

ペントミノの辺々接着で折る多面体について

| | |
|-------|--|
| メタデータ | 言語: jpn 出版者: 公開日: 2016-01-21 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 西村, 保三, 坂口, 一成 メールアドレス: 所属: |
| URL | http://hdl.handle.net/10098/9526 |

ペントミノの辺々接着で折る多面体について

西村 保三^{*1} 坂口 一成^{*2}

(2015年9月9日 受付)

1 はじめに

与えられた多角形が、どのような多面体の展開図になるかという問題は、個々の多角形を個別に調べるしか方法がなく、あまり研究されていない。一般に、凸でない多面体は、展開図から一意的に決まるとは限らないので、本論文で扱う多面体は凸を仮定する。本稿では、多角形として等辺偶数角形であるポリオミノを考え、辺同士を接着する「辺々接着」に限って考察する。1999年、ドメインとオルークらの研究グループは、立方体の展開図として代表的なラテンクロス型のヘキサミノから、辺々接着によって5通りの多面体が構成できることを示した ([1, 25.3 節], [3, 9 章] 参照)。

本論文では、高々5つの正方形からなるポリオミノの辺々接着で構成される多面体を分類する。

2 アレクサンドロフ接着

本論文で扱う多面体は、3次元凸多面体に限り、表面のみを指すが、2つの合同な凸多角形の対応する境界を貼り合わせた厚みが0の「2重被覆多角形」も多面体とみなすことにする。多面体の再構成において、アレクサンドロフの定理 ([1, 23.3 節], [3]) は基本定理である。

定理 2.1 (アレクサンドロフ) 任意の多角形の以下の条件を満たす境界の接着 (アレクサンドロフ接着と呼ぶ) に対して、得られる多面体が一意に決まる。

1. 接着で得られる曲面は、球面と同相である
2. 接着される各点での内角の和は 360° 以下である

アレクサンドロフの定理により、多角形にアレクサンドロフ接着を与えると、面の折り線が一意的に決まって、得られる多面体も一意に決まることになる。この定理において、多面体を凸に限ることは重要である。多面体を凸なものに限らなければ、1つの接着によって得られる多面体には、面構造の異なるものが幾らでも存在し得るし、面構造を1つに決めた場合でも、多面体は一意に決まるとは限らない。

^{*1}福井大学教育地域科学部理数教育講座

^{*2}福井県立嶺北特別支援学校

定義 2.2 多角形の同じ長さの辺同士の接着を，**辺々接着**と呼ぶ。

多角形 P は等辺 $2n$ 角形とし，その辺を反時計回りに $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{2n-1}$ と表し，辺 e_i の端点を v_i, v_{i+1} とする（辺 e_{2n-1} の端点は v_{2n-1}, v_0 とする）。等辺 $2n$ 角形の辺々接着で，アレクサンドロフの条件 1 を満たすものを考える。このとき，接着は偶数番目の辺と奇数番目の辺のペアリングであり，接着によって多角形の境界は，各辺の長さが等しい n 本の辺からなる木を 2 重に被覆する。このグラフを**接着木**と呼ぶ（図 1）。接着木は，辺に長さを与えられた平面グラフであり，平面的リンケージとして移り合うときに同型とみなす。

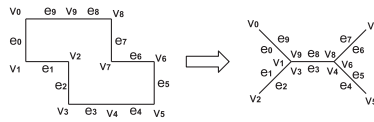


図 1: 等辺 10 角形の接着木

等辺多角形の辺々接着に対応する接着木において，次数 d の頂点に対応する多面体の点には， d 個の頂点が集まっている。これらの内角の和が 360° 以下であれば，アレクサンドロフの条件 2 が満たされる（この条件は，多面体の凸性を規定する）。接着木の葉（次数 1 の頂点）については，このことは明らかなので， $d \geq 2$ の頂点のみチェックすればよい。例えば，図 1 の辺々接着では，接着木の次数 3 の頂点が 2 つあり，そこでは多角形の $\{v_1, v_3, v_9\}$ と $\{v_4, v_6, v_8\}$ が集まっている。それらの内角の和はともに 360° であるので，この接着はアレクサンドロフ接着である。

ポリオミノの辺々接着から得られる展開図において，一部の正方形を切り貼りすることで，展開図を変形する操作を定義する。

定義 2.3 (カット&ペースト) ポリオミノの辺々接着において，辺 e_i は異なる正方形の辺 e_j と接着されるとする。ポリオミノを， e_i と e_j を分けるように，正方形の辺に沿って 2 つの部分に切断したのち，辺 e_i と e_j を接着して別のポリオミノを構成する変換を**カット&ペースト**と名づける（図 2）。また連続した複数の辺に沿ったカット&ペーストも同様に定義できる。

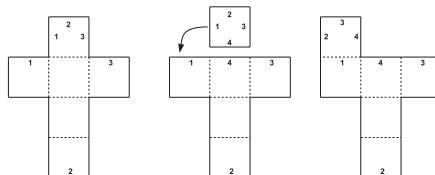


図 2: カット&ペースト

3 テトロミノの辺々接着

高々4つの正方形で構成されるポリオミノは、モノミノ、ドミノ、トロミノ (a,b型), テトロミノ (i,l,t,n,o型) がある (図3)。それらの辺々接着で作られる多面体は、坂口の修士論文 [4] で分類されているが、証明は概略のみで、また2重被覆多角形は考察を省いている。本節では、[4]の結果に証明を付け、2重被覆多角形の場合も含めた展開図の完全な分類を行う。

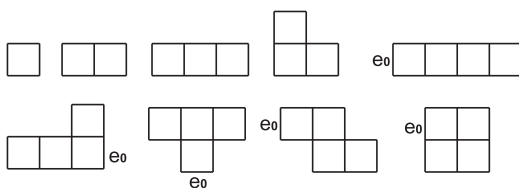


図 3: 高々4つの正方形からなるポリオミノ

高々3つの正方形からなるポリオミノは、可能な辺々接着自体が少ないので、それで作られる多面体を調べるのは容易である。結果のみを紹介する ([4, 定理 6.16, 定理 6.17] 参照)。

定理 3.1 高々3つの正方形からなるポリオミノの辺々接着で作られる多面体は、以下に挙げるものに限る (図4, 5)。

- (1) モノミノ：2重被覆の直角二等辺三角形
- (2) ドミノ：2重被覆の直角二等辺三角形，平行四辺形，正方形
- (3) トロミノ：2重被覆台形2種と双三角錐

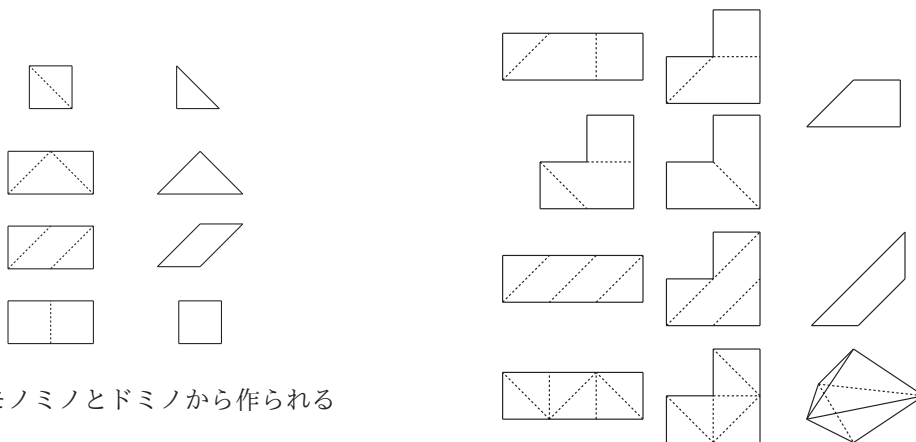


図 4: モノミノとドミノから作られる多面体

図 5: トロミノから作られる多面体

正方形4つからなるテトロミノはi,l,t,n,o型の5種類が存在する。図3に示す辺を e_0 と決め、以下、反時計回りに辺と頂点に番号を割り振る。

始めに、i型テトロミノの辺々接着で、アレクサンドロフの条件を満たすものを考える。対称性から、辺 e_0 と接着する辺は、 e_1, e_3, e_5 のいずれかと仮定してよいが、 $\{e_0, e_1\}$ を接着した場合、 $\{e_2, e_3\}$ を接着することはできない。なぜなら、この場合、頂点 $\{v_0, v_2, v_4\}$ が接着されることになり、そこでの内角の和が 360° を超え、凸性の条件を満たさないからである。同様に、 $\{e_0, e_1\}$ を接着した場合、 $\{e_2, e_7\}$ や $\{e_8, e_9\}$ を接着することはできない。可能な辺のペアリングのうち、これら3パターンを含まないものを表1に列挙する。このうち、No.2とNo.3の2つを除いた6通りが、アレクサンドロフの条件を満たし、5種類の多面体が作られる（図6）。

表 1: i型テトロミノの辺々接着

| No. | 辺のペアリング | 凸性 | 多面体 |
|-----|---------------------------|----|-------------|
| 1 | (0,1)(2,5)(3,4)(6,9)(7,8) | ○ | 四面体 |
| 2 | (0,1)(2,9)(3,4)(5,8)(6,7) | × | |
| 3 | (0,1)(2,9)(3,6)(4,5)(7,8) | × | |
| 4 | (0,1)(2,9)(3,8)(4,7)(5,6) | ○ | 2重被覆平行四辺形 A |
| 5 | (0,3)(1,2)(4,9)(5,8)(6,7) | ○ | 八面体 |
| 6 | (0,5)(1,2)(3,4)(6,7)(8,9) | ○ | 2重被覆長方形 |
| 7 | (0,5)(1,2)(3,4)(6,9)(7,8) | ○ | 2重被覆正方形 |
| 8 | (0,5)(1,4)(2,3)(6,9)(7,8) | ○ | 2重被覆長方形 |

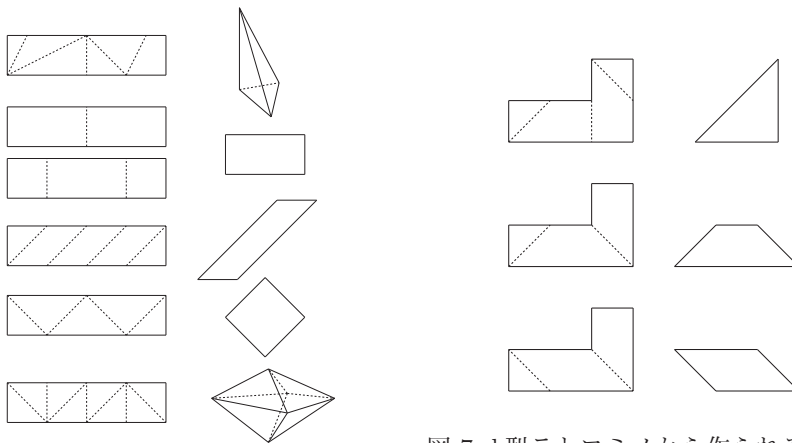


図 7: l型テトロミノから作られる多面体

図 6: i型テトロミノから作られる多面体

次にl型テトロミノを考える。l型テトロミノの辺のペアリングのうち、 $\{e_0, e_1\}$ を含むもの

は、 e_1 を含む正方形をカット&ペーストで貼り換えて、 i 型テトロミノに変形できる。同様に、 $\{e_0, e_3\}$, $\{e_1, e_6\}$, $\{e_3, e_6\}$, $\{e_6, e_9\}$ のいずれかを含むものは、全て i 型テトロミノに変形できる。また、 $\{e_4, e_7\}$ を含む接着では、頂点 $\{v_4, v_8\}$ が同一視されるため、凸性の条件を満たさない。同様に、 $\{e_3, e_8\}$ を含む接着も、凸性の条件を満たさない。可能な辺のペアリングのうち、これらのケースを除外したものを表2に列挙する。このうち凸性の条件を満たすのは3通りで、いずれも2重被覆多角形となる(図7)。

表 2: 1 型テトロミノの辺々接着

| No. | 辺のペアリング | 凸性 | 多面体 |
|-----|---------------------------|----|--------------|
| 1 | (0,5)(1,2)(3,4)(6,7)(8,9) | × | |
| 2 | (0,5)(1,4)(2,3)(6,7)(8,9) | ○ | 2重被覆直角二等辺三角形 |
| 3 | (0,7)(8,9)(1,2)(3,4)(5,6) | × | |
| 4 | (0,7)(8,9)(1,4)(2,3)(5,6) | × | |
| 5 | (0,9)(1,2)(3,4)(5,6)(7,8) | × | |
| 6 | (0,9)(1,2)(3,4)(5,8)(6,7) | × | |
| 7 | (0,9)(1,4)(2,3)(5,6)(7,8) | × | |
| 8 | (0,9)(1,4)(2,3)(5,8)(6,7) | × | |
| 9 | (0,9)(1,8)(2,3)(4,5)(6,7) | × | |
| 10 | (0,9)(1,8)(2,5)(3,4)(6,7) | ○ | 2重被覆台形 |
| 11 | (0,9)(1,8)(2,7)(3,4)(5,6) | ○ | 2重被覆平行四辺形 B |

補題 3.2 t, n, o 型テトロミノの辺々接着から作られる多面体の展開図は、 i, l 型テトロミノの展開図をカット&ペーストして得られるものに限る。

証明 t, n, o 型テトロミノの辺と頂点の番号は図3に示した e_0 から反時計回りに定める。

(1) t 型テトロミノ：辺 e_1 と接着する辺が、 e_0 以外の辺のときは、 e_1 を含む正方形をカット&ペーストして 1 型テトロミノに変形できる。対称性から、辺 e_9 についても同じことがいえる。 e_1, e_9 のどちらかは e_0 以外と接着しなければならないので、 t 型テトロミノの展開図は、 1 型の展開図をカット&ペーストして得られるものしかない。

(2) n 型テトロミノ：辺 e_2 と接着する辺を考える。 $\{e_2, e_1\}$ は、長方形2つに分けるカット&ペーストで 1 型に変形できる。 $\{e_2, e_3\}$ は $\{v_2, v_4\}$ が接着され凸性に反する。 $\{e_2, e_5\}$ は $\{e_3, e_4\}$ の接着が必然で、 e_4 を含む正方形をカット&ペーストして 1 型に変形できる。 $\{e_2, e_7\}$ と $\{e_2, e_9\}$ は長方形2つに分けるカット&ペーストで i 型ないし 1 型に変形できる。以上より、 n 型テトロミノの展開図も、 i, l 型の展開図をカット&ペーストしたものしかない。

(3) o型テトロミノ：辺 e_0 と接着する辺を考える。 $\{e_0, e_1\}$ は、長方形2つにわたるカット & パーストで i 型に変形できる。 $\{e_0, e_3\}$ も同様に 1 型に変形できる。 $\{e_0, e_5\}$ は $\{e_6, e_7\}$ の接着が必然で、i 型に変形できる。以上より、 $\{e_0, e_7\}$ のケースのみ考えればよい。対称性から、他の四隅についても同様なので、 $(0, 7)(1, 2)(3, 4)(5, 6)$ のペアリングのみを考えればよいが、この接着では頂点 $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ が集まり、内角の和が 720° となって、凸性に反する。□

以上の考察をまとめて、次の定理を得る（[4, 定理 6.18] 参照）。

定理 3.3 テトロミノの辺々接着で得られる凸多面体は、図 6 と図 7 に示した 8 種類の多面体に限る。特に 2 重被覆多角形を除くと、四面体と八面体の 2 種類に限る。

それぞれのテトロミノから辺々接着で折れる多面体を表 3 にまとめた。表内の数字は、異なる展開図の総数を表す。多角形は全て 2 重被覆である。全ての展開図を図 8～15 に列挙する。

表 3: テトロミノから辺々接着で折れる多面体

| 多面体 | i | l | t | n | o |
|----------|---|---|---|---|---|
| 四面体 | 1 | 4 | 2 | 1 | 1 |
| 八面体 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 平行四辺形 A | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 平行四辺形 B | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 長方形 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 正方形 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 直角二等辺三角形 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 台形 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 |

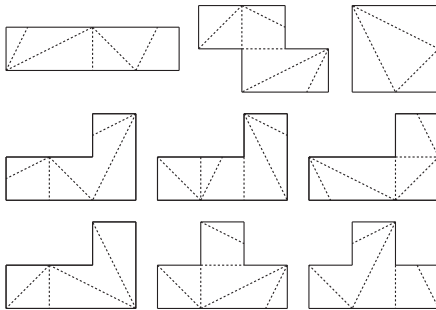


図 8: 四面体

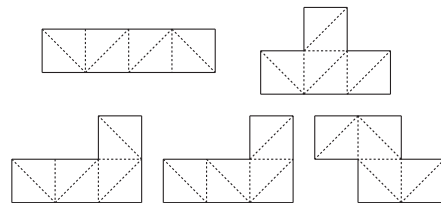


図 9: 八面体

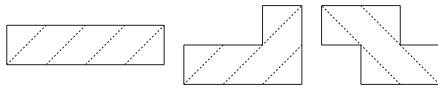


図 10: 平行四辺形 A

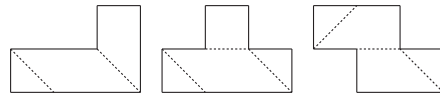


図 11: 平行四辺形 B

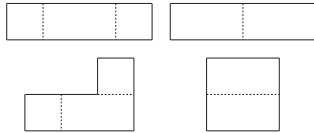


図 12: 長方形

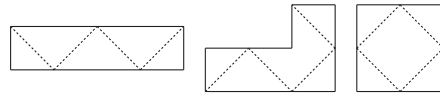


図 13: 正方形

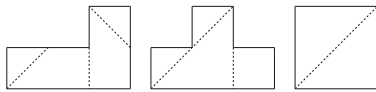


図 14: 直角二等辺三角形

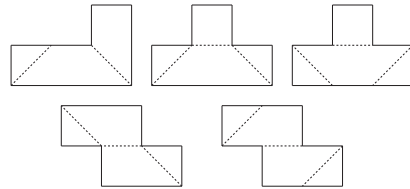


図 15: 台形

4 ペントミノの辺々接着

ペントミノは、図 16 に示す 12 種類が存在し、順に I, L, U, N, Y, V, Z, T, F, X, W, P 型と呼ぶ ([2] 参照)。このうち P 型のみが等辺 10 角形で、それ以外は全て等辺 12 角形である。それぞれ、図 16 に示す辺を e_0 と定め、反時計回りに辺と頂点に番号を割り振る。

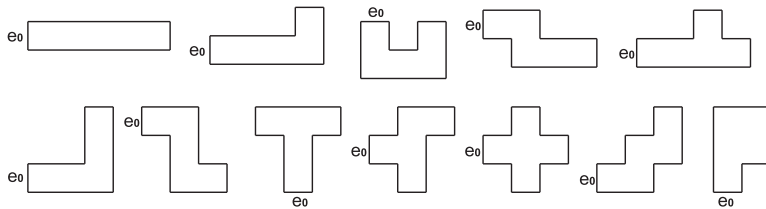


図 16: ペントミノ

4.1 等辺 12 角形の辺々接着探索アルゴリズム

辺が 6 本の木は 11 通り存在するが、グラフとして同型でも、平面的リンケージとして互いに移り合わないパターンが 3 通りあるので、等辺 12 角形の接着木は、14 通りである。

補題 4.1 6 辺からなる等辺の接着木は, 表 4 に示す 14 通りである。

表 4: 6 辺の接着木

| No. | 接着木 | 辺のペアリング | 接着される頂点のグループ |
|-----|-----|----------------------------------|-----------------------------|
| 1 | | (0,11)(1,10)(2,9)(3,8)(4,7)(5,6) | (1,11)(2,10)(3,9)(4,8)(5,7) |
| 2 | | (0,11)(1,10)(2,9)(3,8)(4,5)(6,7) | (1,11)(2,10)(3,9)(4,6,8) |
| 3 | | (0,11)(1,10)(2,9)(3,6)(4,5)(7,8) | (1,11)(2,10)(3,7,9)(4,6) |
| 4 | | (0,11)(1,10)(2,9)(3,4)(5,8)(6,7) | (1,11)(2,10)(3,5,9)(6,8) |
| 5 | | (0,11)(1,10)(2,7)(3,4)(5,6)(8,9) | (1,11)(2,8,10)(3,5,7) |
| 6 | | (0,11)(1,10)(2,3)(4,9)(5,6)(7,8) | (1,11)(2,4,10)(5,7,9) |
| 7 | | (0,11)(1,2)(3,10)(4,9)(5,6)(7,8) | (1,3,11)(4,10)(5,7,9) |
| 8 | | (0,11)(1,10)(2,5)(3,4)(6,9)(7,8) | (1,11)(2,6,10)(3,5)(7,9) |
| 9 | | (0,11)(1,10)(2,5)(3,4)(6,7)(8,9) | (1,11)(2,6,8,10)(3,5) |
| 10 | | (0,11)(1,10)(2,3)(4,7)(5,6)(8,9) | (1,11)(2,4,8,10)(5,7) |
| 11 | | (0,11)(1,10)(2,9)(3,4)(5,6)(7,8) | (1,11)(2,10)(3,5,7,9) |
| 12 | | (0,11)(1,2)(3,8)(4,5)(6,7)(9,10) | (1,3,9,11)(4,6,8) |
| 13 | | (0,11)(1,10)(2,3)(4,5)(6,7)(8,9) | (1,11)(2,4,6,8,10) |
| 14 | | (0,11)(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10) | (1,3,5,7,9,11) |

※接着木は, 白丸を v_0 として, 以下反時計回りに頂点と辺に番号を付けている。

等辺 12 角形を入力した時に, 辺々接着でアレクサンドロフの条件を満たすものを全て出力するアルゴリズムは以下で与えられる (実際には, プログラム言語を使って記述する)。

1. 等辺 12 角形の頂点 v_i の内角 $a(i)$ ($0 \leq i \leq 11$) を入力。また $a(12) = 0$ としておく。
2. 接着木の番号を表す変数 K を 0 にリセット。
3. $K = K + 1$ とおく。もし $K = 15$ なら終了。
4. 表 4 に示す接着木 K の辺のペアリング $\{(s_0, s_1)(s_2, s_3) \cdots (s_{10}, s_{11})\}$ と頂点のグループのデータ $\{(t_1^1, t_2^1, t_3^1, t_4^1, t_5^1, t_6^1) \cdots (t_1^5, t_2^5, t_3^5, t_4^5, t_5^5, t_6^5)\}$ を読み込む。ここで, 頂点のグループは, 最高で 5 つあり, 1 つのグループが最高 6 つの頂点からなるので, 5×6 の配列 t_j^i で表すことができる。空データは $t_j^i = 12$ としておく。
5. 頂点の番号を表す変数 J を 0 にリセットする。

6. $1 \leq i \leq 5$ について、内角の和 $a(t_1^i) + a(t_2^i) + a(t_3^i) + a(t_4^i) + a(t_5^i) + a(t_6^i) \leq 360$ をチェックする。もし、ある i で和が 360 を超えたら、8 へ移動。
7. 辺のペアリング $\{(J + s_0 \bmod 12, J + s_1 \bmod 12) \cdots (J + s_{10} \bmod 12, J + s_{11} \bmod 12)\}$ を出力する。
8. 頂点の内角 $a(0), \dots, a(11)$ を循環的にシフトする。すなわち $a(0) \rightarrow a(1) \rightarrow a(2) \rightarrow \cdots \rightarrow a(11) \rightarrow a(0)$ とする。
9. $J = J + 1$ とおく。もし $J < 12$ なら 6 へ移動して次の頂点に進む。 $J = 12$ (頂点を 1 回り) になれば 3 へ移動して次の接着木へ進む。

注意 4.2 ポリオミノの場合、内角は $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ のいずれかなので、接着木の頂点の次数は、高々 4 であることに注意すると、接着木の $K = 13, 14$ は探索する必要がない (従って t_j^i は 5×4 の配列で十分)。また、等辺 12 角形が点対称な場合 (I, Z, X 型ペントミノなど) は、アルゴリズム 9 において $J = 6$ (頂点を半周) で次の接着木に進んでよい。同様に、接着木の対称性を利用すれば、 $K = 1, 7, 8, 10$ など、アルゴリズム 9 では、 $J = 6$ ないし $J = 4$ で次の接着木に進んでよい。

4.2 I, L 型ペントミノの辺々接着

前小節のプログラムを、I 型ペントミノに適用すると、対称性で移りあうものを除いて、5 種類のアレクサンドロフ接着が出力される (表 5)。

表 5: I 型ペントミノの辺々接着

| No. | 辺のペアリング | 接着木 | 多面体 |
|-----|----------------------------------|-----|-----------|
| 1 | (0,11)(1,10)(2,9)(3,8)(4,7)(5,6) | 1 | 2 重被覆台形 A |
| 2 | (2,1)(3,0)(4,11)(5,10)(6,9)(7,8) | 1 | 双四角錐 |
| 3 | (3,2)(4,1)(5,0)(6,11)(7,10)(8,9) | 1 | 2 重被覆五角形 |
| 4 | (3,2)(4,1)(5,0)(6,9)(7,8)(10,11) | 3 | 2 重被覆五角形 |
| 5 | (4,3)(5,2)(6,1)(7,10)(8,9)(11,0) | 3 | 2 重被覆台形 B |

表 5 の辺々接着によって 4 種類の多面体が作られる。No.2 の展開図からは、直角二等辺三角形 8 面 (合同な面が 6 面と、 $\sqrt{2}$ 倍の面が 2 面) からなる双四角錐が作られ、他は 2 重被覆多角形である (図 17)。

L 型ペントミノについて、 $(0, 7), (5, 6), (5, 8)$ のいずれかの辺のペアリングを含む接着は、カット&ペーストで、I 型ペントミノに変形できることに注意する。前小節のプログラムを、L 型ペ

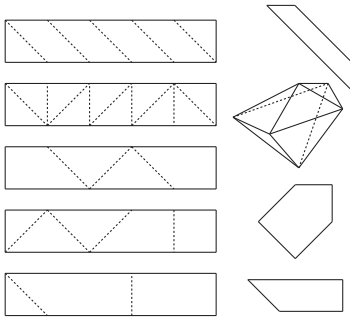


図 17: I型ペントミノから作られる多面体

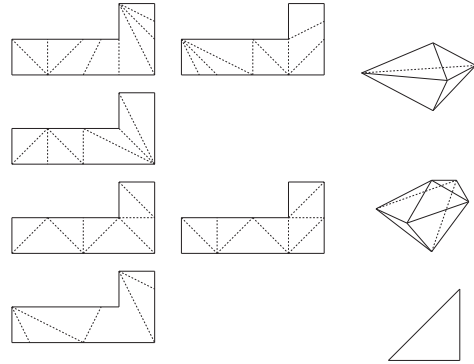


図 18: L型ペントミノから作られる多面体

ントミノに適用して，可能なアレクサンドロフ接着を探索し， $(0, 7)$, $(5, 6)$, $(5, 8)$ を含む接着を除くと，表 6 に示す 6 種類の接着が出力される。

No.1,2,5 からは，3 辺の比が $1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形， $1 : 2 : \sqrt{5}$ の直角三角形， $1 : \sqrt{5} : 2\sqrt{2}$ の三角形が各 2 枚からなる双三角錐が作られ，No.3,4 からは，図 17 と合同な双四角錐が作られる（図 18）。

表 6: L型ペントミノの辺々接着

| No. | 辺のペアリング | 接着木 | 多面体 |
|-----|------------------------------------|-----|--------------|
| 1 | $(2,1)(3,0)(4,11)(5,10)(6,9)(7,8)$ | 1 | 双三角錐 |
| 2 | $(5,4)(6,3)(7,2)(8,1)(9,0)(10,11)$ | 1 | 双三角錐 |
| 3 | $(3,2)(4,1)(5,0)(6,11)(7,10)(8,9)$ | 1 | 双四角錐 |
| 4 | $(9,8)(10,7)(11,6)(0,5)(1,2)(3,4)$ | 2 | 双四角錐 |
| 5 | $(4,3)(5,2)(6,1)(7,10)(8,9)(11,0)$ | 3 | 双三角錐 |
| 6 | $(8,7)(9,6)(10,5)(11,0)(1,4)(2,3)$ | 4 | 2重被覆直角二等辺三角形 |

4.3 I, L型以外のペントミノの辺々接着

I,L,P 型以外の 9 種類のペントミノについて，4.1 節のプログラムを適用してアレクサンドロフ辺々接着を探索することもできるが，本小節では，他のペントミノから新しい多面体が現れないことをプログラム探索に依らずに証明する。

補題 4.3 V,T,Y,N,P 型ペントミノのアレクサンドロフ辺々接着は，I,L 型をカット&ペーストして得られるものに限る。

証明 (1) V型ペントミノ：辺 e_3 と接着する辺を考える。 $\{e_3, e_0\}$ はカット&ペーストでI型に変形できる。 $\{e_3, e_2\}$ および $\{e_3, e_{10}\}$ はカット&ペーストでL型に変形できる。 $\{e_3, e_6\}$ および $\{e_3, e_8\}$ は、 $\{e_4, e_5\}$ または $\{e_4, e_7\}$ の接着が必然であり、それぞれカット&ペーストでL,I型に変形できる。最後に $\{e_3, e_4\}$ を接着した場合、 $\{v_3, v_5\}$ が接着されて内角の和が 360° となるので、 $\{e_2, e_5\}$ の接着が必然となる。同様に、 $\{e_1, e_6\}$ も接着されなければならない。ここで、辺 e_0 を接着する辺を考えると、 $\{e_0, e_7\}$ はカット&ペーストでI型に、 $\{e_0, e_9\}$ はL型に変形できるので、 $\{e_0, e_{11}\}$ のみを考えればよい。対称性から、辺 e_7 についても $\{e_7, e_8\}$ のみを考えればよく、残った $\{e_9, e_{10}\}$ の接着が必然となる。このとき、4頂点 $\{v_7, v_9, v_{11}, v_1\}$ が接着され、ここでの内角の和が 540° となって凸性に反する。

(2) T型ペントミノ：辺 e_1 と接着する辺を考える。 $\{e_1, e_2\}$ の接着は、 $\{e_0, e_3\}$ の接着が必然となり、 e_3 を含む正方形をカット&ペーストしてL型に変形できる。 $\{e_1, e_4\}$ または $\{e_1, e_8\}$ の接着は、 e_1, e_2 を含む2つの正方形をカット&ペーストして、L型に変形できる。 $\{e_1, e_{10}\}$ の接着は、 $\{v_2, v_{10}\}$ が集まり、そこでの内角の和が 450° となり、凸性に反する。以上より、 e_1 と接着する辺は、 e_0 か e_6 を考えればよい。対称性から、 e_{11} についても同じことが言えるので、 $\{e_1, e_6\}, \{e_{11}, e_0\}$ の接着のみ考えればよい。この接着は、3頂点 $\{v_{11}, v_1, v_7\}$ が集まり、そこでの内角の和が 450° となって凸性に反する。

(3) Y型ペントミノ：辺 e_6 と接着する辺を考える。 $\{e_6, e_7\}$ または $\{e_6, e_9\}$ はカット&ペーストでL型に変形できる。 $\{e_6, e_3\}$ または $\{e_6, e_{11}\}$ は凹頂点 v_7 と接着される頂点 (v_3 または v_{11}) が 180° のため凸性に反する。 $\{e_6, e_5\}$ は、 $\{v_5, v_7\}$ が接着されて内角の和が 360° となるので $\{e_4, e_7\}$ の接着が必然となり、カット&ペーストでL型に変形できる。最後に、 $\{e_6, e_1\}$ のケースも、 $\{e_0, e_7\}$ の接着が必然となり、カット&ペーストでI型に変形できる。

(4) N型ペントミノ：辺 e_2 と接着する辺を考える。 $\{e_2, e_{11}\}$ の接着は、 e_{11}, e_{10} を含む2つの正方形をカット&ペーストしてL型に変形できる。 $\{e_2, e_9\}$ もカット&ペーストでI型に変形できる。 $\{e_2, e_7\}$ は、 $\{v_2, v_8\}$ が接着され、凸性に反する。 $\{e_2, e_5\}$ は、 $\{e_6, e_1\}$ の接着が必然となり、 e_1 を含む正方形をカット&ペーストしてL型に変形できる。 $\{e_2, e_3\}$ は、 $\{v_2, v_4\}$ が接着され、凸性に反する。 $\{e_2, e_1\}$ は、2個と3個の正方形に分けるカット&ペーストでL型に変形できる。

(5) P型ペントミノ：辺 e_5 と接着する辺を考える。 $\{e_5, e_6\}$ または $\{e_5, e_0\}$ はカット&ペーストでI型に変形できる。 $\{e_5, e_2\}$ は $\{v_2, v_6\}$ が接着されて内角の和が 450° となるので凸性に反する。 $\{e_5, e_4\}$ は、 $\{v_4, v_6\}$ が接着されて内角の和が 360° となるので $\{e_3, e_6\}$ の接着が必然であり、カット&ペーストでL型に変形できる。最後に、 $\{e_5, e_8\}$ を接着した場合を考える。このとき、辺 e_3 と接着する辺は、 e_0, e_2, e_4 のいずれかであるが、 $\{e_3, e_2\}$ の接着は $\{v_2, v_4\}$ が接着されて凸性に反する。 $\{e_3, e_0\}$ または $\{e_3, e_4\}$ を接着するケースは、いずれもカット&ペーストでL型に変形できる。□

補題 4.4 Z,U,F,X,W 型ペントミノのアレクサンドロフの条件を満たす辺々接着は, L,V,T,Y,N 型の辺々接着をカット&ペーストして得られるものに限る。

証明 (1) Z型ペントミノ: 辺 e_4 と接着する辺を考える。 $\{e_4, e_5\}$ または $\{e_4, e_7\}$ の接着は, e_5 を含む正方形をカット&ペーストして, L型に変形できる。 $\{e_4, e_9\}$ の接着は e_9, e_0 を含む正方形2つをカット&ペーストしてY型に変形できる。 $\{e_4, e_{11}\}$ または $\{e_4, e_1\}$ の接着は, e_0 を含む正方形をカット&ペーストしてY型に変形できる。 $\{e_4, e_3\}$ の接着は, $\{v_2, v_3\}$ に接着される角が 360° であることから $\{e_5, e_2\}, \{e_6, e_1\}$ の接着が必然となり, e_0 を含む正方形をカット&ペーストして, V型に変形できる。以上より, Z型のアレクサンドロフ辺々接着はL,V,Y型をカット&ペーストしたものしかない。

(2) U型ペントミノ: 辺 e_{10} と接着する辺を考える。対称性から, e_{10} と接着する辺は, e_{11}, e_1, e_3 のいずれかと仮定してよい。 $\{e_{10}, e_{11}\}$ の接着は, $\{v_0, v_9\}$ が接着され, そこでの内角の和が 360° なので, $\{e_0, e_9\}$ の接着が必然となり, e_9 を含む正方形をカット&ペーストしてV型に変形できる。 $\{e_{10}, e_1\}$ の接着は, $\{v_2, v_{10}\}$ が接着され凸性に反する。 $\{e_{10}, e_3\}$ の接着は, $\{v_4, v_{10}\}$ が接着され凸性に反する。以上より, U型のアレクサンドロフ辺々接着はV型をカット&ペーストしたものしかない。

(3) F型ペントミノ: 辺 e_0 と接着する辺を考える。 $\{e_0, e_1\}$ は, $\{v_0, v_2\}$ が接着され, そこでの内角の和が 360° なので, $\{e_2, e_{11}\}$ の接着が必然で, 同様に $\{e_3, e_{10}\}$ の接着も決まる。そこで, e_8, e_9 を含む2つの正方形をカット&ペーストすればL型に変形できる。 $\{e_0, e_3\}$ は, e_0 を含む正方形をカット&ペーストしてL型に変形できる。 $\{e_0, e_5\}$ は, $\{e_6, e_{11}\}, \{e_7, e_{10}\}, \{e_8, e_9\}$ の接着が必然となり, e_8 を含む正方形をカット&ペーストしてY型に変形できる。 $\{e_0, e_7\}$ は, e_0 を含む正方形をカット&ペーストしてV型に変形できる。 $\{e_0, e_9\}$ は, e_0 を含む正方形をカット&ペーストしてY型に変形できる。 $\{e_0, e_{11}\}$ は, $\{e_1, e_{10}\}, \{e_2, e_9\}$ の接着が必然となる。そこで, 辺 e_3 と接着する辺を考えると, $\{e_3, e_8\}$ または $\{e_3, e_6\}$ は, e_8 を含む正方形をカット&ペーストしてY型に変形できる。 $\{e_3, e_4\}$ は $\{v_3, v_5, v_9\}$ が接着され凸性に反する。以上より, F型のアレクサンドロフ接着は, L,V,Y型をカット&ペーストしたものしかない。

(4) X型ペントミノ: 辺 e_0 と接着する辺を考える。対称性から e_0 と接着する辺は, e_1, e_3, e_5 のいずれかと仮定してよい。 $\{e_0, e_3\}$ は, カット&ペーストでY型に変形できる。 $\{e_0, e_5\}$ は, e_5 を含む正方形をカット&ペーストしてT型に変形できる。 $\{e_0, e_1\}$ は, $\{v_0, v_2\}$ が接着され, そこでの内角の和が 360° なので $\{e_2, e_{11}\}$ の接着が必然で, 同様に $\{e_3, e_{10}\}$ の接着も決まる。そこで e_{10} を含む正方形をカット&ペーストすればT型に変形できる。以上より, X型のアレクサンドロフ接着は, Y,T型をカット&ペーストしたものしかない。

(5) W型ペントミノ: 辺 e_2 と接着する辺を考える。 $\{e_2, e_1\}$ または $\{e_2, e_{11}\}$ は, カット&ペーストでN型に変形できる。 $\{e_2, e_3\}$ は, $\{v_2, v_4\}$ が接着され凸性に反する。 $\{e_2, e_7\}$ は, e_5, e_6 を含む正方形2つをカット&ペーストしてY型に変形できる。 $\{e_2, e_9\}$ は, $\{e_3, e_8\}, \{e_4, e_7\}, \{e_5, e_6\}$

の接着が必然となり、 e_6 を含む正方形でカット&ペーストして、N型に変形できる。最後に $\{e_2, e_5\}$ は、 $\{e_3, e_4\}, \{e_1, e_6\}$ の接着が必然となる。ここで e_0 と接着する辺を考えると、 $\{e_0, e_{11}\}$ の接着は $\{v_{11}, v_1, v_7\}$ 、 $\{e_0, e_9\}$ の接着は $\{v_9, v_1, v_7\}$ が接着され、どちらも凸性に反するので、 $\{e_0, e_7\}$ の接着が必然となり、カット&ペーストでN型に変形できる。以上より、W型のアレクサンドロフ接着は、Y,N型をカット&ペーストしたものしかない。□

I,L型のペントミノからは4.2節に示した6種類の多面体を作られる。補題4.3より、V,T,Y,N,P型ペントミノから作られる多面体はI,L型からカット&ペーストで得られるものしかなく、補題4.4より、他の型は、L,V,T,Y,N型からカット&ペーストで得られるので、図17, 18に示した6種類以外の多面体は、ペントミノの辺々接着では現れないことが証明された。

定理 4.5 ペントミノの辺々接着によって作られる多面体は、図17, 18に示す双四角錐、双三角錐、2重被覆の台形(2種)、五角形、直角二等辺三角形の6種類に限る。特に、2重被覆多角形を除くと、双四角錐と双三角錐の2種類に限る。

各ペントミノから辺々接着で作れる多面体の一覧を表7に示す。

表 7: 各ペントミノから辺々接着で作れる多面体

| 多面体 | I | L | V | T | Y | N | P | Z | U | F | X | W |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 双四角錐 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | — | ○ |
| 双三角錐 | — | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 台形A | ○ | ○ | ○ | — | — | ○ | — | ○ | — | — | — | ○ |
| 台形B | ○ | ○ | ○ | — | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | — | ○ |
| 五角形 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | — | — |
| 三角形 | — | ○ | ○ | ○ | ○ | — | ○ | ○ | — | ○ | ○ | ○ |

参考文献

- [1] エリック・D・ドメイン&ジョセフ・オルーク著，上原隆平訳，幾何的な折りアルゴリズム，近代科学社，2009.
- [2] ソロモン・ゴロム著，川辺治之訳，箱詰めパズル ポリオミノの宇宙，日本評論社，2014.
- [3] ジョセフ・オルーク著，上原隆平訳，折り紙のすうり，近代科学社，2012
- [4] 坂口一成，多面体の展開と再構成，福井大学大学院教育学研究科修士論文，2015.