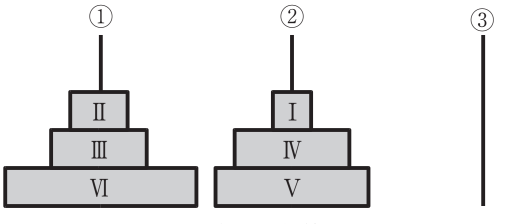

図６：例題の解答図

上の解答を一般の場合に公式化したものを配布プリントには参考までに記しておき，10枚のハノイの塔の666手目の状態を描くことを演習問題として，残り5分で解かせ，その場で提出させた。やや時間が少なかったこともあり，完答者は10名程度であった。

3.3 ニムの戦術（第4～5講）

ニムは，石取りゲーム，三山崩しなど様々な名前で呼ばれる簡単な2人ゲームである（一松1968，ビースリー1992，秋山ら1998等）。

> 【ルール】
> 1) 碁石やマッチなど多数の物品（以下“石”）を使い，初めにそれらを幾つかの山に分けておく。
> 2) 2人のプレイヤーは交互に，任意の1つの山を選び，その山から任意の個数だけ石を取る。
> 3) 勝敗の付け方には2種類あり，a) 最後の石を取った方を勝ちとする「通常ルール」と，b) 最後の石を取った方を負けとする「反転ルール」である（反転ルールが一般的）。

石の取り方で，取れる個数に制限を付けたり，1度に複数の山からも条件付きで石が取れるようにするなど，様々な変種がある。

(1) 1つ山のニム

ルールを確認した後，まずはゲームに慣れるために，学生同士でペアを組んで，簡単な1つ山のニムをやってもらった。ただし，1つ山のニムでは，石の取り方に制限がないとa) b)どちらのルールでも明らかに先手が1手で勝てるので，一度に取れる石は3個以下とした。ゲームは，小学生がよく遊んでいるように，紙に短い縦線をたくさん書いて交互に横線で消していくやり方でもよいが，残り個数が一目でわかるように，縦線の代わりに数字を書いて消していく方法で行った。ルールは，通常・反転両方で行い，それぞれで必勝法を考えてもらった。さすがにこのルールは簡単なので，5分もしないうちに必勝法をほぼ全員が自力で把握できたようだった。

【必勝法】

通常ルールの場合，残り個数が4の倍数になるように相手に手を渡せばよい。石の個数が4の倍数であれば，m個 ($1\leqq m\leqq 3$) の石を取ると，必ず4の倍数でない数が残る。次の手番では，4-m個の石を取ることで，再び相手の番では4の倍数の石を残すことができる。こうして石が減っていくと，最後には相手に0個の石を残して手番を終えられる。すなわち最後の石を自分が取れる。

同様に，反転ルールでは，残りの個数が4の倍数＋1になるように手番を終えれば必勝である。

言い換えると，通常ルールでは，石の個数が4の倍数のときは先手必敗であり，そうでないときは先手必勝である。以下，先手必敗の局面を「負け型」，先手必勝の局面を「勝ち型」と呼ぶことにする。ただし，先手必勝・必敗の意味には注意が必要である。それらは，厳密には帰納的に次で定義される。

・石が0個（反転ルールでは1個）の局面は，負け型である。
・勝ち型とは，ある手が存在して，負け型にできる局面である。
・負け型とは，どの手を選択しても，勝ち型になる局面である。

（2）2つ山のニム

勝ち型・負け型の概念を説明した後に，次に2つ山のニムを同様にやらせて，必勝法を考えさせた。ニムのルールは，一方の山から任意の個数の石が取れるルールとし，また考察を簡単にするために，以下では，最後の石を取った方を勝ちとする通常ルールに固定した。2つ山のニムでは，すぐに必勝法に気付いた人は多くはなかったが，一方のプレイヤーが気付けば，他方もすぐにわかってしまう簡単な方法なので，すぐに人から人へと伝わっていった。早くできた人には反転ルールも考えさせ，5分ほどやらせたところで，わかった人に挙手で発表させた。

【必勝法】残りの石の個数を2つの山を同数にする。

すなわち，石の個数が (m,m) が負け型となる。(0,0) が負け型であり，一度に一方の山からしか石が取れないことを考慮すると，(m,m) が負け型の条件を満たしていることはすぐにわかる。

（3）3つ山のニム

いよいよ本来のニムである。(1)(2)で，残り石の個数が「負け型」になる局面を見つけることが必勝の鍵だとわかったので，負け型を見つけるということを意識してゲームをしてもらうことにした。(2)より残り2つ山になった場合 (m,m,0) は負け型なので，最初の局面は，3つの山とも個数が異なるところから始めさせた。石の個数は最初自由としたが，途中から各山7個以下で，あり得る負け型を全て見つけることを目標とした。 (1,2,3) が負け型であることを説明するなどヒントを出すと，幾つかのグループから (1,4,5) や (2,4,6) など，小さな数字から順に負け型が次々出てきたので黒板に列挙していった。中には間違っているものも挙げられたが，その都度指摘して修正した。全くわからないという人は，列挙された局面を負け型であることを確かめるよう促した。こうして最終的に，次の負け型が出揃った。

(m,m,0),　(1,2,3),　(1,4,5),　(1,6,7),
(2,4,6),　(2,5,7),　(3,4,7),　(3,5,6)

負け型を探す作業は，具体的には次のように行われる。(1,2,3) が負け型であることがわかった時点で，$c\neq 3$ のときは (1,2,c) は常に勝ち型になる。なぜなら (1,2,3) は負け型なので，そこから石を減らす手は常に勝ち型であるから，$c<3$ は勝ち型であり，同様に $c>3$ ならcを3に減らして (1,2,3) にできるからである（同様に，$a\neq 1$, $b\neq 2$ のとき，(a,2,3),(1,b,3) は勝ち型であることもわかる）。今の議論は次のように一般化される。

補題１．(a,b,c) が負け型のとき，任意の $c'\neq c$ に対して (a,b,c') は勝ち型である。

補題1より (a,b) に対して，(a,b,c) が負け型になるcは高々1つなので，それを f(a,b) と表すことにする。ただし負け型になるcが存在しないときは仮に $f(a,b)=\infty$ と定義しておく（実は必ずcは存在する（命題4参照））。次の補題は定義から明らかである。

補題２．i) $f(a,a)=0$,　ii) $f(a,b)=f(b,a)$,　iii) $f(a,b)=c$ ならば $f(b,c)=a$, $f(c,a)=b$

以上より，他の負け型を探すには，(1,4,c), (2,4,c) …等を探す必要がある。(1,4,c) を考えると，$c\leqq 4$ は全て勝ち型であることは既にわかっている。実際，$c=0,1,4$ は (m,m,0) の形に減らすことができ，$c=2$ では $4\to 3$, $c=3$ では $4\to 2$ で (1,2,3) に移行していずれも負け型にできるからである。一般に次が成り立つ。

補題３．自然数a, b に対して，c=a, b, f(a',b), f(a,b') ($0\leqq a'<a$, $0\leqq b'<b$) であれば，(a,b,c) は勝ち型である

補題3より，(1,4,c) が負け型になるcの候補の最小は，c=5 となる。そして実際 (1,4,5) は負け型である（補題3よりc=5を減らす手は全て勝ち型であり，1や4を減らす手も既に調べている）。こうして新たな負け型 (1,4,5) が見つかる。このような議論で，小さいものから順に探していくと，次々負け型が見つかる。実は負け型の候補の最小（先ほどの場合 $c=5$）は，常に負け型になる。

命題４．任意の自然数a,bに対して，

$$f(a,b)=\min\{\mathbf{Z}_{\geqq 0}\setminus(\{a,b\}\cup\{f(a',b)|0\leqq a'<a\}\cup\{f(a,b')|0\leqq b'<b\})\}$$

証明. 上式の右辺をcとする。(a,b,c) からcを減らす手は，補題3から全て勝ち型である。また (a,b,c) を (a',b,c) ($0\leqq a'<a$) に減らす手が負け型と仮定すると，cの定義から $f(a',b)<c$ であり，(a',b,c)と(a',b,f(a',b)) が共に負け型となって補題1に矛盾する。□

特に命題4から $f(a,b)<\infty$ もわかる。命題4は授業では厳密には証明せずに，数式の意味を説明して，結果を紹介するにとどめたのだが，慣れない数式表示に戸惑った学生は多かったようだ。補題1～命題4の流れは，伊藤2010を参考にした。以降は，命題4を適用して，小さな組から順に負け型を見つけていくことができる。

第5講は，前回の復習から入り，3つ山ニムの負け型リストを利用して，f(a,b)の関数表を作成させた（表4）。

表４：ニムの負け型f(a,b)の関数表

a＼b	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
3	2	1	0	7	6	5	4
4	5	6	7	0	1	2	3
5	4	7	6	1	0	3	2
6	7	4	5	2	3	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

さらに，表4を全て2進数に直して別に書かせた。この表を見て，前回ハノイの塔で学んでいた排他的論理和を使って $f(a,b)=a\oplus b$ と表せることに全員が気付いたようだった。

> **定理５**（Bouton 1902）．3つ山ニムにおいて，(a,b,c) が負け型である必要十分条件は，$a\oplus b\oplus c=0$ が成り立つことである。

定理5を黒板で証明したのち，山の数が幾つのニムでも成り立つことを補足した。そして，以下の問題を出した。

問題． 各山の石の個数が以下の時，どう石を取れば勝てるか？

(7,8,10)，(53,60,100)，(8,9,13,14)

解答． (8,9,13,14) の場合：2進数で表すと，(1000, 1001, 1101, 1110) である。排他的論理和は，$8\oplus 9\oplus 13\oplus 14=0010_{(2)}=2\neq 0$ より勝ち型（先手必勝）。0010の最上位桁である2桁目に注目する。8，9，13，14の中に，2桁目が1のものが奇数個存在する。今の場合，14がそうである。$14\oplus 2=12$ は14より小さくなり，$8\oplus 9\oplus 13\oplus(14\oplus 2)=0$ であるから，14の山から2個取って12個に減らせばよい。□

ここまでニムを例に挙げて必勝の戦略を考察してきたが，これまでの議論を一般の完全情報2人ゲームに拡張・定式化する。ここで考えるのは，次の性質を満たすゲームである。

- 2人ゲーム：2人のプレイヤーが交互にプレイする。
- 完全情報性：各手番でゲームの情報が完全に開示されている。
- 有限性：ゲームは有限手数で終わる。
- 排中性：ゲームが終了した時点でどちらかが勝つ

ニムはこの条件を満たしている。この条件を満たすゲームを，伊藤2010に習って，「2人組合せゲーム」と呼ぶことにする。2人組合せゲームは，有向グラフ $\Gamma=(K,\delta,s_0)$ を使って定式化できる。ここで，頂点集合Kは全ての局面とし，$\delta:K\to 2^K$ は各局面の推移規則，s_0 は初期局面である。有限性からこのグラフにはサイクルがないことがわかる（図7）。これを普通「ゲームの木」と呼んでいる。ゲームの最終局面（$\delta(s)=\phi$）は，手番の側が負けである。

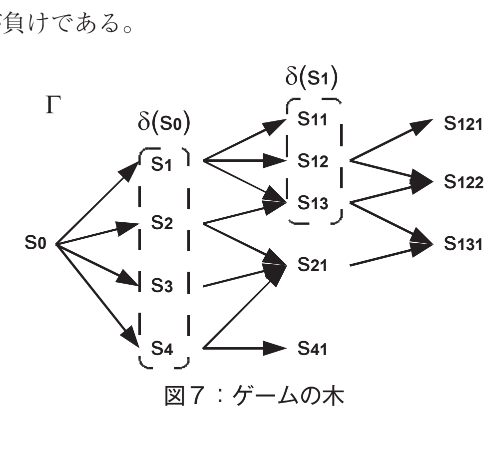

図７：ゲームの木

> **定理６**．有限・排中的な完全情報2人ゲームの各局面は，勝ち型か負け型である。

> **定義（グランディー数）**．2人組合せゲーム $\Gamma=(K,\delta,s_0)$ に対して，以下の式で帰納的に定義される関数（またはその値）$\gamma:\Gamma\to\mathbf{Z}_{\geqq 0}$ をグランディー数という。
> $$\gamma(s):=\min(\mathbf{Z}_{\geqq 0}\setminus\{\gamma(s')\mid s'\in\delta(s)\})$$

例． 図7のゲームのグランディー数は，図8のように決まる。ニムのグランディー数は，命題4より $\gamma(a,b,c)=a\oplus b\oplus c$ である。

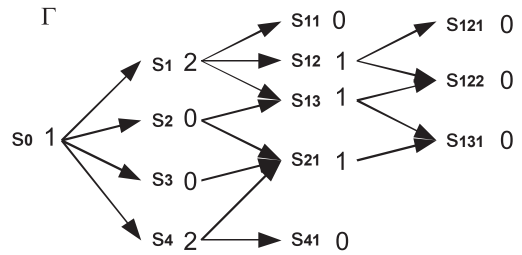

図８：グランディー数

> **定理７**．局面 $s\in K$ が負け型である必要十分条件は，$\gamma(s)=0$ が成り立つことである。

以上の理論を紹介して，5講目の授業を終えた。その時点で，第2～5講の内容について，授業で取り上げなかった話題や，省略した証明，ルールの条件変更の考察などをレポートとして課した。

４．学生の感想と評価

本授業では，毎回コミュニケーション・ペーパーを配り，演習問題をやらせて，学生の出席や理解状況を把握するとともに，授業中にできなかった質問や意見・要望・感想などを書かせて回収し，添削して返却している。コミュニケーション・ペーパーに書かれていた学生の感想を幾つか紹介する。

- トランプマジック面白かったです！
- ハノイの塔のような単純そうなパズルでも奥が深いと思った。数学的に記述できるのはすごいと思った。2進数での説明は難しいが理解したいと思った。
- ハノイの塔というパズルを数学的に考えるのは新鮮でした。数学的帰納法の後で，“mod”が出てきたあたりからわからなくなってしまったので残念でした。
- 2進数に馴染みがなく，何に使うのかも知らなかったが，ハノイの塔に使えるというのは驚いた。
- ものすごく難しかったけど面白かった。
- 必勝法があるゲームは，ある意味欠陥があると思いました。
- 高校までの学習とは全く異なる数学の面白さや奥深さを学ぶことができた。日常の様々な事象にも数学が関係しているのかと考えると，もっと面白いこと

が見つかるかもしれないと思った。

・数学だけど数学っぽくなくて面白かった。

・排他的論理和の計算が理解できなかった。

・複数の山のニムは初めて知った。面白かった。

・ニムで「7個以下」という条件を付けると負け型を探しやすかったです。

・パズルが数学的に説明できることにびっくりしました。

・なかなか面白くなってきたと思う。ゲームを数学化することは楽しいと思った。

・今日の授業は文字式が多く，難しかったです。

・2人組合せゲームには必ず必勝法があるということで，他のゲームの必勝法も知りたいと思いました。

学生の感想を読むと，「○○が難しかった」という意見が目につく。特に2進数やmod，集合の演算（∈，⊂，∪などの記号）がわからないという意見が多い。これらはその都度説明した上で使ってはいるが，高校の授業で馴染みがないせいか理解が十分でないようだ。数学的にゲームの必勝法が解析できることを面白いと感じる学生がいる一方で，それを欠陥があるゲームだ，面白くないと書いている学生が複数いたことは意外である。「必勝法が存在する」という意味を，「必勝のアルゴリズムが判明している」と混同しているのかもしれない。また，「数学っぽくない」「高校までの数学と全く異なる」という意見が複数あったが，それが，受験数学とは異質な印象を受けたという意味だとすれば狙い通りである。

2012年度の試験時に課したアンケートにおいて，全15回の授業を4つのブロックに分けて，それぞれのブロックで面白さ（面白い・楽しい・ためになる）と理解度（分かった⇔分からなかった）を学生に5段階評価させた。図9に第1ブロック（第2～5講）の結果を示す。回答者は，試験を受験した37名で，面白さの平均は3.76（標準偏差0.89），理解度の平均は3.41（標準偏差1.04）であった。どちらも評価1をつけた学生は皆無で，特に面白さでは半数以上が評価4以上であった。理解度に関しては，面白さよりは劣るが，自由記述で難しいという意見が多かった割には高い評価だったと思う。

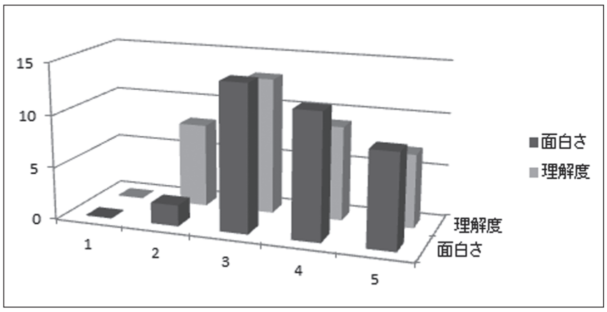

図９：アンケート結果：面白さと理解度

５．まとめ

本授業では，2進数を導入して，2進数によるパズル（ハノイの塔）の解析，2進数によるゲーム（ニム）の解析と続き，一般の2人組合せゲームを定式化して，グランディー数によるゲームの理論を学習した。その際，単なる座学ではなしに，体験・探究型の授業で，実際に学生同士でゲームを行ったり，パズルを解いたりしながら，ゲームを解析していき，それから一斉授業形式で理論を解説するという授業スタイルを採用した。高校までの学習内容は既習であるという前提で，やや高度な内容にも踏み込んだため，難しいという意見もあったが，大学生が学ぶ内容としての水準を維持することにはこだわった。例えば，従来よくあるハノイの塔を利用した授業実践では，n段のハノイの塔が 2^n-1手で解けるという手数に関する事実（定理1）を，数学的帰納法や漸化式で説明するという授業が多いが，本授業では，ハノイの塔における円盤の状態遷移を2進数と対応づけることでより深く解析している。またニムでは，2進数からグランディー数へ，2人組合せゲームに議論を一般化した。

本授業の結果は，アンケート結果からもわかる通り，ゲームを数学的に解析することで，日常の様々な事象に数学が関係していることを理解させ，数学の面白さも感じてもらうという本授業の目的は十分達成できたと考えている。

引用文献

文部科学省（2009），高等学校学習指導要領，pp.37-45.

長岡亮介ほか20名（2002），数学基礎，旺文社，pp.63-70.

根上生也，桜井進，佐藤大器，清水克彦，妹背浩也，中本敦浩（2012），数学活用，新興出版社啓林館，pp.16-17, pp.114-117.

一松信 (1968), 石取りゲームの数理，森北出版.

Kraitchik M.(1942)，Mathematical Recreations，W.W. Norton.

Bouton C.L. (1902), Nim, a game with a complete mathematical theory, Ann. of Math. 3 (2), pp.35-39.

M. ガードナー著，金沢養訳（1959），数学マジック，白揚社.

伊藤大雄（2010），パズル・ゲームで楽しむ数学，森北出版.

秋山仁，中村義作（1998），ゲームにひそむ数理，森北出版.

J.D. ビースリー著，中村義作訳（1992），ゲームと競技の数学，サイエンス社.

奥村晴彦（1987），コンピュータアルゴリズム事典，技術評論社.

A practice based on Tower of Hanoi and Nim
-A report of the subject for interdisciplinary studies “Mathematics of Games and Puzzles”-

Yasuzo NISHIMURA

Key words：mathematical education, game, puzzle, binary number, Tower of Hanoi, Nim