学び手の理解を築きあげる重層的表現の推敲：フロイデンタール研究所の氷山モデル

学び手の理解を築きあげる重層的表現の推敲
～フロイデンタール研究所の氷山モデル～

佐分利 豊

1　はじめに

本稿の目的は、NCTM（National Council of Teachers of Mathematics、全米数学教師協議会）の中学校数学の雑誌、Mathematics Teaching in the Middle School に掲載された「氷山の一角の下に～学生の理解を育む表現の使用～」[1]（以下、その 3 人の著者のイニシャルを並べて、[WBD]と略記）と題する数学教員の力量形成に関する論説記事の翻訳紹介を行うことです。[WBD]が掲載されたのは中学校数学の雑誌ではありますが、その主題は教師の力量形成のためのとりくみということで、中学校に限らず、小学校や高等学校の数学教育関係者にとっても参考になるのではないかと思われます。

NCTM は、1989 年の「行動計画」[2]で数学教育の改革を呼びかけて以来、今日までその課題にとりくみ続けています。同協議会の「学校数学の原則とスタンダード」[3]（2000）によれば、そのめざすところは、

- すべての学生が、今日の変化しつつある世界で数学が果たす役割を理解し、
- それを使いこなすことができるようになることをめざした
- 公平な数学教育の実現

ということになるようです。NCTM スタンダードは学生の数学理解と活用力の養成を一体的にとらえ、学生の数学学習に期待することとして、次の 4 点を挙げています:

- 学習事項の各々を孤立化させて捉えるのではなく、それらの間の関連性を探究すること
- 問題解決をめざして、学生独自の推論や方略を生みだし、その説明を行うこと
- 問題解決のための道具を適切に使うこと
- 学生たちが生みだした互いの方略に耳を傾け、理解すること

こうした学習を築きあげていく上での鍵は、学生たちの数学理解を表現する言葉や概念の教室内での共有という点にあると考えられます。[WBD]では、①学生たちが数学理解を築きあげていくコミュニケーションで交わされる言葉を含むさまざまな表現についての分析と、②教師がその問題を把握し、それにもとづく授業作りを行うための力量形成につながる「氷山作り」（第 3 節参照）と呼ばれる実践的なとりくみの提案がなされています。

今日、日本でも同様の改革がめざされ、数学的活動とそれにもとづくコミュニケーションを通した数学理解ということが強調されています。[WBD]でなされている提案は、日本の現状のもとでも適用可能なものであるようにも思われます。現場の先生方による同種の問題に対するとりくみの経験などを含め、[WBD]に関するご意見などをいただければありがたく存じます。

以下、[WBD]の 3 人の著者と彼らの数学教育の改革に関するとりくみについて簡単に紹介し、その背景説明としたいと思います。

この 3 人の著者たちは、オランダの幾何学者、フロイデンタールが提唱した RME（Realistic Mathematics Education、現実にもとづいた数学教育）という哲学をベースとした数学教育の改革にとりくんでいる人たちです。そのうちのデビッド・C・ウェブさんは、アメリカのコロラド大学のフロイデンタール研究所 USA の研究者で、授業中の学生の学びを見とるための教師の力量形成に関心を持っているとのことです。ニナ・ボスウィンケルさんとトルース・デッカーさんは、オランダのユトレヒト大学のフロイデンタール研究所の研究者で、数学を学生にとってより近づきやすいものとするための教師の指導的介入（instructional intervention）に関心を持っているとのことです。

RME の教育哲学を実践的なレベルで要約すると次のようになるようです[4]。

- 学生は数学の再発見者であり、それは教師によるガイドと、学生に現実の数学化を意識させようとする働きかけによって実現されるのである。
- この再発見は、学生の問題解決へのとりくみと、集団的・個人的な活動を通じてなされるのであるが、そこでは教室全体を巻きこんだ、予想や、説明、および正当化に焦点を当てた議論が決定的な役割を果たすのである。
- この過程における教師の指導的ガイドが授業の成否を分けるのであるが、教師たちはそこで、慣用的な数学用語や記号の導入を徐々に進め、それらの意味理解、および使用についての学生たちの同意と賛意を得ることができるよう努めるのである。

アメリカの RME のグループは、こうした哲学にもとづき、オランダの RME のグループの支援を得て MiC（Mathematics in Context、状況の中の数学）[5]という中学校段階の数学のカリキュラムを開発し（1991-1997）、その実践・指導にあたっています。[WBD]で紹介されている「氷山作り」という教師の力量形成のとりくみについても、当初、オランダの RME のグループによって開発・実践がなされ、それをアメリカの RME のグループがとり入れて実践が進められているものです。とはいえ、このとりくみは必ずしも MiC の使用を前提としたものではなく、どのようなカリキュラム（教科書）用いたグループにとっても活用可能な活動であるということを断っておきます。

なお、本稿の以下の構成は、第 2 節で[WBD]を読む上での注釈を行い、第 3 節で[WBD]の翻訳紹介を行うという形になっています。

文献

[1] David C. Webb, Nina Boswinkel, Toruus Dekker, Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding, *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol. 14, No. 2, NCTM (2008)

[2] NCTM, *An Agenda for Action* (1989)

[3] NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics* (2000)

[4] Margaret R. Meyer et al., *Mathematics in Context Teacher’s Implementation Guide*, Encyclopedia Britannica (2010)

[5] Mathematics in Context Development Team, *Mathematics in Context Level 1-3*, Encyclopedia Britannica (2006)

2 [WBD]を読む上での注釈

上で述べましたように、[WBD]では、学生たちが数学理解を築きあげていくコミュニケーションで交わされる言葉を含むさまざまな表現についての分析が行われています。RME のグループはそれらの表現を 3 つのカテゴリーに分類しているのですが、先に触れた「氷山作り」の活動も、実際のところは、授業で交わされるさまざまな表現をそれらのカテゴリーに分類する作業ということになります。しかし、それらのカテゴリーの呼び名が数学教育関係者の間で必ずしも一般的ではないようにも思われますので、ここで、拙いながらあえてその注釈をしておくことにします。

RME のグループは、その 3 つのカテゴリーを「形式化されていない表現（informal representation）」、「形式化につながる表現（pre-formal）」、「形式化された表現（formal representation）」というように呼んでいます。以下で、これらの言葉、特に「形式化されていない」と、「形式化された」という言葉の意味するところを、[WBD]で紹介されている分数の例を参考にしながら述べてみようと思います。

端的にいえば、ここでいう形式化された、ないしは形式的な表現というのは、ある意味で、抽象化された、あるいは抽象的な表現といい換えてもよいものと思われます。そして、それにならえば、形式化されていない、ないしは形式的でない表現というのも、具体化された、ないしは具体的な表現というようにいい換えることができます。たとえば[WBD]では、形式化された表現の例として３/４という分数（の表現）があげられています。そして、その形式化されていない表現の例として、リンゴを 4 つに分けたうちの 3 つ、あるいは 1 ドルを 4 つに分けた１/４ドル（25 セント）を 3 つ集めたものなどといった具体的な量と結びつけられた形での表現があげられています。これは、学び手の分数概念の獲得に即した表現の変化と捉えることができます。つまり、分数や数に慣れ親しんだ人々にとっては、単に３/４といわれたとしても、4 つのうちの 3 つという割合の表示であるとか、数直線上のある位置を占めたひとつの数といわれたとしても十分に具体性を感じることができ、その扱いも易々とできてしまうですが、初めてそれに触れる学び手にとっては､具体的な物や量から離れてそれをうけ入れることは極めて難しいことであり、その表現もそれぞれの理解の水準に即したものになるということなのだろうと思われます。ここで３/４が形式化された表現であるというは、３/４が具体的な量や内容とはきり離された抽象化された数概念の表記であると理解すべきであるということをいっているのです。同様に、

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$

という計算手続きも、それが意味内容から離れた単なるルールとして行われるのであれば、形式的な計算の表記ないしは表現方法ということになります。

つまり、ここで使われている形式的というのは、内容から切り離された、あるいは内容のない形だけの、もっと露骨にいえば干からびてしまったといった意味で使われているということなのです。そうした理解に従えば、形式的でない表現というのも、学び手の内容理解に即した感覚的表現、ないしは普段着のままの表現という形で現れるのが通常であると考えることができるように思われます。

RME のグループは､数学の学習を形式化されていない水準の数学的活動を通して形式的な理解の水準に至る過程として捉えています。従って、形式化につながる、あるいは形式につながる表現というのも、形式化されていない表現と形式化された表現の間を橋渡しする表現方法ということになります。そして、その形式化されていない理解と、形式化された理解をつなぐ学習を支援することが数学教員の最も中心的な役割であるということになるのだと思われます。なお、形式化につながる表現とは具体的にはどのようなものなのかということについては、第 3 節の[WBD]をご覧いただければと思います。また、ひとつの学習概念や技法をめぐって 3 つカテゴリーの表現が用いられるということで､RME のグループはそれらをひっくるめて重層的表現と呼んでいるということもつけ加えておきます。

ところで、上でも少し触れましたが、ある表現が形式的であるか否かというのはその人の理解の水準によって異なるものであり、数学の理解は、ある意味でそうした理解の形式化（そしてそれは概念の洗練化ということでもあ

るのですが)の積み重ねであるということを理解しておくことは大事なことであるように思われます。余談ながら、何ゆえに形式化、または抽象化が進むのかということについては、それによって理論の適用範囲が広くなり、かつ高度な問題解決が可能になるからというのが私の理解です。さらに、[WBD]では、形式的な数学概念や技法の獲得には、それにまつわるさまざまな側面の理解が不可欠であるということが強調されているということもつけ加えておきます。その辺のところを述べた文章が第 1 節であげた文献 [4] にありますので、そのいくつかを紹介しておきます:

- 学生の形式化されていない数学的活動は、より抽象性を増していく数学的推論のモデルへと発展させることが可能なのである。

- 学生が初めに行う形式化されていない数学的活動は、彼らがそれをベースとしてより洗練された数学概念をひき出し、形成することを可能にするような土台を構成するものでなければならない。

- 教師の指導は、学生がより形式的な数学を生みだす（すなわち、漸次的形式化）ためのベースとなる彼ら自身の既得の概念や表現（モデル）を認識し、それらを生かすようなものとするものでなければならない。そのためには、学習プログラムの中に、学生に、その形式化されていない作業を通してめざすべきモデルの姿を見ぬかせたり、その創造につなげさせたりすることができるような数学的活動をおり込むことが求められるのである。

最後に、[WBD]を読む上でのもうひとつの注意点として、彼らが比ないしは割合を比の値（分数）として導入しているという点をあげておきます。すなわち、彼らは、比または割合を比例を通して導入しているのです。

3 「氷山の一角」の下に～学び手の理解を育む表現の使用～

デビッド・C・ウェブ（コロラド大学、ボルダー校）
ニナ・ボスウィンケル（ユトレヒト大学、フロイデンタール研究所）
トルース・デッカー（ユトレヒト大学、フロイデンタール研究所）

中学校段階の数学の教師に解決が求められる共通課題のひとつに、学生の理解を生みだす方法を見つけだすことがある。分数の足し算や引き算の計算方法が可能な限り分かりやすく説明され、学生にその計算練習の機会が与えられたとしても、実際のところは、彼らの多くがその計算手順にとまどい続けたり、あるいはその方法を忘れてしまうという現実がある。こうした学生の混乱への最も一般的な対処法は、もう一度一般的な手順を教えるとか、そのうちに理解してもらえるであろうとの希望のもとにあらためて計算練習を課すというものである。

この 10 年間、数学の教育・学習方法の改革と、NSF（米国科学財団）の支援のもとで生みだされた、NCTM（全米数学教師協議会）の「学校数学の原則とスタンダード」に沿った指導方法やカリキュラムの実施により、数学の教育・学習方法の選択肢が広がってきている。理想としては、これらの新しい指導方法やカリキュラムの導入により、すべての学生の数学学習の機会を増大させたいということであった。しかしながら、この時期、学習が不十分な学生に対する指導方法の選択は、特別支援と通常学級のいずれの教師にとっても容易なことではなかった。とりわけ、学習の遅れが複数年にまたがる学生へのとりくみに関しては、学習の遅れをとり戻すことのできた実践を考慮に入れたしっかりとした情報にもとづく選択が求められていたのであった。とはいえ、数学理解につながる本質的な表現や学習体験を選択するための枠組みを持たないままでは、教室で使用されるカリキュラムのデザインや学習活動の配列に従う他はないのである。

数学を、学生にとってより近づきやすいものとするような表現とはどのようなものなのだろうか。この記事では、

フロイデンタール研究所がオランダの教師たちのために生みだした「氷山モデル」を、アメリカの中学校の教師たちがどのように用いたのかということについて述べる。このモデルは、数学をより近づきやすいものとするための指導的介入の方法や、学生が中心となる学習活動の配列を選択する上での支えとなるものである。（オランダにおける数学教育へのとりくみについては、Case 2006 を参照）

氷山―表現の全体

ユトレヒト大学のフロイデンタール研究所の研究者たちは、教師が、学習過程や学生が用いる方略について考える際の支えとなるものとして氷山モデルを生みだした (Boswinkel and Moerlands 2001)。学生が数学の形式的な表現（つまり、氷山の一角）を意味のあるものとして把握するためには、広範囲にわたる数学的モデルに関する体験を必要とするのであるが、このモデルはそのことを説明する強力な例示の役割を果たすものとなっている。

表現の氷山を構成する作業は、教師の豊かな力量形成につながる体験のひとつとなり得る。教師たちは氷山モデルの構成に協働的にとりくむことで、彼らのカリキュラムにおける本質的な表現や、学習活動の配列についての探究や議論への文脈を得ることができるのである。このモデルは、学生の形式化されていない、あるいは形式化につながる、そして形式化された表現を識別するための例示の役割も果たすことになる。

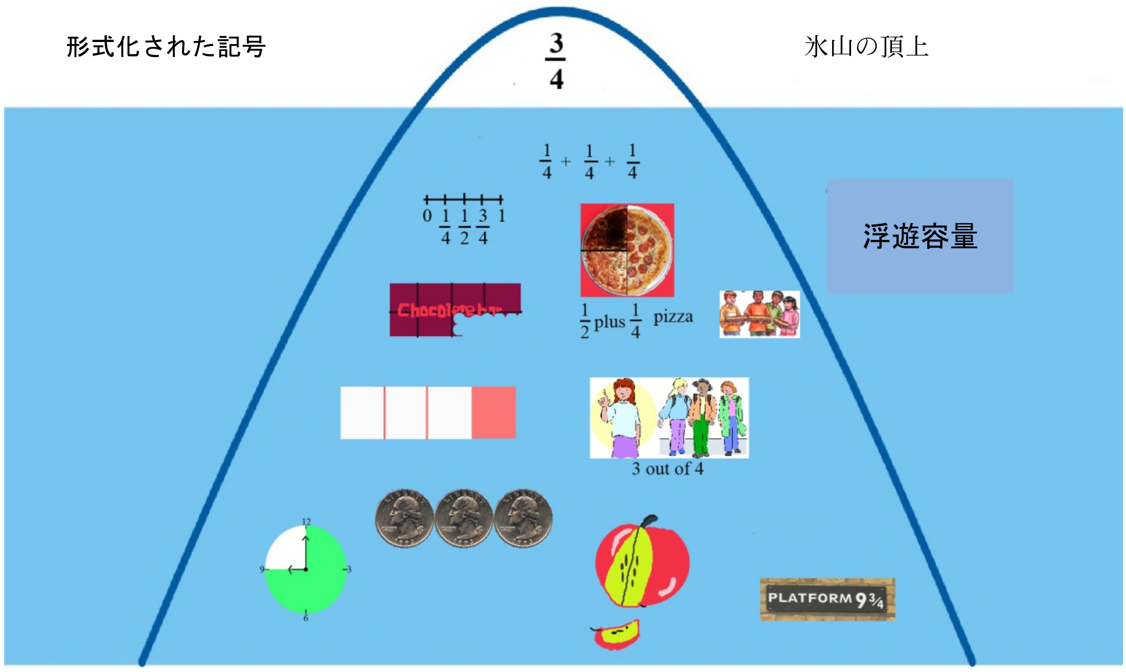


図１ 氷山モデル

図１が氷山モデルの簡略的な例である。それは水上に表出している「氷山の一角」と、それよりも圧倒的に大きな（浮遊容量と呼ばれる）水面下の部分からなっている。その氷山の一角には、学習目標となる形式的な計算手続きや記号表現が記される。水面下に沈んでいる氷山の巨大な部分には、状況に依存した形式化されていない表現（たとえば時間や、コイン、リンゴの一部分など）や、そこから形式化につながる方略やモデル（たとえば分数を示すための帯や、数直線など）が記される。この例示は多くの異なる問題に適用され得る。たとえば分数の演算の場合でいえば、学生がそれに関するさまざまな方略についての意味のある議論を開始できるようになる前の段階であっても、彼らには分数が何を表しているのかということを理解していることが求められるのである。

このモデルにおける氷山の浮遊容量に関して、漸進的形式化と呼ばれる考えがある。それは、一般に高いレベルでの形式的表現がより低いレベルでの形式的表現の上に築かれるということを意味しており、いくつもの異なるレベルで見ることのできるものである。とはいえ、これは、学生が形式的な理解に到達するや否や、形式化につなが

る表現を用いるようなところに戻ることはないということを意味しているのではない。むしろ、学生には、形式化につながる表現にたち戻ることができることが求められるのである。とりわけ、初めての、なじみのない状況に出会った時にはなおさらのことである。実際、特別支援の学級には形式的な表現を理解できない学生もいるかもしれないけれども、形式化されていない、あるいは形式化につながる表現を用いて解くことができるかもしれないのである。

形式化されていない表現と形式化につながる表現

数学教師は、形式的表現やそれらの操作に関する方略になれ親しんでいる。彼らの間でよく用いられているアルゴリズムは、効率的で滑らかなものではあるが、数値計算の形式的な方略である。不幸なことに、こうした形式的方略を提示する際には、大抵の場合、他の方略や表現と結びつけることが求められるのである。そのことが、それらの他のモデルで四苦八苦している学生の理解をさらに困難なものとことにするのである。

形式的表現のひとつとして、未知数を含んだ比例式を挙げることができるであろう（たとえば $x/6=10/18$ など）。この型の比例式は、形式的でやや効率的な解法の方略を暗示してくれる: つまり両辺に同じ数をかけたり、両辺を同じ数で割るという方法である。比例表や、パーセント帯、あるいは二重数直線などの形式化につながる表現を用いたことのない学生を想像してほしい。両辺に同じ数をかけたり、両辺を同じ数で割る方法についていえば、このような学生にとって、比例式を、数感覚を助長し、比例を用いた推論をうながすような他の意味のある方略（たとえば 6 は 18 の 3 分の 1 なので、x は 10 の 3 分の 1 のはずであるなど）に関連づけさせるような機会を持つことはほとんどあり得ないことであろう。

学生にとっては、図や説明は形式化されていない表現である。それらは、大抵の場合、学生の、現実のあるいは想像上の状況に結びついた体験に根をおいたものである。4 分の 1 ドル（25 セント）硬貨 3 枚と 2 分の 1 ドル（50 セント）硬貨 1 枚でいくらになるのかという足し算についての形式化されていない説明として「4 分の 1 硬貨 2 枚と 2 分の 1 硬貨で 1 ドルになる。だけど 4 分の 1 ドル硬貨が 1 枚残るので、全体では 1 ドルと 4 分の 1 ドル（1 ドル 25 セント）になる」といったものがあり得るであろう。パターンを用いた形式化されていない説明のひとつとして、奇数と偶数を雁行形に結びつけるというものもあり得るであろう。「雁は必ず偶数羽で飛んでいるのだろうか？」という問題に対して、雁が飛ぶ時の形を用いた形式化されていない推論をする学生もいることであろう。「雁には、V 字形のそれぞれの側にパートナーがいるけど、リーダーはいつも 1 羽なんだよ。だからその数はいつも奇数になるはずなんだ」というように。

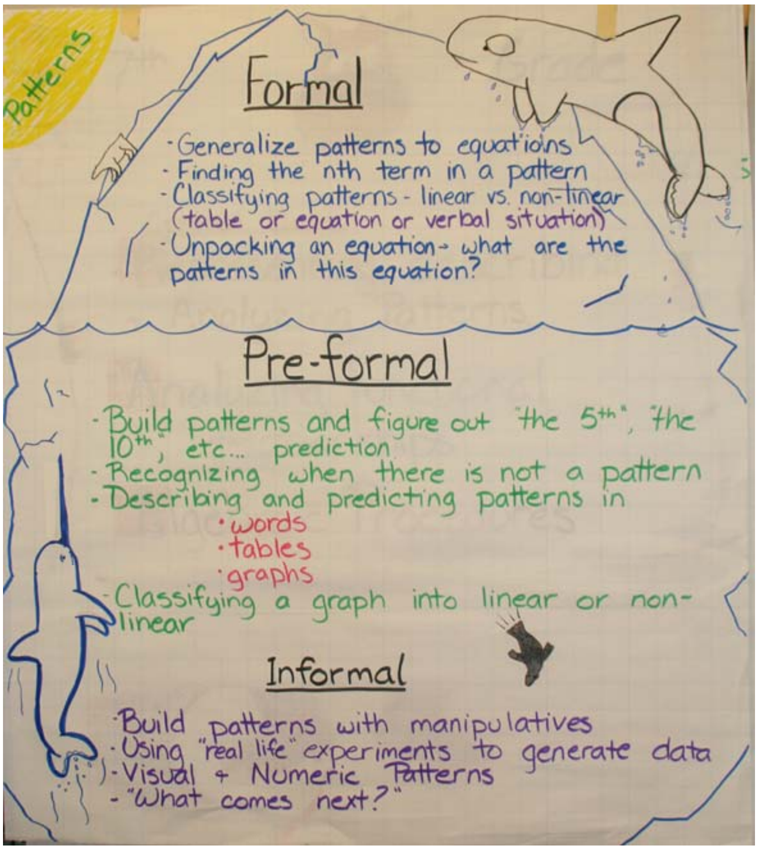
形式化につながる表現は、学生の形式化されていない表現や推論を基礎として築きあげられ、より大きな数学的構造へのつながりを示してくれることになる。その例としては、数値的パターンを記述する反復公式、縮尺の問題を解くための二重数直線、さらには整数や帯分数、あるいは 2 項式のかけ算についての説明を与える面積モデルなどがある。形式化につながる大半の表現については、学生が何らかの問題を解くために自力でそれを作りだすということはほとんどあり得ない。学生が、多くの状況や文脈に適用され得る形式化につながる表現や方略を用いるようになるのは、むしろ教師や教材などに導かれてのことである。形式化につながる表現は、学生に意味づけの力をつけさせるためのより大きな機会を提供する。とはいえ、形式化につながる表現には、それを用いて解くことのできる問題の範囲に限りがある。たとえば、面積モデルは、学生に帯分数や 2 項式のかけ算に分配法則がどのように関わるのかということを理解させるのに役立つのであるが、次のような計算にとって実用的であるとはいえないのである:

$$5\frac{7}{12}\times3\frac{1}{7}$$

中には、他の学生よりも速く形式的なレベルに達する学び手もいる。とはいえ、本質的に形式化されていないレベル、ないしは形式化につなげるというレベルでの表現を体験していない学生に、形式的方略の使用を強制するべきではない。形式化につなげるというレベルでの意味づけのための体験に注がれる時間は、形式化されたレベルで要する再教授と練習の時間を大幅に削減してくれるのである。

氷山作り

オランダでは、教師に、形式されていないレベル、形式化につなげるレベル、そして形式化されたレベルでの方略や記号を同定できる力量をつけるためのとりくみがなされてきていた。それは、教師に実際に数学の氷山作りの活動をしてもらうということなのだが、アメリカの中学校の教師にその活動が紹介されたのは近年になってのことである。この活動の直接的な目的は、教師に彼ら自身のカリキュラムに見られる表現についてのふり返りを行うことを奨励し、有効な指導的介入の選択をうながすことにある。この活動は、重層的な表現や、モデル、および方略が絡むほとんどすべての数学の課題で用いることができるであろう。



作業は、水面だけが記された氷山の図を用意するところから開始される。そして、水面上の「氷山の一角」に学習課題となる形式的表現を記す（たとえば、分数記号の使用をめざしての$3/4$、比例式の解法をめざしての$x/12=9/20$、1次関数の理解をめざしての$y=mx+b$など)。ここで教師にもとめられるのは、生徒が用いている表現を思いだしたり、その形式的表現の理解に結びつることのできる形式化以前および形式化につなげる一群の関連表現を作りだすことである。このことは、地域で採用された教科書や他の教材をくまなく調べることで、他の形式化以前の、および形式化につなげる表現を同定することを通して成されることになる。

氷山作りの活動の狙いは、教師たちを、関連する表現を同定するための協働作業や、これらの表現によっていかに学生の理解を支援するのかという議論に参加させることにある。教師たちはまた、形式化の低い段階からの学びの築きあげや、選び出された関連表現のそれぞれが、形式化されていない、形式化につながる、あるいは形式化されたという3つのレベルのいずれに属すると考えられるのかということについて議論をすることになる。ある特定された学習課題に関連する事項や要素の範囲の同定がなされると、教師たちは、選び出された表現の一つひとつが氷山の位置を占めるほどの十分な独自性と典型性を持ったものなのかどうかということの検討に入ることになる。「氷山の一角」に据えられた数学的表現にもよるのであるが、この作業は、大抵の場合、45分から120分で終えることができるであろう。

氷山モデルを築くことで、そこに登場する表現や、それらと学生の既得の知識との結びつき、そして教師が全体としてどのように学生の数学理解を支援するのかということについての､活発な議論がひき起こされることになる。個々の表現や方略の有効性や潜在的な障害に関する諸問題を認識しておくことも大切なことである。それらが学生のグループ討論の中で浮上してくることもあるからである。授業時間の配分も、それらの現実的な（あるいは把握可能な）制約を考慮に入れてなされることが求められる。

数学の氷山作りのめざすところは、教師の表現に関する全体的な知識と、それぞれの表現の間の相互連関につい

てのまとめあげを行うことである。多くの場合、形式的表現が唯一の重要な学習課題であり、目標であると考えられがちである。しかし、形式化されていない、あるいは形式化につながる表現は学生の既得の知識を見計らう上でのことの他の重要性を有しており、指導や介入の潜在的な出発点となっているのである。にも関わらず、学習の進行状況を見計らう際に、形式的表現のみに過度の注意が払われているのは不幸なことである。

氷山から表現の経路へ

氷山作りに続く不可欠な作業として、表現の経路という視点から見たカリキュラムや教材の見直しというものがある。一例として、とある中学校教師の夏の研修活動を紹介しよう。そこで焦点とされた課題は、有理数概念の構成や比例を用いた推論であった。教師たちに、数学の作業課題や表現を記した何枚ものカードが配られた。それらを用いて氷山を作るのである。カードの中には、その地域で最も一般的に使用されている２つの数学のカリキュラム（教科書）から取られたものも含まれていた。「分数の形式的な足し算」というのが氷山の一角に記された概念であった。教師たちのいくつかのグループでは、分数の足し算の漸進的形式化が実現されるようにと、カードの縦方向の配列についての議論がなされた。それらのグループでは、渡されたカードの中で、彼らが重要であると考えているものが欠けていたり、余分であると思われるものがあった場合には、それらを追加するとか、とり除くとかの提案をとり入れつつ、学習活動の適切な配列についての入念な検討が進められた（図２を参照）。

　教師たちは、彼らのカリキュラムや教材での表現経路が、もっぱら形式的なもので終始している（彼らの地域で最も一般的な２冊の教科書のうち１冊の場合）のか、水面下の表現の混ぜあわせで終始している（残りの１冊の場合）のかのいずれかになっていることに気がついた。教師たちは、いくつかのグループが、それらとは劇的に異なる表現経路を作りあげていたことにも気がついた。それらの作業を通して、代替となる経路を作りだすための学習活動の適切な配列や選択についての実質的な討論がひき起こされることとなった。もうひとつの観察は、与えられたカードには、重要な表現が欠落しているというものであった。そのため、教師たちは、抜けている学習活動がどういったものであるべきなのかということについて述べあうことにもなった。その経路において抜かすことのできない決定的な学習体験は、教師たちによって赤い色の線で四角に囲まれた。次のステップは、それらの２つのカリキュラムに欠けていると思われる決定的な学習体験のまわりに配される表現経路に加えるべき活動を考えだすことであろう。

図２　教師たちが表現の経路をデザインしているところ

　個人的な介入を必要とする学生のための指導計画を作りあげる際には、学生の既得の知識にもとづく適切な出発点を見いだすために、表現経路に関する知識が教師を助けてくれることになる。オランダのプロジェクトは特別支援学級の教師を支援することに焦点を当てたものであったが、氷山モデルや表現経路を構成し、活用することは、すべての学級の教師にとって有益なものである。

　教師の学習機会に関していえば、ここで紹介されたことは、重層的な表現を題材とした教師の力量形成をめざす諸活動の「氷山の一角」に過ぎない。とはいえ、こうした力量形成の体験は、指導計画の作成や、カリキュラム・マッピングを行うための教師の協働的作業や、苦闘する学生への適切な指導的介入のあり方を同定する上での支えとなり得ることであろう。

文献

[1] Boswinkel, N., and F. Moerlands. *Het topjevan de ijsgerg* [The top of the iceberg]. In De Nationale Rekendagen, een praktische terug [National conference on arithmetic, a practical view]. Utrecht: Freudenthal Institute, 2003.
[2] Case, Robert W. “Report from the Netherlands: The Dutch Revolution in Secondary School Mathematics.” *Mathematics Theacher* 98 (February 2005): 374-82.