

A Class-Work on "mathematical activity":A Subject for the Interdisciplinary Studies -Through a Curricular Example "Let's make a mobile" -

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2009-04-01 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 伊禮, 三之, 佐々木, 貴康, 伊藤, 友紀, IREI, Mitsuyuki, SASAKI, Takayasu, ITO, Yuki メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10098/1953">http://hdl.handle.net/10098/1953</a>

## 共通教育科目「数学的活動」の実践 — 「モビールを作ろう」の事例を通して —

福井大学教育地域科学部 伊 禮 三 之  
福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻 佐々木 貴 康  
福井大学教育地域科学部学校教育課程理数教育コース 伊 藤 友 紀

本稿では、共通教育科目「数学的活動」の内容から主に「モビールを作ろう」をテーマとした講義の概要を紹介し、受講した学生の感想文や講義の前後に実施したSD (*Semantic Differential*, 意味測定法) による調査を通して、いくつかの考察を行った。まず、講義の第1時では、おもりの離散的な分布からモーメントの概念を導入し、それをもとに重心の定式化を行い、単位正方形で構成されたモビールの重心を扱った。続いて第2時では、単位正方形を対角線で2分割した直角二等辺三角形を含んだやや複雑な直線図形のモビールの重心を扱った。最後の第3時では、おもりの離散的な場合を連続的な分布に拡張し定積分によって定式化し、それをを用いて曲線図形のモビールや放物線ゴマを作成した。講義前後のSDによる資料や講義に対する感想文などの分析から、学生たちに数学の楽しさや面白さ有用性などを実感させて、好意的に受け止められ歓迎されたことが確認でき、本講義のねらいである数学的活動の意義を伝えることが概ね達成できた。

キーワード：数学的活動，モーメントと重心

### 1. はじめに

本学の共通教育科目に今年度(2008年度)から新たに「数学的活動」(前期2単位)を設置した。科目名となっている数学的活動あるいは数学的問題解決は、次のように捉えられるだろう。

「まず現実世界の中の具体的な課題から本質的な要素と関係を描き出して、数学の問題に定式化する過程がある。次は、これを数学的技法(計算、定理、理論など)を用いて解き、解を求める。第三に、この解を再び現実世界に戻して(解釈して)、もとの課題の解決とする。直接、現実の課題をそのレベルで解決してしまうのではなく、一度数学の世界を通すまわり道を経て解決するというところに、数学的問題解決の特色がある。」(銀林)

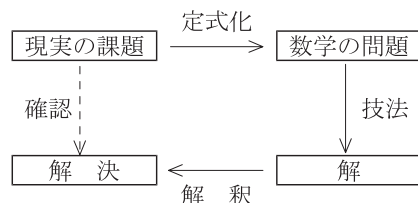


図1 数学的活動(数学的問題解決)

この講義では、数学のもっている系統性・一貫性にこだわらず、身近な課題や数理パズルなど数学上のトピックを取り上げ、ほぼ数回で1テーマを扱う。基本的には、現実の課題から出発して数学の世界でのモデルを作る、あるいは数学の世界で得られた一般的な内容(定理や公式など)を個別具体例で確認するという展開を心がけ、

数学と現実の世界の往還を通して数学の楽しさやおもしろさ、あるいはその有用性が実感できるような構成にした。そのため、講義に積極的に作業や操作、実験を取り入れ、「数学=計算術」という通念に対置するような数学的活動の面白さや意義を伝えることに大きなねらいをおいた。今年度は以下の内容を取り上げた。

- 第1回 転がりの数学—Two-circle roller
- 第2回 モビールを作ろうⅠ—離散分布①(単位正方形による図形)
- 第3回 モビールを作ろうⅡ—離散分布②(三角形を含む図形)
- 第4回 モビールを作ろうⅢ—連続分布(曲線図形)
- 第5回 2進数で遊ぼう!—数当てマジックカードと回転グリルの暗号
- 第6回 嘘発見器付き数当てカード—誤り訂正符号理論
- 第7回 三山くずしの数理—必勝法を探せ
- 第8回 カレンダーマジックの数理
- 第9回 魔方陣で遊ぼうⅠ
- 第10回 魔方陣で遊ぼうⅡ—ラテン方陣から魔方陣へ
- 第11回 ペグ・ソリティアⅠ—1人遊びの数理
- 第12回 ペグ・ソリティアⅡ—十字盤ソリティアに挑戦
- 第13回 4数ゲームⅠ—4数ゲームの数理
- 第14回 4数ゲームⅡ—4数ゲームとトリボナッチ数列

本稿では、第2回から第4回までで扱った「モビールを作ろう」の実践報告を行い、講義の最後の10分間に課している毎回の豆レポートに記された感想や講義の第1回目の開始時と第4日目の最後に実施したSD調査などをもとに、若干の分析を行う。

## 2. 講義の概要—モビールを作ろう I

離散的に分布している重さについて直感で重心の位置を予想し、直感では予想できない場合をモーメントを利用し重心を求める。その原理を使い、単位正方形のみで構成されたモビールの重心を求め、実際に作成し、つり合うことを確認する。

### (1) どこでつり合う？

生徒たちの身近にある糸でつるしてユラユラ揺らめいている飾りのモビールについて話をした後、【質問1】を投げかける。図2のように軽い棒（この棒の重さは無視する）におもりをつるしたとき、どこで支えたらつり合うか、生徒に予想させる。

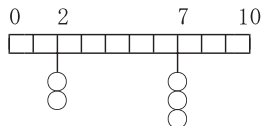


図2 質問1のおもりの分布

すると大半の生徒が「目盛り5のところ」という選択肢に挙手をした。その予想を選んだ理由を聞いてみると、「てこの原理」や「モーメント」など物理的な原理をもとに選択した生徒が多数で、少数ながら「なんとなくそのぐらい」と、感覚で選択した生徒もいた。そこで実験をして確かめてみると、確かに目盛り5のところをつり合っていることを確認することができた。

それを受け、図3のようにおもりが3ヶ所の場合、どこで支えたらつりあうか、【質問2】を投げかけ、生徒に予想させる。

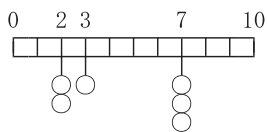


図3 質問2のおもりの分布

予想分布は次の通りであった。

- ア 目盛りが4のところ……2人
- イ 目盛りが5のところ……2人
- ウ 目盛りが6のところ……2人
- エ その他（5と6の間、約4.7,  $4\frac{2}{3}$ ）…多数

【質問1】のときよりも予想に多少ばらつきが生じたが、工学部や理数教育コースの学生が多いためだろう、エを予想を選んだ理由を聞いてみると、【質問1】のときとほぼ同じように「モーメント」と答えが返ってきた。

### (2) モーメントで重心を求める

【質問2】の答えを保留し、【質問1】【質問2】を感覚ではなく理論的に求めるため、モーメントの概念を導入する。今、軸Aを起点とする目盛りのついた軽い棒（棒の重さは無視）があって、距離 $x$  (cm) のところにおもりの重さ $m$  (g) 分の力 $f$ が作用しているとする。

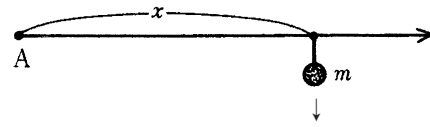


図4 モーメントのモデル図

この力は、軸Aの回りに物体を回転させようとする働きをもつと考えることができる。この回転作用の大きさを、軸Aに関する力 $f$ のモーメント（以下モーメントと略）という。

シーソーをイメージしながら、2つの思考実験を行いモーメントを定式化する。まず、軸Aから距離 $x$  (cm) のところに $m$  (g) のおもりをつるした場合と距離を2倍にした $2x$  (cm) の場合、続いて、軸Aから距離 $x$  (cm) のところにおもり $m$  (g) をつるした場合と重さを2倍にした $2m$  (g) の場合とではどちらの方がモーメントが大きいかといえるか、この2パターンについて考える。すると、モーメントの大きさは軸から作用点までの距離と作用点での力の大きさに比例することがわかるので、モーメントの大きさは

軸から作用点までの距離×作用点での力の大きさとなる。さらに、軸Aを基点とした座標を考えれば、距離は座標に置き換えられ、作用点での力もおもりの重さで代用すれば、

モーメントの大きさ＝目盛り $x$ ×重さ $m$  (g) と定式化できる。

このモーメントを利用して、【質問1】をもう一度解いてみる。目盛り2に2個のおもり、目盛り7に3個のおもりがあり、目盛り $g$ （つまり重心）のところでおもり5個分を支えてちょうどつり合ったと考える。重心には、その物体の重さがすべてかかるという物理的な性質があるので、目盛り0の点を基準とし、軸Aに関するモーメントを考える（単位は省略）と、

$$\text{目盛り2のモーメントは、} 2 \times 2 = 4 \quad \cdots \text{①}$$

$$\text{目盛り7のモーメントは、} 7 \times 3 = 21 \quad \cdots \text{②}$$

$$\text{目盛り} g \text{のモーメントは、} g \times 5 = 5g \quad \cdots \text{③}$$

となる。①と②の downward きのモーメントの合計と、③の upward きのモーメントが等しくないと棒は回転してしまう。ちょうどつり合うためには、

$$5g = 4 + 21$$

が成り立たなければならない。

$$\therefore g = 25 / 5 = 5$$

この値は、最初の実験の結果とも一致する。

【質問2】についても同様に、 $g=28/6 \div 4.7$  が得られる。この値が、保留にしていた【質問2】の解決である。実際に、この点でつり合うかどうかの実験を行ったところ確かにつり合った。以上のことから、モーメントを利用すると、おもりの分布が2ヶ所の場合よりもより、それ以上であっても簡単に重心を求められることが分かった。

(3) 単位正方形を組み合わせたモビール作り

続いて、厚紙で切り抜かれた「7」の重心を計算で求め、その位置に穴を開けて糸を通してモビールを作成する。

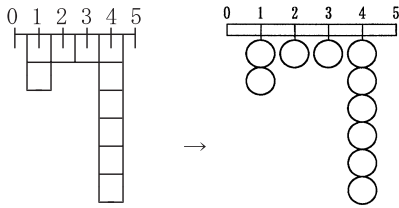


図5 7の字のモビール

このモビールの重心を求めるには、図5右のように考えればよい。重心の位置に糸を通して厚紙をつるとモビールはきれいにつり合い、計算で求めた重心が間違いないということを目で確認することができ、学生たちから笑顔がこぼれた。

今度は、モビールの途中に出っ張りがある場合、どう考えるのかを検討するため、「F」の字のモビールを取り上げた。まず、【質問3】で縦線の部分をどのように扱うか、図6のア、イを提示して学生に予想させる。

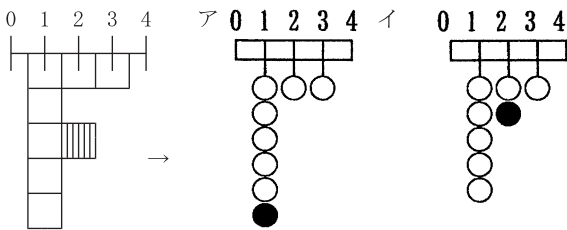


図6 Fの字のモビールと予想図

すると、予想ア「縦線の部分は、目盛り1の部分とつながっているので、目盛り1の一番下についているとして計算する」もの11人、予想イ「縦線の部分は、目盛り2の下にあるので、目盛り2の真下につけて計算する」もの27人という分布になった。

アとイの場合の重心gをそれぞれ計算すると、アが $g \div 1.4$ 、イが $g \div 1.5$ となった。差が0.1程度しかないため工作用紙で作成した大きいサイズの「F」を用意してどちらが正しいのか実験で確かめた。それぞれの重心の位置に穴を開けて糸を通してつると、イの場合につり合った。

3. 講義の概要—モビールを作ろうII

モーメントを利用して重心を算出し、そこにつまようじをさすことで変形ゴマを作成する。また、三角形のモーメントを考え、直角二等辺三角形と単位正方形を組み合わせたモビールを作成する。

(1) 変形ゴマ作り

前回の復習も兼ねながら、大小2つの正方形の一部分を重ねた図形と、正方形の一部分を取り除いた図形のコマを作る。

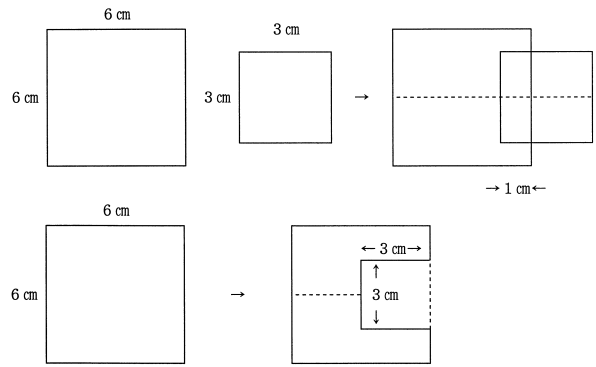


図7 変形ゴマを作る

これらの図形の重心を求めるには、重ねた図形の場合は、目盛り3に36の重さが、目盛り6.5に9の重さがかかっていると考えればよい(図8)。計算を単純化するため、重さを $36:9=4:1$ として、次のように立式して重心gを求めればよい。

$$(4 + 1) \times g = 3 \times 4 + 6.5 \times 1$$

また、取り除いた場合は、目盛り3に36の重さがかかるが、取り除く分のモーメントが反対方向へ働くため、

$$(4 - 1) \times g = 3 \times 4 - 4.5 \times 1$$

となる。

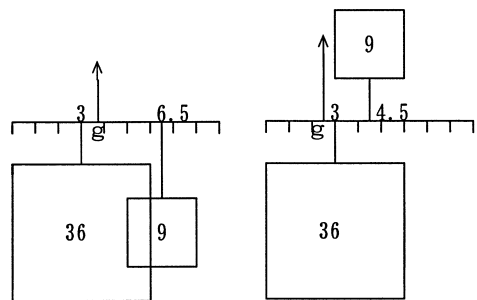


図8 変形ゴマの重心へのヒント

前時の重心の求め方を理解していれば、そう難しいことではない。実際、ほとんどの学生がヒントの図8を提示しただけで重心を算出していた。重心に穴をあけ、つまようじをさすとコマが完成する。変わった形のコマだが、正しく重心を求めることができていれば、とてもきれいに回ることができる。このコマの作成も、モビール同様、計算で求めた重心の正しさが、コマが回るという

現象を見ることで確認できる。

(2) 三角形のモーメント

今度は、この講義テーマの課題となるオリジナルなモビールをいくつか例示し(図9)、正方形によるモビールよりもやや複雑な図形のモビールが扱えるように、正方形を対角線から2分割した4つの直角二等辺三角形のモーメントを考えていくことにする(図10)。

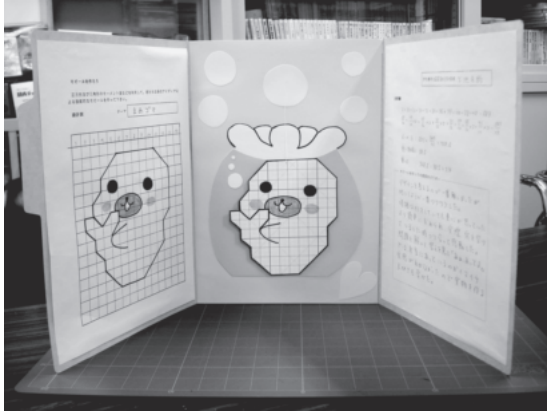


図9 例示のモビール(下池未紗さんの作品)

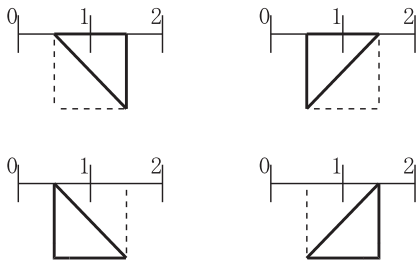


図10 直角二等辺三角形のモビール

図10の左上を例にそのモーメントを求めてみる。

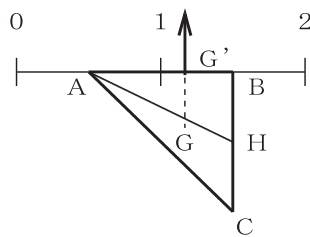


図11 直角二等辺三角形の重心

図11のように点Aと辺BCの中点Hを結び、線分AH上の点Gが、△ABCの重心とする。

すると、AG:GH=2:1となり、Gから辺ABへおろした垂線との交点をG' とすると、

$$AG':G'B=2:1$$

となる。これよりG'の目盛りを求めると、

$$G'の目盛り=Aの目盛り+AG'の長さ$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$$

となる。したがって、△ABCのモーメントは、

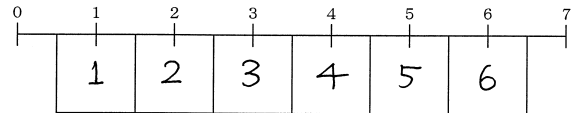
$$\triangle ABCのモーメント=G'の目盛り$$

$$\times \triangle ABCの重さ(面積)$$

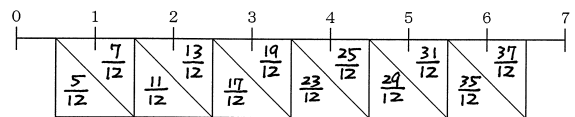
$$=\frac{7}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

となる。残りの三角形についても同様の計算をすると、右上が $\frac{5}{12}$ 、左下が $\frac{5}{12}$ 、右下 $\frac{7}{12}$ となる。また、これらを平行移動し三角形のモーメントは重心の位置を1だけ平行移動して計算を行えば容易に出る。ここで、モーメントの合計が簡単に求められるよう図12のように表にしておくとう便利である。

① 正方形のモーメント表



② 三角形のモーメント表(1)



③ 三角形のモーメント表(2)

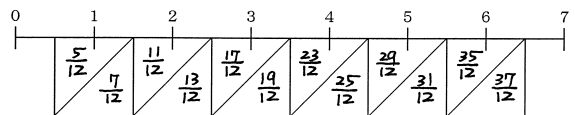


図12 正方形と三角形のモーメント表

(3) 直角二等辺三角形を含むモビール作り

図13に示した「家」のモビールは、モーメント表を利用してモーメントを記入しておく、それらの数値の合計がモーメントの合計になる。重さ(面積)の合計は、正方形の個数と三角形の個数(2個で1)を数え上げるだけである。すると、

$$\begin{aligned} \text{モーメントの合計} &= 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 4 + 5 \times 6 \\ &\quad + \frac{7+13+19+23+35}{12} \\ &\approx 77.1 \end{aligned}$$

$$\text{重さ(面積)の合計} = 4 + 5 + 4 + 6 + \frac{1}{2} \times 5 = 21.5$$

$$\therefore \text{重心 } g = 77.1 \div 21.5 \approx 3.6$$

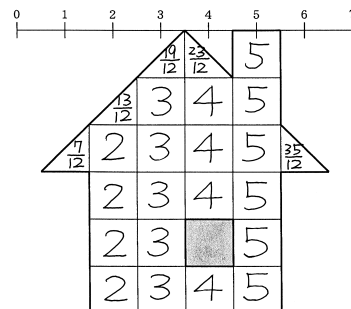


図13 家のモビールへのモーメントの記入

モビールの重心を求めたあと、3.6の位置に糸を通してつり合っていることを確認した。ある工学部の学生は、このときの経験を次のように記している。「実際にモビールを作って、釣り合ったときは妙に嬉しい気分になった。それは現象を自分の目で確かめることができた喜びと、現実の課題と数学がこんなに密接していることをはじめて感じたからである」。

こうして、より複雑な図形のモビールも作るできるようになった。この講義のあと、モーメント表を利用して、自分で図案を考えオリジナルなモビールの作成を課題とした。非対称図形であることと三角形を含んだ図形にすることの2つが条件である。図14は、学生の作品の一部である。

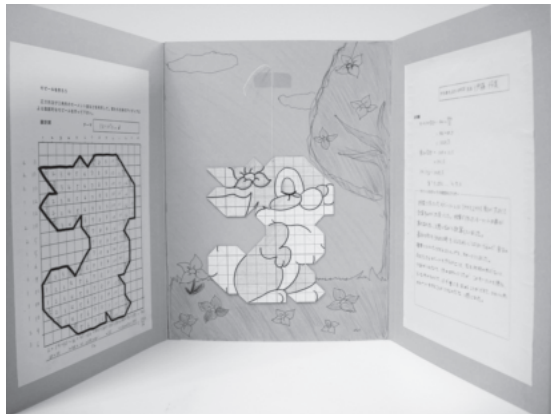


図14 学生の作品（伊藤怜美さん）の一部

#### 4. 講義の概要—モビールを作ろうⅢ

連続的に分布している曲線図形の重心について、積分を利用し求める。その原理を使い、曲線で囲まれた様々な図形のモビールを作成する。

##### (1) 曲線図形の重心

【質問4】を投げかける。図15を実際に提示しながら曲線を含む図形の重心がどこにくるか、学生たちに予想させる。

予想分布は、次のようになった。

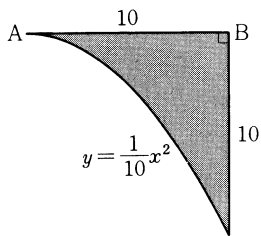


図15 放物線のモビール

- ア Aから5cm ( $\frac{1}{2}$  の位置) のところ …… 0人
- イ Aから6.7cm ( $\frac{2}{3}$  の位置) のところ …… 9人
- ウ Aから7.5cm ( $\frac{3}{4}$  の位置) のところ …… 26人
- エ その他 …… 0人

そう考えた理由を聞いたところ、ほとんどの学生が直感で選択していた。解答は保留し、次に進んだ。

今までは重さが離散的に分布しているモビールの重心を考えてきたが、今度は連続的に分布している曲線で囲まれたモビールを考えてみる。

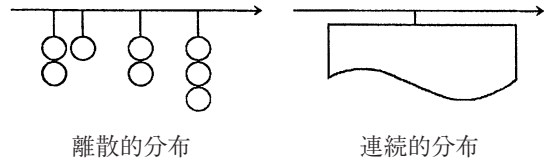


図16 重さの離散的な分布と連続的な分布

重さが離散的な分布の場合、重心  $g$  は

全体の重さ  $\times g =$  各点のモーメントの合計で求めることができた。この式を連続的な分布の場合に拡張し、図17左図のような重さが連続的に分布している物体の重心を  $g$  とする。

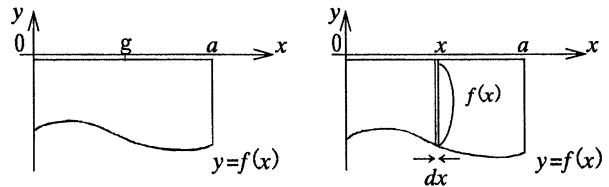


図17 重さの連続的な分布と点  $x$  にかかる重さ

面積1の重さを1と考えると、この物体の全体の重さ(面積)は、定積分によって、

$$\text{全体の重さ (面積)} = \int_0^a f(x) dx$$

となる。次に図17の右図のように目盛り  $x$  のところに高さ  $f(x)$ 、無限小幅  $dx$  の長方形がつるさされていると考えると、目盛り(点)  $x$  におけるモーメントは、

点に  $x$  おけるモーメント  $= x \times f(x) dx = x f(x) dx$  となる。つまり、これを積分すればモーメントの合計が得られる。

$$\text{モーメントの合計} = \int_0^a x f(x) dx$$

よって、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{重心の目盛り } g &= \frac{\text{モーメントの合計}}{\text{重さ (面積) の合計}} \\ &= \frac{\int_0^a x f(x) dx}{\int_0^a f(x) dx} \end{aligned}$$

この式を利用し、【質問4】を解く。

$$\begin{aligned} g &= \frac{\int_0^{10} x \times \frac{1}{10} x^2 dx}{\int_0^{10} \frac{1}{10} x^2 dx} = \frac{\left[ \frac{1}{40} x^4 \right]_0^{10}}{\left[ \frac{1}{30} x^3 \right]_0^{10}} \\ &= \frac{3}{4} \times 10 \end{aligned}$$

その重心の位置に穴を開けて糸を通しつるしてみると、予想通りきれいにつりあった。曲線図形までもモビールにすることができた。ここまできると、どんな図形でも重心を求めることができ、モビールを作ることができるように感じられる。

(2) 曲線図形のモビール作り

単位正方形と直角二等辺三角形、さらに曲線図形の重心も求められるようになったため、作れるモビールの形も多彩になった。

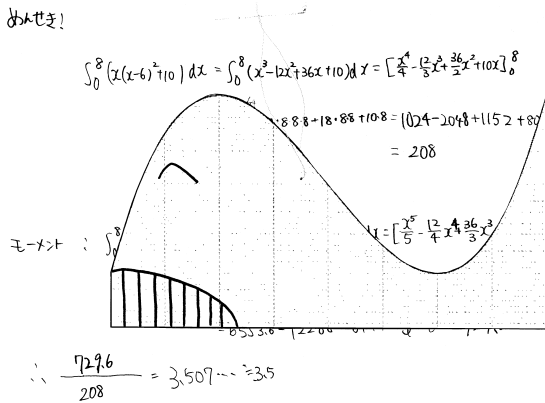


図18 鯨のモビール

そこで、鯨の形をしたモビールの作成に挑戦する(図18)。計算がやや複雑で解くことは大変だったが、きれいに釣り合った鯨を見ると、大きな達成感を感じられた。

(3) 曲線図形のコマ作り

このテーマの締めくくりとして、モビールと同様にx軸に対称な曲線図形の重心を求め、その重心につまようじをさし、放物線や半円のコマを作成した。

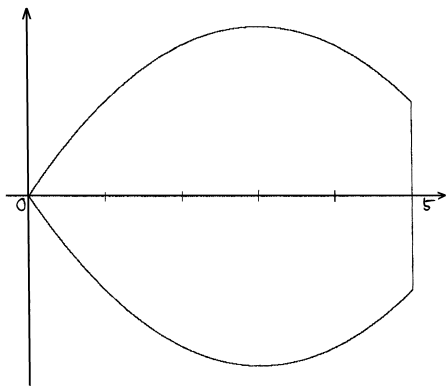


図19 放物線  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$  のコマ

5. 講義の感想文とSDによる考察

(1) 講義の感想による考察

「数学的活動」に関して提出された学生たちの感想文(44名、毎回講義後に提出される豆レポートの感想文)をもとに、いくつかのキー・ワードを拾って若干の考察をくわえておこう。

1) 楽しさ・おもしろさの実感

学生の感想文を読むと、「楽しい」「おもしろい」「興味深い」などの楽しさを実感した言葉を多く記述していた。

例えば「実際に作ってみることが楽しい」「身近にある数学を感じ取ることができて面白かった」「学び手、教え手ともに楽しくなれる講義だった」「工作を交えて授業をすると、講義だけのものよりも楽しむことができるので良いと思う」「ただ計算する講義より分かりやすく楽しい」「久しぶりに数学の楽しさを味わった」などである。

実際に作ってみる・やってみるという体験からの学びが、数学的活動の講義の楽しさを実感する大きな要因となったといえる。自分で作ってうまくいくかどうかを試すことによって、興味・関心を抱いて講義に取り組める。実際にやってみてうまくいったとき「嬉しい」「感動した」「驚いた」という感想を多く記述されている。また、うまくいかなかったときには「悔しい」という感想もあり、次こそはという意欲を引き出させている。

また、「次回の授業が楽しみです」「これからは楽しみだ」という今後への期待を示す感想もあり、その回の講義の楽しさ・面白さを実感したことからの感想だといえよう。

2) 「難しい」が「分かる」という実感

講義が進行するにつれて、重心の定積分による定式化など、扱う内容も次第に拡張されていったためか、後半は「複雑だ」「大変」「難しい・難しそうだ」という感想が多く見られるようになった。この講義は共通教育科目として開講されているため、工学部の学生のようにもともと数学が得意な者がほとんどだが、なかには数学が苦手な者も受講している。その学生たちにとって「数Ⅲ」に関する微積分などを扱う場合、「難しい」という印象が強かったようだ。

感想の中には「最初はまったく考えられなかったが段階を踏んでいくことでかなり楽に分かった」「かなりややこしいが、段階を踏んでここまできているので分かりやすい」「導き方が上手なので分かりやすい」「最初は難しそうに思えたけど、やり方が分かれば意外と簡単だった」などがあった。これは発展的な内容であっても、考え方をきちんと理解していれば「難しい」から「簡単」へ変化が生まれるといえる。また、教える側が一つ一つ段階を踏んで説明し、考え方を定着させることが重要であることも示している。実際に体験すること、手順を追って説明すること、グループでの討論などを行ったことで「分かりやすい」「理解しやすい」といった感想も多くあった。

さらに「積分の計算が出てきたけど、コマを作る、モビールを作るという目標があったので楽しくできた」「計算が難しいけど、いざ求めると面白く感じられる」という難しいけれどもうまくいったときの達成感を味わえるこ

とが良いという感想もあり、難しいから「諦める」のではなく、難しいけれど「頑張る」という意欲へ転化していく学生が多く見られた。

### 3) 有用性の実感

数学の有用性について触れた感想も見られた。「積分の活用法をはじめて知った」「実際に自分で作ってみて、寸法などを測るときにも計算が必要となったから、数学はなくてはならない教科だと改めて実感した」「積分のような難しい高校数学でも、社会生活の中で利用されていると実感した」などがあげられる。数学が身近なところで使われているという驚きが表されている。

また、「子どもたちに教えてあげたらすごく喜ぶだろうと思う」「子どもも飽きずに楽しく学べると思う」「子どもは工作などが結構好きなので楽しんで取り組めるのではないか」「高校の微積分の計算を練習するのにとても役立つと思った。楽しく積分を学べるようになるのではないか」という感想も多く見られた。教育地域科学部の学生はもちろん、工学部の学生からも学校現場の授業づくりへの可能性を示す感想が出されていた。

### 4) 数学観等の変容

数学についての印象も大きく変化しているといえる。「おもちゃも数学的観点からしっかりと証明できることを知った」「(積分について)高校の時にやっていたら数学への関心が強くなったかもしれない」といった感想からもうかがえる。数学に対する印象が変わったことで、「日常生活で使える数学を探したい」「世の中の現象に対して常になぜ?という疑問とその原理を考えられるようになりたい」「何気ないものにも何か工夫がされていないか目を向けるようにしたい」といったように、数学は「紙の上」だけのものではなく、数学と現実世界との関わりに目を向けた探究心を引き出せたと考えられる。

また、明確に数学観の変容を語る学生もいた。「(前略)これまでの私の中で、数学は、紙面上で計算を行うだけのものだとばかり思い込み、日常生活で使うものといえ、四則演算ぐらいだと思っていた。しかしこの講義を聴講したことにより、その考えはなくなった。ちょっとしたおもちゃの中に数学が潜んでいたり、美術のような造形物の中にも数学が潜んでいたりすることを知ることができた。今まで、私の中で狭く閉じ込められていた数学の世界を広げることができたのではないかと思う。」

(教育地域科学部言語教育コースの学生)。「『数学的活動』を受講してみて、数学に対する考え方や見方が少し変わったような気がします。以前は、数学は微分や積分などといった単に計算をするだけのものと思いましたが、この講義を受講してみて、現実世界の問題をそのままのレベルで解決するのではなく、わざわざ数学の世界で問題を解決し、現実の世界に戻って解釈することによって、数学は単なる計算をするだけの道具ではないということがわかりました。数学は以前から好きでしたが、これにより「数学」という道具の新しい使い方を発見す

ることができ、さらに数学が好きになりました。」(工学部の学生)。「2つ目のテーマは「モビール」でした。ここでは最初に、つり合いの位置、つまり重心を求めることから始まりました。私は、工学部であるので物理が得意で、重心を求めることには苦労はしませんでした。しかし、これまでの物理の学習において、重心を求める機会はたくさんありましたが、それは紙の上での話で、実際の現実世界で試すことは全くとっていいほどありませんでした。「本当に、この位置で支えるとつり合うのか?」という疑問を持ったまま今まで生きてきました。しかし、この講義では、数学という道具を使って重心の位置を求めたのを、現実の世界に戻って、実際につり合わせてみるというところまでやりましたので、実感がわきました。また、自分で好きな形のモビールを作ることにより、数学のおもしろさも実感することができました。さらに、関数で表現される図形や変形ゴムの重心の位置も求めることができ、数学の力はすごいものだなと思いました。」(工学部の学生)

「単に計算をするだけのもの」「紙面上で計算を行うだけ」の数学が、現実世界との接点を垣間見ることによって、「狭く閉じ込められていた数学の世界を広げる」ことになり、「数学」という道具の新しい使い方を発見して、「数学の力はすごいものだ」という数学の威力に対する信頼につながっていったといえるだろう。

## (2) SDによる分析・検討

「良い-悪い」「好き-嫌い」など情緒的な対修飾語を両極に配置した25尺度を用意し、概念の内包的意味を測定するSDによって、「数学的活動」の講義から表象される情緒的イメージがどのように変化したのかを分析する。なお、SDは前川公一の開発した「授業評価観点表」を、彼自身が課題とした一部を改変して使用する(藤井)。

第1回目の調査ではプラスのイメージと考えられる平均値2.5未満の項目は、25項目中半数を超える以下の14項目にのぼった。(1)「明るい-暗い」/ (4)「おもしろい-つまらない」/ (5)「活発な-おとなしい」/ (6)「真面目な-不真面目な」/ (9)「まとまりのある-ばらばらな」/ (11)「愉快な-不愉快な」/ (13)「自由な-きゅうくつな」/ (14)「好きな-嫌いな」/ (16)「良い-悪い」/ (17)「楽しい-苦しい」/ (18)「目のさめる-眠くなる」/ (21)「満足な-不満足な」/ (22)「積極的な-消極的な」/ (24)「とけこめる-とけこめない」。

この講義の受講者の大半が工学部や教育地域科学部の理数教育コースの学生であることを考えれば、数学に対して好意的な態度を持っていることは肯けることである。プラスのイメージである平均値の低い項目から見ると、数学はおもしろく(4)、真面目で(6)、好きで(14)、良い(16)、そして、まとまりがあつて(9)、楽しい(17)



と感じていることが分かる。

全体的には良好であるが、その一方で、マイナスのイメージを表象している項目もいくつかある。具体的に平均値の高い項目から順に考えると、数学やその授業は、複雑で (15)、緊張し (10)、そして、難しく (12)、重い (19)、冷たい (3) とのイメージも持っていることがうかがえる。

次に、4回の講義終了後の変化を見てみよう。第4回目終了時では平均値2.5未満の項目は25項目中、(23)「短い-長い」を除いた24項目が、プラスのイメージへと大きく変化している。唯一2.5以上の(23)「短い-長い」の項目も、平均値3.0から2.6へとプラスの方向へ移動している。これはこれまでに表象されていた数学に対するイメージが、数学的活動の「転がりの数学」「モバイルを作ろう」の授業によって、もともとの好意的な項目は、(6)(9)(18)を除けばさらにプラスのイメージへと変化し、マイナスイメージはプラスへと変化していることを示している。

この変化が有意なものかどうかを検定してみた。第1回目と第4回目では評点のばらつきが大きく、等分散仮説が棄却される項目がかなりあった。(3)(5)(6)(7)(9)(10)(11)(13)(14)(16)(17)(18)(19)

(20)(21)(22)の16項目である。これらについては分散が等しくないと仮定した2標本によるt検定を行い、他の項目については通常のt検定を行った。その結果、1%水準で有意な項目は、(1)(2)(3)(5)(6)(7)(8)(10)(12)(15)(19)(20)(21)(25)の14項目、5%では、(11)(13)(17)(23)の4項目、合わせて18項目が有意な変化であった。

変化の大きさを示すt値の高い項目を順にみていくと、「数学的活動」の授業は、明るく(1)、温かくて(3)、軽い(19)感じの、リラックス(ゆるんだ)した(10)授業であり、わかりやすく(20)、簡単で(15)、やさしい(12)ものであると感じられていて、柔らかさ(2)があって、らくで(25)、のびのび(8)としたものと受け止められているといえるだろう。

マイナス方向への変化が、(6)「真面目な-不真面目な」、(9)「まとまりのある-ばらばらな」、(18)「目のさめる-眠くなる」の3項目あるが、(9)と(18)については有意な差はない。(6)の「真面目な-不真面目な」については、この講義が「実際に見たり体験したりすることで簡単に理解できて楽しい」「講義だけのものより楽しめた」「ただ計算する講義よりも分かりやすい」などの感想にみられるように、問題を解く前に予想

表1 講義前後の平均値の差の検定

項目	講義前	講義後	t
(1)	2.44	1.57	6.07**
(2)	2.80	2.17	3.62**
(3)	3.00	2.12	* 5.71**
(4)	1.44	1.38	0.42
(5)	2.22	1.69	* 2.90**
(6)	1.46	1.95	*-3.78**
(7)	2.61	2.14	* 2.45**
(8)	2.66	2.02	3.11**
(9)	1.83	2.00	*-0.99
(10)	3.17	2.43	* 4.58**
(11)	2.15	1.83	* 1.87*
(12)	3.15	2.43	3.82**
(13)	2.27	1.93	* 1.81*
(14)	1.78	1.57	* 1.22
(15)	3.17	2.43	4.39**
(16)	1.80	1.55	* 1.57
(17)	1.83	1.55	* 1.70*
(18)	2.10	2.12	*-0.12
(19)	3.05	2.29	* 4.71**
(20)	2.73	1.98	* 4.42**
(21)	2.05	1.64	* 2.65**
(22)	2.00	1.83	* 1.03
(23)	2.98	2.62	1.94*
(24)	2.02	1.83	1.10
(25)	2.93	2.25	3.57**

被験者は講義前41名、講義後42名。  
\*\*は1%水準で有意、\*は5%水準  
で有意。\*は等分散仮説の棄却項目。

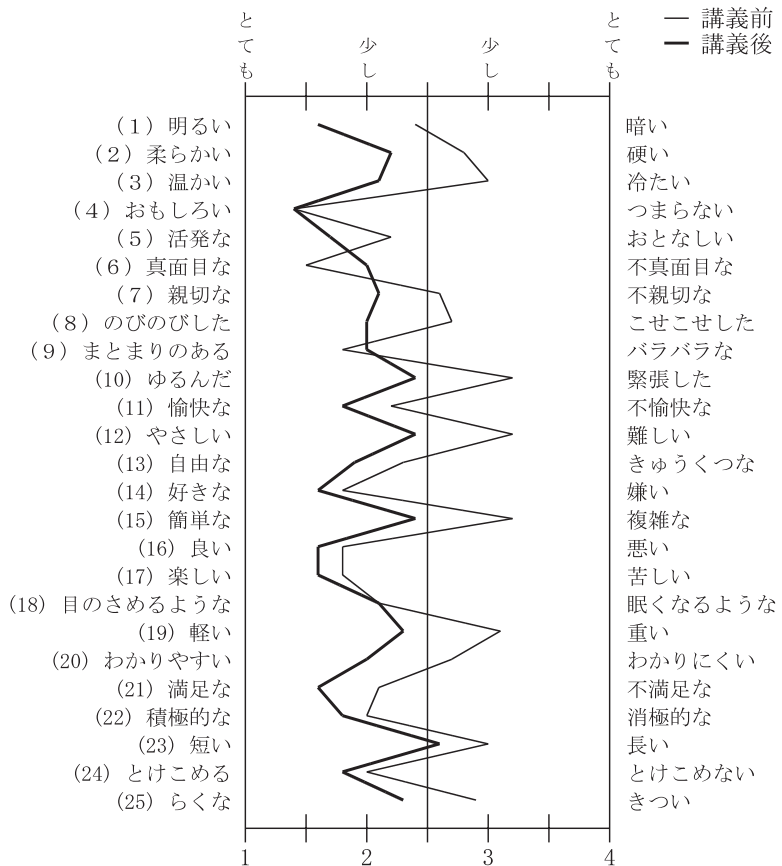


図20 講義前後のSDプロフィール

をし実験をしたり、講義中にモビールや放物線ゴマを作成したりと、通常の数学の授業に対するイメージとかなりかけ離れていたためではないかと推察される。つまり、学生たちにとって「真面目-不真面目」に対しては作業等を伴った講義に肯定的なイメージを表象しているものであり、(6)の項目は教師側、学生側でイメージの持ち方が逆転していると考えられる。

## 5. おわりに

〔前略〕数学的活動とは、先ほど述べたように、計算術ではなく、数学と現実の世界の往還をした上で現実世界の課題を解くものであります。その意義は、現実世界の課題の解釈を的確にすることにあると考えています。そういった中で、この授業は、的確にその点について、学生に学ばせるシステムが出来上がっていると感じました。まず授業開始時に現実世界の問題提起を行い、それを学生に解かせる。そうした中で、ヒントを出しつつ、現実世界の課題の解釈をさせ、さらに解釈の後、定理を提示する。定理を説明した後、もう一度学生に課題を解かせ、その後解を提示する。解が多数ある、また、人によって解が違うものについては課題として提出させ、その理解を見る、といった授業内容であったと考えています。その流れの中で、学生が十分に理解できるような解説を考え、限られた時間の中での時間配分など、学生に対する先生の心遣いが良く感じ取れました。(中略)一般教養の授業で、これほど中身のある授業はほとんど受けていなかったため、久しぶりに楽しんで課題に取り組むことが出来ました。〕(工学部4年次)

身に余る感想ではあるが、本講義のねらいを的確に捉え、そのねらいを達成するための授業運営の構造(教育方法)にまで目を注いでいることには驚きである。ともあれ、この感想からもわかるように、本講義の目的は、「モビールを作ろう」を通して数学的活動の面白さや楽しさとともにその意義を学生たちに伝えることにあった。SDや感想文の分析から明らかなように、今回の実践は、当初のねらいがほぼ達成されたといえるだろう。

学生たちの感想から垣間見える数学教育の課題を簡単に記しておくことにしたい。「実際にもものを作って実験するのが小学校以来で新鮮だった」という感想は、講義に対する肯定的な記述といえるが、見方を変えると、中学校・高等学校において現実的な課題と結びつけた数学的活動を取り入れている教育実践は、そう多くはないということをも示している。黒板に板書していく講義型の学習や淡々と演習問題をこなしていく学習が多く、実際にもものを作る・実験するといった数学と現実世界との往還的な学習は少ないように感じられる。数学の活用能力が叫ばれる昨今、学校教育の現場において数学的活動を充実していくことが、今日の数学教育において課題となっているように思われる。

全講義終了後に課した「数学的活動の講義を振り返っ

て」のレポートから一部を抜粋して紹介し、本稿の結びとしたい。

〔前略〕現象を理解する際に、数字や計算だけではなく、感覚的に現象をつかむことでより数学的な理解にもつながっていたと思う。この授業では我々の身近な現実をまずは簡単な紙模型を作ったり、実際にパズルを行うことにより、現象を視覚的、感覚的に体感することができた。通常なら、「当たり前」としか思っておらず、深く考えたことないことが多かった。しかし、これらの現象に対し、数学的にもものを見て、数学の世界への定式化や、数学的技法により、解や仕組みを得ることができると理解した。*Two-circle roller* やモビールは実際に作って重心の位置を確認することで数学的な表現が正しいことを確認できたと共に、数学的に記述できるのだということを知るのに大きく貢献したと言える。私は建築建設工学科で力学を学んできたが、断面一次モーメントについては数値的な求め方しか経験したことがなく、目で確認したことがなかった。また、おもりのモデルとして、断面一次モーメントを理論的に簡単に考えることができることを知ったのも、この授業を受講したからであった。したがって実際にモビールを作って、釣り合ったときは妙に嬉しい気分になった。それは現象を自分の目で確かめることができた喜びと、現実の課題と数学がこんなに密接していることをはじめて感じたからである。そして、断面一次モーメントを本質的に、さらに分かりやすく理解した。すなわち、実感と数学的理論を比較して、感覚的に当たり前の事柄を、より本質的に理解、納得できたということがこの授業での大きな収穫であった。このように、実際に模型やゲームを演習として取り入れるスタイルの授業により、本質的に現象を理解することができ、より楽しく、有意義に数学と現実の両者を学ぶことができると強く感じた。そしてこのような形式をこれからも続けることにより数学の楽しさや意味を多くの学生に知ってもらうことができるのではないかと思う。数学は計算することではなく、このような現象の本質的理解が一番面白く、興味をひくのだと思う。今日の教育問題として、子供たちの理科離れがある。このように数学の本来持っている面白さを小中高生に伝えることができれば、数学嫌い、理科嫌いといった、理系分野への敬遠ではなく、逆に興味をもってもらえるのではないかと感じる。ぜひ、このような教育を現在の数学に加えて取り入れていくべきだと思う。〕

引用・参考文献

- 黒田俊郎・小林昭編著（1990）『たのしくわかる数学 100 時間（上）』あゆみ出版，pp.94-101
- 黒田俊郎・小林昭編著（1990）『たのしくわかる数学 100 時間（下）』あゆみ出版，pp.114-117
- 黒田俊郎（2004）『授業をどう組み立てるか—「数学教育法通信」より—』（数教協ゼミナール 60）数学教育協議会，pp.4-7, pp.12-15
- 伊禮三之（2001）『《実験数学》による否定的な〈信念〉を組み替える試み—教職希望学生に対する「数学概論」の講義を通して—』『第 34 回数学教育論文発表会論文集』日本数学教育学会，pp.31-36
- 伊禮三之（2001）『「数学と現実世界との関連を重視した教材の工夫—数学の有用性を実感させるために—」』『平成 12 年度（後期）研修報告集録第 29 集（2-1）』沖縄県立教育センター，pp. 109-114
- 伊禮三之（2004）『重心（center of gravity）の不思議—「モビールを作ろう！」の授業から—』『数学教室』No 634, pp.43-46
- 伊禮三之（2006）『「モビールを作ろう！—卒業課題にオリジナルのモビールを！—』『数学教室』No 651（連載『楽しい数学』の 1 年⑩）国土社，pp.72-77
- 伊禮三之（2006）『「重心と定積分—数学の有用性を実感させる放物線のコマを作る—』『数学教室』No 659, pp.50-59
- 藤井悦雄監修，青木哲次他著（1982）『小学校授業研究法マニュアル』教育出版，pp.100-121
- 銀林浩（1987）『人間行動からみた数学』『岩波講座 教育の方法 6 科学と技術の教育』岩波書店，pp.109-138

**A Class-Work on "mathematical activity" : A Subject for the Interdisciplinary Studies**

— Through a Curricular Example "Let's make a mobile" —

Mitsuyuki IREI, Takayasu SASAKI, and Yuki ITO

Key words : mathematical activity, mobile and center of gravity