

## 内包量概念の形成に関する調査研究

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2011-03-22 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 辻, 千秋, 伊禮, 三之 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10098/3092">http://hdl.handle.net/10098/3092</a>

## 内包量概念の形成に関する調査研究

福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻 辻 千 秋  
 福井大学教育地域科学部 伊 禮 三 之  
 福井大学教育地域科学部 石 井 恭 子

本稿では、「速度」「人口密度」「物質密度」という内包量について、概念形成の実態を把握するために、日常経験の異なる中学生・高校生・大学生を対象に縦断的な調査を実施し、その考察を行った。まず、第1回目の調査では、短大生を対象とした調査問題(斎藤2002)の追跡調査として、中学生39名・高校生35名・大学生37名を対象に行った。第2回目の調査では、第1回目の調査での課題を踏まえ、中学生179名・高校生186名を対象に調査を行った。その調査結果から、第3用法の関係性の理解と独立性の理解に課題があること、つまり、内包量概念形成が、十分達成できているわけではないことが確認された。これは内包量指導が不十分であることを示唆する。

キーワード：量の理論、内包量

### 1. はじめに

本稿ですでてくる内包量、外延量という用語についての説明をする。

まず、量とは実在する物の一側面であり、通常は物と切り離して考えることはできない。例えば、人の長さ(身長)、人の体重(重さ)、人の体温(温度)などのように必ず量は物に付随している。

この量についての教育を考えると、「その量の概念」そのものと「大きさの側面」に関する理解を区別する必要がある。

こうした量は、大きく「外延量」と「内包量」の2つに分けることができる。外延量は、長さや重さ、面積、時間などのように空間的・時間的「広がりのある量」で、一般的には加法性をもつ。これに対し、内包量は、速度や密度、温度などのように物の「強さを表す量」で、通常は加法性をもたない。外延量が、大局的・グローバルな量だとすれば、内包量の方は、局所的・ローカルに定まる量といえる。

ところで、実在する物の一側面である量の指導では、感覚による判断から出発して、その延長として数値化され、さらに、そうした判断が選択される状況が準備される必要がある。

外延量の指導においては、単位の4段階指導(直接比較→間接比較→個別単位(任意単位)→普遍単位)がなされており、こうした観点が踏襲されている。

一方、内包量の指導についてはどうだろうか。内包量は、例えば速度が「距離÷時間」で数値化されるように2つの外延量の商として構成されるが、これは大きさの側面から速度を捉えていることになり、速度・距離・時間の3者の関係の理解も問題となる。また、数値化され

る以前にも速度という量は存在しているのであり、それをどのように概念規定するか、その指導が不十分なのが現状ではないのかと考えられる。

### 2. 内包量概念についての先行研究

内包量概念の形成については、心理学的立場からの研究もあり、これらの先行研究は大変興味深く、ここで得られた知見を教材開発にとりいれていくことが必要だと考えている。

まず、何をもって内包量概念が獲得されていると考えるのか、その指標については、次の2つが必要になる(斎藤, 2002)。

- ① 関係性：2つの量が既知の時に残りの未知の量が求められる。
- ② 独立性：全体量や土台量の多少に関わらず当該内包量の“強さ”は一定である。

ここで全体量と土台量について説明をする。内包量が2つの外延量の商として構成されることは、前に述べた。つまり、内包量 $m$ は、外延量 $x$ と外延量 $y$ を用いて

$$m = y/x$$

と表すことができる。この時、分母にくる外延量 $x$ を「土台量」、分子にくる外延量を「全体量」と言う。

②の独立性は、「内包量の保存」と言われている。この、内包量の保存に関しては、教科書での指導の問題点として、「『単位量あたりの大きさ』としたのでは、2つの外延量の『割合』、もしくは単位量あたりの『外延量』としてとらえられてしまい、内包量を『1つの量』としてとらえるには不十分である」という指摘がされている(麻柄, 1992)。

確かに、算数の教科書では、「1kmあたりの人口を人

口密度」, 「速さは, 単位時間に進む道のり」と説明しており, 理科の教科書では物質密度を「一定体積あたりの質量を, その物質の密度」と説明している。こうした説明だけで学習するのであれば, 例えば「速さ」=「道のり」と混同してしまい, 「速さ」が「道のり」と独立した量であることの認識が不十分である, というのが麻柄の調査なのである。人口密度や物質密度などの内包量も, 同じような問題を抱えており, 教科書の指導だけでなく, 別の手立ても必要だろう。

その手立てについての一つは, 内包量の指導においても, 外延量と同様に感覚による判断を十分に体験させることが必要であるとの指摘である(松田等, 2000)。

これらの先行研究を踏まえ, 内包量概念の理解についての調査を実施した。

### 3. 調査の目的と方法

調査は2回(2009年7月と2009年12月)行った。

調査問題は, 短大生を対象とした問題(斎藤, 2002)を一部変更して作成し, 速度・人口密度・物質密度のそれぞれについて, 以下の5問で構成した。

#### ①「2つの量の関係性の理解」の問題

問1⇒第1用法の問題

(全体量÷土台量=内包量)

問2⇒第2用法の問題

(内包量×土台量=全体量)

問3⇒第3用法の問題

(全体量÷内包量=土台量)

#### ②「独立した量の理解」の問題

問4⇒保存性の問題(土台量変化)

問5⇒保存性の問題(全体量変化)

第1回調査, 第2回調査の学年と人数は以下の通りである。

表1 第1回調査学年と人数

学年	人数(人)
大学学部生	37
高校2年生	35
中学2年生	39

表2 第2回調査学年と人数

学年	人数(人)
高校2年生	186名
中学2年生	179名

第1回調査では, 日常経験の異なる中学生・高校生・大学生を対象とし, 内包量の理解について調査を行うとともに, 調査問題の妥当性についても検証することを目的とした。第1回調査の結果を踏まえ, 質問の言い回しをより分かりやすくし, 調査人数も拡大して, 第2回調査を中学生・高校生を対象に行った。これは, 横断的な内包量の理解の様相を明らかにすることを目的としてい

る。福井県内の中学校・高校の先生方に協力していただき, 調査対象を中学2年生と高校2年生とした。調査問題で扱う速度と人口密度が小学校6年生, 物質密度が中学校1年生で学習しているからである。

### 4. 第1回調査の結果と考察

第1回調査の結果を, 正答率のグラフを基に, 各内包量や用法によってどのような傾向が現れるのかを考察する。

#### (I) 速度について

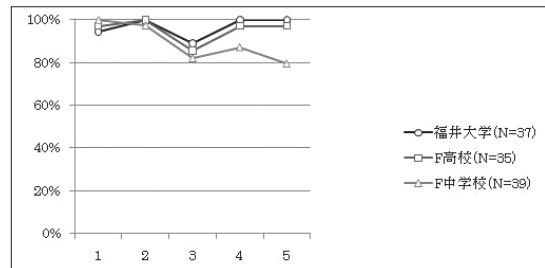


図1 速度についての正答率

速度については, 全体的に高い正答率である。正答率がやや低下するのは, 第3用法である。第3用法で正答率が低下する傾向は, 中学生・高校生・大学生で共通している。さらに調査人数を増やすと, この傾向が顕著化することが予想される。

#### (II) 人口密度について

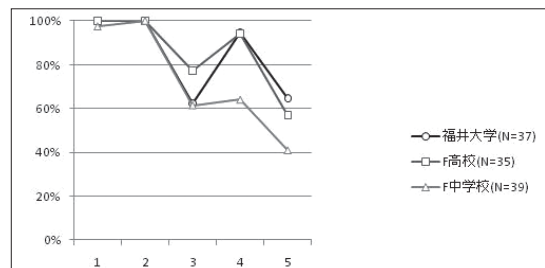


図2 人口密度についての正答率

第1, 2用法と比べ, 第3用法が大幅に低下している。(第3用法の正答率: 大学生62%, 中学生62%) また, 保存性に関する問題においても, 問4(土台量変化)では中学生が64%と低く, 問5(全体量変化)では大学生65%, 高校生57%, 中学生41%と低い正答率となった。問5については, 問題文が

『越前市において, ほんの少しの人数-10人-がいる場合とかなりの人数-1000人-がいる場合とで, どちらの方が, 人口密度が大きいですか。』

となっており, 最も多い誤答が

イ 10000人程度の人が住む区画

であった。

人口密度を考える際, どこにも同じこみぐあいの人が住んでいる, と考えて計算する必要がある。よって, 川

や道路のように、人が住めない場所があるという現実にとらわれて、問題文の意味が正しく把握できなかったことが、正答率に影響していると考えられる。これらを踏まえ、第2回調査では問題文をより意味がつかみやすいように変更した。

### (Ⅲ) 物質密度について

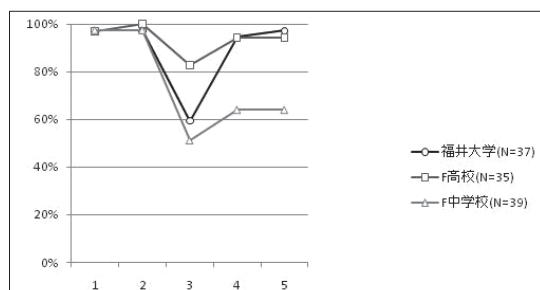


図3 物質密度についての正答率

第1, 2用法と比べ、第3用法が大幅に低下している。(第3用法の正答率：大学生59%，中学生51%) また、中学生は保存性に関する問題の正答率が低い。

第1回調査によって、第3用法が不十分であるということが予想される。また、保存性の問題については、中学生・高校生・大学生の間で違いが見られることも予想される。

## 5. 第2回調査の結果と考察

第2回調査における、正答率のグラフを、順番に見ていく。

### (Ⅰ) 速度について

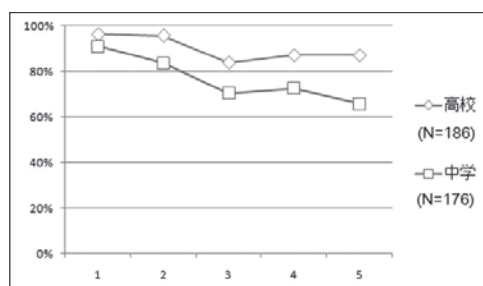


図4 速度についての正答率

第1用法は中学・高校とも高い正答率で、第2用法も高い正答率であるが中学生がやや低くなり、第3用法で低下する点は、中学生・高校生とも共通している。また、中学生は保存性に関する問題においても正答率はそれほど高くない。しかし、人口密度や物質密度に比べると、高い正答率である。やはり、密度に比べ「歩く」「走る」「車に乗る」などの日常的経験の差が影響していると考えられる。

### (Ⅱ) 人口密度について

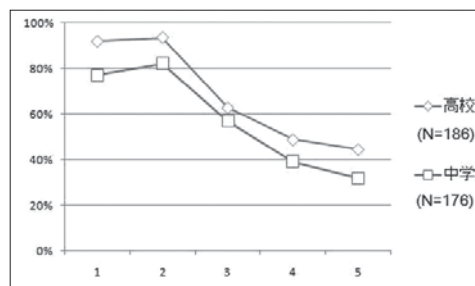


図5 人口密度についての正答率

第1, 2用法と比べ、第3用法が大幅に低下している。また、保存性に関する問題においても、半分以下の正答率となった。多い誤答としては、問4では「ア 狭い区間」が中学生32%，高校生38%であり、問5では「イ 10000人程度の人が住む区間」が中学生44%，高校生33%となっている。

日常では「狭いからぎゅうぎゅうに押し込める」「物(人)が多いからぎゅうぎゅうに押し込める」ということを経験する。これらの経験に引きずられて、誤答の多さにつながったと考えることができる。「人が均等に存在している」という仮定に無理があるのではないかと、という指摘がある可能性もある。しかし、内包量を扱う上で「均等にならず」ということが重要である。例えば1時間走って60km進んだから60km/hだ、と考えられるのは、途中でこぼこぼはあるにしても全体としては「等速である」と理想化しているからである。人口を対象としたときには、現実には密集した土地や過疎である土地を含む自分の地域の状況にとらわれ過ぎて、「均等に分布」していると理想状態を想定しながら論理的に操作することができていないということである。つまり、現実の文脈に依存しすぎるのが、人口密度に関する保存性の理解を妨げている可能性がある。

### (Ⅲ) 物質密度について

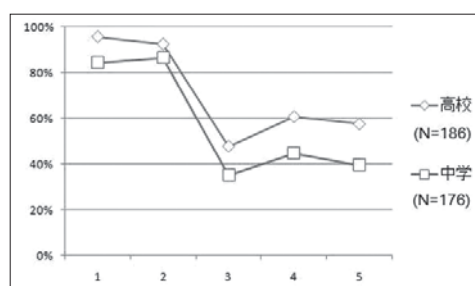


図6 物質密度についての正答率

物質密度についても第1用法・第2用法ともに高い達成率である。それに比べ、やはり、第3用法が大幅に低下している。第3用法での正答率は中学生35%，高校生48%となっており、50%を割っている。

保存性に関する問題においても正答率は低くなっている。多い誤答としては、問4で「ア 小さな銀」が中学生17%，高校生22%，「イ 巨大な銀」が中学生30%，

高校生14%であり, 問5では「重い鉄」が中学生36%, 高校生30%となっている。これらは, おそらく「重い方が密度も大きい」と認識しているからだろう。問4では中学生と高校生の誤答の選択が逆転しているが, 高校生の方は, 「(体積が)小さなところにはぎゅっと詰まっている」という満員電車などの日常経験の連想が影響している可能性がある。いずれにせよ, 保存性の理解が不十分であることは明らかである。

## 5. まとめ

本研究では, 内包量概念の形成について, 中学生, 高校生と縦断的に調査した。縦断的な調査を行うことで, どの学校段階においても, 速度・人口密度・物質密度という3つの内包量において, 2量の関係性においては, 第3用法が不十分だということが明らかになった。これは, 小学校算数における包含除の指導とも関連していると考えられる。内包量の第3用法が, わり算の包含除と対応するからである。包含除の作問について小学生を対象にした調査によれば, 小学6年生の正答率は60%程度であり, 第1用法にあたる等分除が約90%, 第2用法にあたる乗法が約80%と比較するとかなり低い数値となっている(藤村, 1997)

また, 人口密度と物質密度の第3用法, 保存性に関する問題が, 速さのそれよりかなり正答率が低いのは, 速さ概念より日常経験の少ない密度概念の成立が遅くなるという松田等(2000)の指摘の通りである。

保存性に関しては, 理科教育の立場からの指導も必要だと考えている。例えば, 物質密度の導入では, 実際の物体に触れ「同じ大きさ(体積)でも重さが違う」ということを様々な物質を通して十二分に体験することで, 密度が物質に固有の量であることの理解が深まり, 概念の形成につながると考えられる。

今回, 調査に協力してもらったある先生は, 「問題を

見たときは簡単にできると思ったが結果を見て驚いた。基本的な概念が身につけておらず, 普段の授業が砂上の楼閣のようなものだったと認識を新たにした」と話していた。

内包量概念の形成には, 算数・数学教育と理科教育が連携した指導が必要になる。内包量概念の形成に資する授業開発を, どの学習段階で行うのかは, これからの課題である。

## 謝辞

本研究を進めるにあたり, 調査問題の実施に協力して下さった各学校の先生方・生徒のみなさんに感謝致します。

## 〈引用・参考文献〉

- 銀林浩(1975)『量の世界・構造主義的分析』むぎ書房  
 斎藤裕(2002)「短大生を対象とした内包量の理解に関する研究」新潟県立女子短期大学研究紀要第39号  
 麻柄啓一(1992)「内包量概念に関する児童の本質的なつまずきとその修正」教育心理学研究第40巻第1号, pp20-28  
 藤村宣之(1997)『児童の数学的概念の理解に関する発達的研究—比例, 内包量, 乗除法概念の理解を中心に—』風間書房  
 松田文子・永瀬美帆・小嶋佳子他(2000)「関係概念としての「混みぐあい」概念の発達」教育心理学研究第48巻第2号

## 〔付記〕

本研究は平成21年度教育地域科学部学部長裁量経費「教員志望学生における内包量概念理解の実態調査と教材開発」の助成を受けている

## A Research in Forming the Concept Intensive Quantity

Chiaki TSUJI, Mitsuyuki IREI and Kyoko ISHII

Key words : theory of quantity, intensive quantity

資料：第2回調査問題質問用紙【速度、人口密度】

I 「速度」について

「速度」は、一定の時間あたりどれくらいの距離を進むかを示したものです。一定の時間とは、1秒間、1分間、1時間などがあり、距離の単位は、cm・m・km 等があります。通常、車の速度は、1時間あたり何 km 進むかで示されます。

このように速度は時間と距離の2つで表されるので、その単位も、時間の単位と距離の単位が組み合わさって、できています。

車の時速は、次の公式で求められます。

$$\text{時速(km/h)} = \text{距離(km)} \div \text{時間(h)}$$

では、表をみながら、以下の問題に答えてください。

最高速度表	
車	最高速度
A	50km/h
B	70km/h
C	80km/h
D	90km/h

問1 ある車が、最高速度で8時間走り、640kmを走りました。

この車は、A～Dのどの自動車でしょうか。

- ア Aの車                      イ Bの車                      ウ Cの車  
エ Dの車                      オ わからない

問2 Bの車で最高速度で4時間走った距離と、Cの車で最高速度で4時間走った距離とでは、どちらのほうが長いですか。

- ア Aの車                      イ Bの車                      ウ Cの車  
エ Dの車                      オ わからない

問3 40kmの距離を、Aの車で最高速度で走る場合と、Bの車で最高速度で走る場合とでは、どちらのほうが、時間がかかりますか。

- ア Aの車                      イ Bの車                      ウ Cの車  
エ Dの車                      オ わからない

問4 Aの車が、最高速度で走っています。3分間走っているときの速さと、3時間走っているときの速さとでは、どちらが速いでしょうか。

- ア 3分間      イ 3時間      ウ どちらも同じ      エ わからない

問5 Bの車が、最高速度で走っています。1km走ったときの速さと、50km走ったときの速さとでは、どちらが速いでしょうか。

- ア 1km      イ 50km      ウ どちらも同じ      エ わからない

II 「人口密度」について

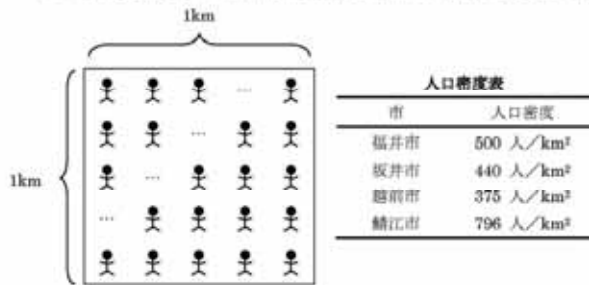
人口密度は、一定の面積（広さ）あたりどれくらいの人数がいるのかを示したものです。広さの単位はm<sup>2</sup>、km<sup>2</sup>などがありますが、通常、「人口密度」といえば、1km<sup>2</sup>にどのくらいの人数がいるかで示されます。

このように人口密度は人数と広さの2つで表されるので、その単位も、人数と広さの単位が組み合わさってできています。

人口密度は、次の公式で求められます。

$$\text{人口密度(人/km}^2\text{)} = \text{人数(人)} \div \text{広さ(km}^2\text{)}$$

以下の問題では、イメージ図のように1km<sup>2</sup>あたりに均等に人が存在しているものと考えてください。では、人口密度表を見ながら、問題に答えてください。



イメージ図：人形は人を表します。

問1 今、ある市の人口を調べたら、92400人でした。その市の面積は210km<sup>2</sup>です。その市の名前を、以下から、選んでください。

- ア 福井市                      イ 坂井市                      ウ 越前市  
エ 鯖江市                      オ わからない

問2 福井市における10km<sup>2</sup>の区画と、坂井市における10km<sup>2</sup>の区画とでは、どちらの方が人数が多いですか。

- ア 福井市      イ 坂井市      ウ どちらも同じ      エ わからない

問3 福井市において1000人が住む区画と、鯖江市において1000人が住む区画とでは、どちらの方が広いですか。

- ア 福井市      イ 鯖江市      ウ どちらも同じ      エ わからない

問4 坂井市において、狭い区画(1km<sup>2</sup>)をみたときと、広い区画(100km<sup>2</sup>)をみたときとでは、どちらの方が、人口密度が大きいですか。

- ア 狭い区画      イ 広い区画      ウ どちらも同じ      エ わからない

問5 越前市において、1000人程度の人が住む区画をみたときと、10000人程度の人が住む区画をみたときとでは、どちらの方が、人口密度が大きいですか。

- ア 1000人程度の人が住む区画      イ 10000人程度の人が住む区画  
ウ どちらも同じ                      エ わからない

資料：第2回調査問題質問用紙【物質密度】

Ⅲ「物質密度」について

物質密度は、一定の体積あたりどれくらいの重さなのかを示したものです。体積の単位は  $\text{cm}^3$ ・ $\text{m}^3$  などがあり、重さの単位も、 $\text{g}$ ・ $\text{kg}$  などがあります。通常、「物質密度」は、体積  $1\text{cm}^3$  あたり何  $\text{g}$  あるかで示されます。

このように物質密度も、重さと体積の2つで表されるので、その単位も、重さと体積の単位が組み合わさってできています。

物質密度は、次の公式で求められます。

$$\text{物質密度}(\text{g}/\text{cm}^3) = \text{重さ}(\text{g}) \div \text{体積}(\text{cm}^3)$$

また、物質密度は、物質ごとに決まっています。そして、それはその物質の量とは無関係です。

では、表を見ながら、以下の問題に答えてください。

物質密度表	
物質	物質密度
金	$19\text{g}/\text{cm}^3$
銀	$11\text{g}/\text{cm}^3$
鉄	$8\text{g}/\text{cm}^3$
アルミニウム	$3\text{g}/\text{cm}^3$

**問1** 体積  $5\text{cm}^3$  で、重さ  $55\text{g}$  の金属があります。その金属は何ですか。金属名を答えてください。

- ア 金                      イ 銀                      ウ 鉄  
エ アルミニウム        オ わからない

**問2**  $10\text{cm}^3$  の銀と、 $10\text{cm}^3$  のアルミニウムとでは、どちらが重いですか。

- ア 銀                      イ アルミニウム  
ウ どちらも同じ        エ わからない

**問3**  $10\text{g}$  の金と、 $10\text{g}$  の銀とでは、どちらが大きい(体積が大きい)ですか。

- ア 金                      イ 銀  
ウ どちらも同じ        エ わからない

**問4** ほんの小さな銀の固まり( $1\text{cm}^3$ )と、巨大な銀の固まり( $1000\text{cm}^3$ )とでは、どちらの密度が大きいですか。

- ア 小さな銀              イ 巨大な銀  
ウ どちらも同じ        エ わからない

**問5** とても軽い鉄の固まり( $1\text{g}$ )と、とても重い鉄の固まり( $1000\text{g}=10\text{kg}$ )とでは、どちらの密度が大きいですか。

- ア 軽い鉄                イ 重い鉄  
ウ どちらも同じ        エ わからない