安定マッチングの最大数と安定結婚グラフについて

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2014-02-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 宮下, 奈央, 櫻本, 篤司 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/8080

安定マッチングの最大数と安定結婚グラフについて

宮　下　奈　央[*1]　　櫻　本　篤　司[*2]

（2013年9月27日　受付）

1　序文

安定結婚問題とは，複数の男性と女性がいて，それぞれ異性に対し選好順序を持っているとき，ある種の安定性を持つマッチング（男女の組合せ）を求める問題である。この問題は1962年にD. GaleとL. S. Shapleyによって提唱され，彼らは安定マッチングを求めるアルゴリズム(Gale-Shapleyアルゴリズム)を開発し，どのような問題に対しても必ず安定マッチングが存在することを証明した([5])。一般に安定マッチングは複数存在する場合が多く，Gale-Shapleyアルゴリズムで求めることができるマッチングは，男性または女性の一方にとって最も良く，他方にとっては最悪のマッチングとなっている。そこで，男女の双方が納得するマッチングを求める方法や，マッチングの評価などの研究がなされている。また，安定結婚問題には多くの種類があり，男女のペアのような1対1ではなく，研修医配属問題などの多対1のマッチングを求める問題や，男女の2つのグループではなく1つのグループの中でのマッチングを考える安定ルームメイト問題などがあり，実生活の様々な場面でその理論が用いられている。

本稿では，男女の人数が同数の安定結婚問題を扱う。男女の人数がともにn人である安定結婚問題（サイズnの安定結婚問題）における安定マッチングの最大数を$f(n)$とおく。この最大数$f(n)$についても多くの研究がなされている。$n = 4$の場合はD. E. Knuth[8]により10個の安定マッチングを持つ例が示され，D. Eilersはコンピュータを用いてすべての安定結婚問題について調べることで$f(4) = 10$であることを示した([4])。$n \geq 5$の場合の$f(n)$の正確な値はまだ得られていないが，様々な評価式が得られている。一般にnが2の累乗の場合は，$g(1) = 1, g(2) = 2, g(2^m) = 3g(2^{m-1})^2 - 2g(2^{m-2})^2$によって定まる$g(2^m)$を用いた下からの評価式$f(2^m) \geq g(2^m)$が得られている([7])。安定結婚問題において，選好順序は安定結婚グラフと呼ばれる有向グラフにより表現することが可能で，この安定結婚グラフを用いてすべての安

*1 福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻数学教育領域
*2 福井大学教育地域科学部理数教育講座

定マッチングを求めることができる。本稿では，安定結婚グラフを利用して安定マッチングの最大数 $f(n)$ の評価式を求め，得られた評価式や安定結婚グラフを用いた（コンピュータを使わない）議論で $f(3)=3, f(4)=10$ を示す。

2　安定結婚問題

定義 2.1. n 人の男性からなる男性集合 $H=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$ と n 人の女性からなる女性集合 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ が存在し，各人は異性全員を同位なしで好きな順に 1 列に並べた選好順序を持っている。この選好順序を表で表したものを**希望リスト**という。

希望リストでは，各人の右側に異性全員が左から右に好きな順に並んでいる。

例 2.1. 希望リスト

h_1	:	d_2	d_3	d_1	d_4	d_1	:	h_4	h_1	h_3	h_2
h_2	:	d_4	d_1	d_2	d_3	d_2	:	h_2	h_3	h_4	h_1
h_3	:	d_2	d_4	d_3	d_1	d_3	:	h_3	h_2	h_4	h_1
h_4	:	d_3	d_1	d_4	d_2	d_4	:	h_1	h_4	h_3	h_2

この希望リストでは，男性 h_1 の好きな女性は順に d_2,d_3,d_1,d_4 であり，女性 d_4 の好きな男性は順に h_1,h_4,h_3,h_2 である。

定義 2.2. 男性 h の選好順序における女性 d の順位を $\mathrm{rank}_h(d)$ で表し，女性 d の選好順序における男性 h の順位を $\mathrm{rank}_d(h)$ で表す。

例 2.2. 例 2.1 の希望リストでは，$\mathrm{rank}_{h_2}(d_1)=2, \mathrm{rank}_{d_3}(h_1)=4$ である。

定義 2.3. $h,h'\in H,\ d,d'\in D$ とする。$\mathrm{rank}_h(d)<\mathrm{rank}_h(d')$ であるとき $d<_h d'$ と表す。また，$\mathrm{rank}_d(h)<\mathrm{rank}_d(h')$ であるとき $h<_d h'$ と表す。

例 2.3. 例 2.1 の希望リストでは，$\mathrm{rank}_{h_1}(d_3)=2, \mathrm{rank}_{h_1}(d_4)=4$ であるから，$d_3<_{h_1} d_4$ である。また，$\mathrm{rank}_{d_2}(h_2)=1, \mathrm{rank}_{d_2}(h_4)=3$ であるから，$h_2<_{d_2} h_4$ である。

定義 2.4. H に属する 1 人の男性と D に属する 1 人の女性の組を**ペア**といい，男性 $h_i\,(\in H)$ と女性 $d_j\,(\in D)$ のペアを (h_i,d_j) と表す。ペアは $H\times D$ の要素である。

$H\times D$ の部分集合で，誰もが 2 つ以上のペアに属さないものを**マッチング**という。マッチングが n 組のペアを含むとき，つまり誰もがペアに属しているとき，このマッチングを**完全マッチング**という。

例 2.4. 例 2.1 の希望リストでは，マッチング $M_0 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_2), (h_3, d_3), (h_4, d_4)\}$ は完全マッチングである。

以下では，特に記述がない限りマッチングは完全マッチングを指すものとする。

定義 2.5. マッチング M において，ペアを組んでいる相手のことを**パートナー**と呼び，男性 h のパートナーを $P_M(h)$，女性 d のパートナーを $P_M(d)$ で表す。

例 2.5. 例 2.4 のマッチング M_0 では，$P_{M_0}(h_1) = d_1$, $P_{M_0}(d_2) = h_2$ である。

定義 2.6. マッチング M において，以下の 3 つの条件 (i),(ii),(iii) を全て満たすペア (h, d) を M の**不安定ペア**と呼ぶ。

$$\text{(i)} \quad (h, d) \notin M, \qquad \text{(ii)} \quad d <_h P_M(h), \qquad \text{(iii)} \quad h <_d P_M(d).$$

例 2.6. 例 2.1 の希望リストでは，マッチング M_0 において，

$$(h_4, d_1) \notin M_0,\ d_1 <_{h_4} d_4 = P_{M_0}(h_4),\ h_4 <_{d_1} h_1 = P_{M_0}(d_1)$$

であるから，(h_4, d_1) は M_0 の不安定ペアである。

定義 2.7. 不安定ペアが存在しないマッチングを**安定マッチング**，不安定ペアが存在するマッチングを**不安定マッチング**と呼ぶ。

例 2.7. 例 2.6 より $M_0 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_2), (h_3, d_3), (h_4, d_4)\}$ は不安定ペア (h_4, d_1) が存在するので不安定マッチングである。それに対して，$M_1 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_4), (h_3, d_2), (h_4, d_3)\}$ は不安定ペアが存在しないので安定マッチングである。

定義 2.8. 男性集合 H，女性集合 D $(H \cap D = \emptyset, |H| = |D| = n)$ において，各人が異性全員に対して選好順位を持っているとき，安定マッチングを見つける問題を**安定結婚問題**という。安定結婚問題 I は男性集合 H，女性集合 D，希望リスト L の 3 つ組 $I = (H, D, L)$ により表現される。

定義 2.9. 安定結婚問題 I におけるすべての安定マッチングの集合を $\mathcal{M}(I)$ と表す。

例 2.8. 例 2.1 の希望リストで与えられる安定結婚問題を I とすると，$\mathcal{M}(I) = \{M_1, M_2, M_3\}$ となる。ただし，

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(h_1, d_1), (h_2, d_4), (h_3, d_2), (h_4, d_3)\}, \\ M_2 &= \{(h_1, d_1), (h_2, d_2), (h_3, d_4), (h_4, d_3)\}, \\ M_3 &= \{(h_1, d_4), (h_2, d_2), (h_3, d_3), (h_4, d_1)\} \end{aligned}$$

である。

3　安定結婚グラフ

3.1　安定結婚グラフ

希望リストを有向グラフで表したものを安定結婚グラフと呼ぶ。

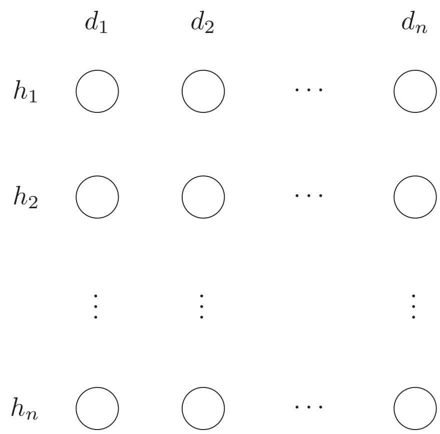
定義 3.1. 安定結婚問題において, 男性集合を H, 女性集合を D とし, $V = H \times D$, $A = A_H \cup A_D$ とする。ただし,

$$A_H = \{((h, d), (h, d')) \in V \times V \mid d' <_h d\},$$
$$A_D = \{((h, d), (h', d)) \in V \times V \mid h' <_d h\}$$

である。このとき，有向グラフ $\Gamma = (V, A)$ を**安定結婚グラフ**という。

安定結婚グラフの描き方

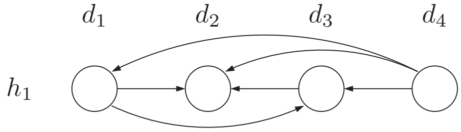
- 点集合
  男性集合 $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$, 女性集合 $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ の安定結婚グラフでは, n^2 個の点を下図のように n 行 n 列に並べる。行は上から順に男性 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ を，列は左から順に $d_1, d_2, \cdots, d_n$ を表し，i 行 j 列の頂点は (h_i, d_j) を表している。



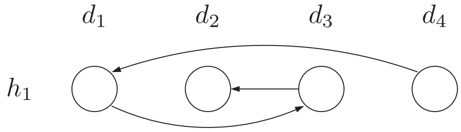
  なお，各行，各列には対応する男性，女性をラベルとしてつけておく。
- 辺集合
  男性集合 $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$，女性集合 $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ で，希望リストが次の場合で説明する。

h_1	:	d_2	d_3	d_1	d_4	d_1	:	h_4	h_1	h_3	h_2
h_2	:	d_4	d_1	d_2	d_3	d_2	:	h_2	h_3	h_4	h_1
h_3	:	d_2	d_4	d_3	d_1	d_3	:	h_3	h_2	h_4	h_1
h_4	:	d_3	d_1	d_4	d_2	d_4	:	h_1	h_4	h_3	h_2

A_H のうち，男性 h_1 とのペア $(h_1,d_1),(h_1,d_2),(h_1,d_3),(h_1,d_4)$ の間の辺について考える。男性 h_1 の選好順序は d_2,d_3,d_1,d_4 であるから，辺を図示すると次のようになる。



しかし，h_1 の選好順序は次の辺だけで表すことができる。



つまり，$\mathrm{rank}_{h_1}(d_i) = \mathrm{rank}_{h_1}(d_j) + 1$ となる辺 $((h_1,d_i),(h_1,d_j))$ だけを表示すればよい。他の行と列でも同様であるので，安定結婚グラフを描く際，辺は

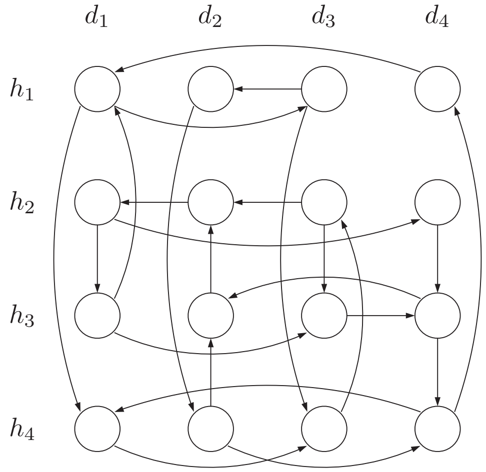
$$((h,d),(h,d')) \quad (\mathrm{rank}_h(d) = \mathrm{rank}_h(d') + 1),$$
$$((h,d),(h',d)) \quad (\mathrm{rank}_d(h) = \mathrm{rank}_d(h') + 1)$$

のみを描くことにする。つまり，安定結婚グラフを描くときは選好順序を表すのに必要最低限の辺のみを描く。

例 3.1. $H = \{h_1,h_2,h_3,h_4\}$，$D = \{d_1,d_2,d_3,d_4\}$ とし，希望リストは

h_1	:	d_2	d_3	d_1	d_4	d_1	:	h_4	h_1	h_3	h_2
h_2	:	d_4	d_1	d_2	d_3	d_2	:	h_2	h_3	h_4	h_1
h_3	:	d_2	d_4	d_3	d_1	d_3	:	h_3	h_2	h_4	h_1
h_4	:	d_3	d_1	d_4	d_2	d_4	:	h_1	h_4	h_3	h_2

とする。このときの安定結婚グラフは次のようになる。



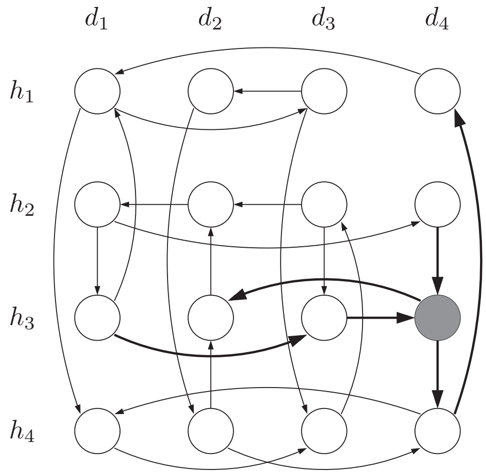
定義 3.2. 安定結婚グラフ $\Gamma = (V, A)$ の点 $(h, d) \in V$ に対し，以下の 4 つの集合を定義する。

$$\mathrm{pre}_H(h,d) = \{(h,d') \in V \mid d' <_h d\}, \quad \mathrm{suc}_H(h,d) = \{(h,d') \in V \mid d <_h d'\},$$
$$\mathrm{pre}_D(h,d) = \{(h',d) \in V \mid h' <_d h\}, \quad \mathrm{suc}_D(h,d) = \{(h',d) \in V \mid h <_d h'\}.$$

例 3.2. 例 2.1 の安定結婚グラフにおいて，点 (h_3, d_4) に対して

$$\mathrm{pre}_H(h_3,d_4) = \{(h_3,d_2)\}, \qquad \mathrm{suc}_H(h_3,d_4) = \{(h_3,d_1),(h_3,d_3)\},$$
$$\mathrm{pre}_D(h_3,d_4) = \{(h_1,d_4),(h_4,d_4)\}, \qquad \mathrm{suc}_D(h_3,d_4) = \{(h_2,d_4)\}$$

となる。

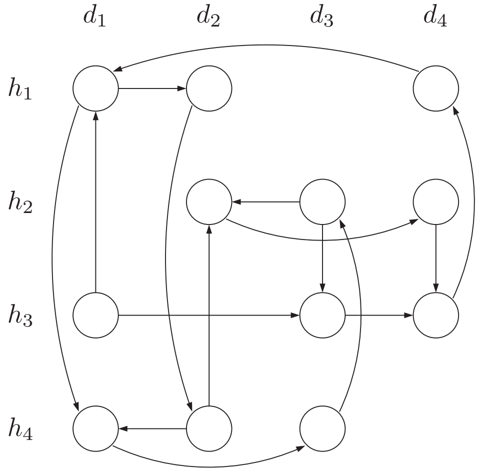


定義 3.3. $\Gamma = (V, A)$ を安定結婚グラフ，W を V の部分集合とする。

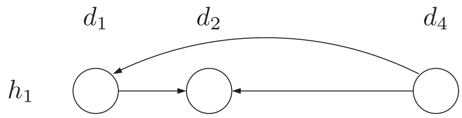
このとき，$A_W = \{(s,t) \in A \mid s,t \in W\}$ と定め，Γ の部分グラフ $\Gamma_W = (W, A_W)$ を W **によって定まる** Γ **の安定結婚部分グラフ**という。

注意　$W = V$ の時は $\Gamma_W = \Gamma$ であるので，安定結婚グラフも安定結婚部分グラフといえる。

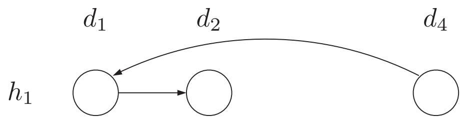
例 3.3. 例 2.1 の安定結婚問題において，$W = (H \times D) \setminus \{(h_1,d_3),(h_2,d_1),(h_3,d_2),(h_4,d_4)\}$ とするとき，安定結婚部分グラフ Γ_W は次のようになる。



安定結婚部分グラフの場合も，辺に関しては選好順序を表すのに必要最低限の辺のみを描く。例えば，h_1 の行ではすべての辺を描くと



となるが，h_1 の選好順序を表すには次の 2 辺のみで十分である。



定義 3.4. $\Gamma = (V, A)$ を安定結婚グラフ，$\Gamma_W = (W, A_W)$ をその安定結婚部分グラフとし，$(h, d) \in W$ とする。

(1) $\mathrm{pre}_H(h, d) \cap W = \emptyset$ である点 (h, d) を Γ_W における**男性最良点**，$\mathrm{suc}_H(h, d) \cap W = \emptyset$ である点 (h, d) を Γ_W における**男性最悪点**という。

(2) $\mathrm{pre}_D(h, d) \cap W = \emptyset$ である点 (h, d) を Γ_W における**女性最良点**，$\mathrm{suc}_D(h, d) \cap W = \emptyset$ である点 (h, d) を Γ_W における**女性最悪点**という。

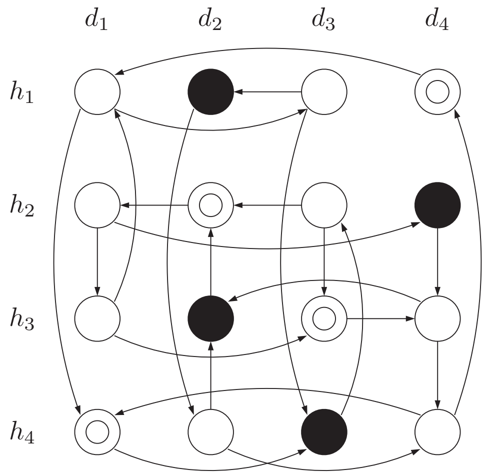
(3) 点 (h, d) が Γ_W における男性最良点のとき，$\mathrm{suc}_D(h, d) \cap W$ に属する点を，Γ_W において**男性最良点に支配されている点**という。

(4) 点 (h, d) が Γ_W における女性最良点のとき，$\mathrm{suc}_H(h, d) \cap W$ に属する点を，Γ_W において**女性最良点に支配されている点**という。

安定結婚グラフにおいては，最良点（最悪点）は選好順序が最上位（最下位）の異性とのペアを表す点である。

安定結婚部分グラフにおいては，男性最良点を●で，女性最良点を◎で表すことにする。

例 3.4. 例 2.1 の安定結婚グラフの場合は，$(h_1, d_2), (h_2, d_4), (h_3, d_2), (h_4, d_3)$ が男性最良点，$(h_1, d_4), (h_2, d_2), (h_3, d_3), (h_4, d_1)$ が女性最良点となる。



また，男性最良点 (h_4, d_3) に支配されている点は (h_1, d_3)，女性最良点 (h_3, d_3) に支配されている点は (h_3, d_1) である。

命題 3.1. 男性最良点に支配される点，女性最良点に支配される点は安定マッチングに含まれない。

証明

点 (h,d) を男性最良点 (h',d) に支配される点であるとし，(h,d) が安定マッチング M に含まれるとすると，マッチングの定義より $(h',d) \notin M$ である。すると，(h',d) が男性最良点であることより $d <_{h'} P_M(h')$，(h,d) が (h',d) に支配されることより $h' <_d h = P_M(d)$ となるので，(h',d) は M の不安定ペアとなる。M は安定マッチングであるので，(h,d) は M に含まれないことが言える。

同様にして，女性最良点に支配される点の場合も成り立つことが言える。 □

この命題より，安定マッチングを求めるときは，男性最良点・女性最良点に支配される点は除外して考えればよいことがわかる。

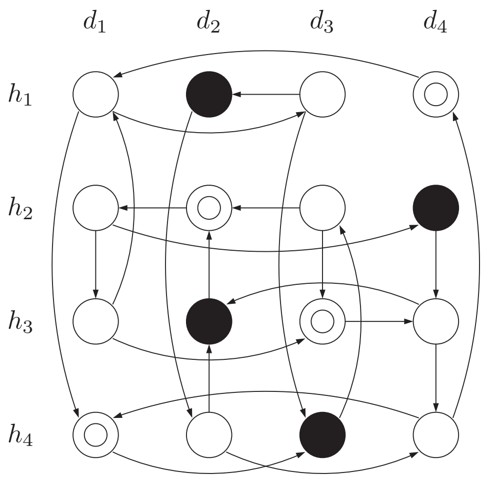
定義 3.5. $\Gamma = (V,A)$ を安定結婚グラフ，$\Gamma_W = (W,A_W)$ をその安定結婚部分グラフとするとき，次の既約化アルゴリズムで得られる安定結婚部分グラフ Γ' を Γ_W の**既約安定結婚部分グラフ**という。特に，$W=V$ のときは Γ'_W を Γ' と表し，Γ の**既約安定結婚グラフ**という。

既約化アルゴリズム

0. $W_0 = W, i = 0$ とする。
1. Γ_{W_i} において男性最良点に支配される点，女性最良点に支配される点からなる集合を X_i とする。
2. (1) $X_i \neq \emptyset$ ならば $W_{i+1} = W_i \setminus X_i$ とし，$i+1$ の値を i として 1. に戻る。
   (2) $X_i = \emptyset$ ならば $\Gamma'_W = (W_i, A_{W_i})$ とし，終了する。

例 3.5. 例 2.1 の安定結婚グラフ $\Gamma = (V,A)$ に対して既約化アルゴリズムを行う。

$W_0 = V, i = 0$ とする。

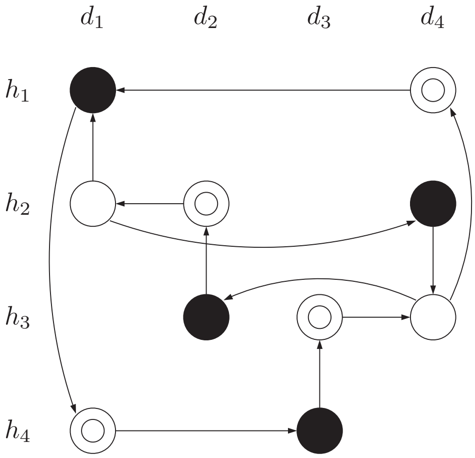


Γ_{W_0} において男性最良点に支配されている点は $(h_1, d_2), (h_1, d_3), (h_4, d_2)$，女性最良点に支配されている点は $(h_2, d_3), (h_3, d_1), (h_4, d_2), (h_4, d_4)$ であるから，

$$X_0 = \{(h_1, d_2), (h_1, d_3), (h_2, d_3), (h_3, d_1), (h_4, d_2), (h_4, d_4)\}$$

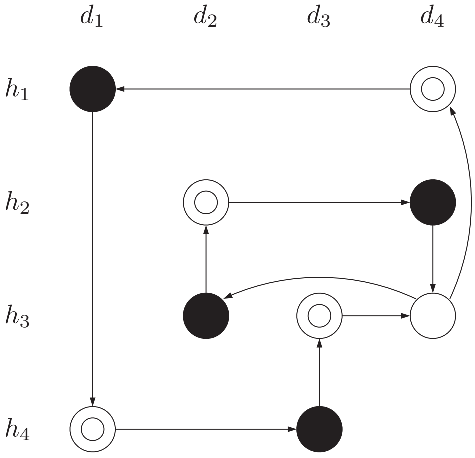
となる。

$X_0 \neq \emptyset$ であるから，$W_1 = W_0 \setminus X_0 (= V \setminus X_0)$ とし，Γ_{W_1} を考える。



Γ_{W_1} において男性最良点に支配されている点は (h_2, d_1)，女性最良点に支配されている点は存在しないので，$X_1 = \{(h_2, d_1)\}$ となる。

$X_1 \neq \emptyset$ であるから，$W_2 = W_1 \setminus X_1 (= V \setminus (X_0 \cup X_1))$ とし，Γ_{W_2} を考える。



Γ_{W_2} において男性最良点に支配されている点，女性最良点に支配されている点は存在しないので $X_2 = \emptyset$ であり，$\Gamma' = \Gamma_{W_2}$ が Γ の既約安定結婚グラフとなる。

定義 3.6. 安定結婚部分グラフ Γ_W におけるすべての安定マッチングの集合を $\mathcal{M}(\Gamma_W)$ と表す。

定理 3.1. ([3]) Γ を安定結婚グラフ，Γ_W を安定結婚部分グラフとするとき，

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \mathcal{M}(\Gamma'),\ \mathcal{M}(\Gamma_W) = \mathcal{M}(\Gamma'_W)$$

が成立する。

4 安定マッチングの最大数について

4.1 安定マッチングの最大数

ここでは，安定結婚問題における安定マッチングの最大数について調べる。

定義 4.1. サイズ n の安定結婚問題における安定マッチングの最大数を $f(n)$ と表す。

男女 n 人ずつのマッチングの数は最大でも $n!$ 個なので，$f(n) \leq n!$ である。

例 4.1. $f(n) \leq n!$ より，$f(1) = 1, f(2) \leq 2$ である。ここで次の希望リストを持つサイズ 2 の安定結婚問題を考える。

h_1	:	d_1	d_2	d_1	:	h_2	h_1
h_2	:	d_2	d_1	d_2	:	h_1	h_2

2 つの安定マッチング $M_1 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_2)\}, M_2 = \{(h_1, d_2), (h_2, d_1)\}$ が存在するので，$f(2) = 2$ である。

定義 4.2. $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$ を男性集合，$D = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ を女性集合とするサイズ n の安定結婚問題を I とする。このとき，$1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$\mathcal{M}_{i,j} = \{M \in \mathcal{M}(I) \mid (h_i, d_j) \in M\}$$

と定める。また，男性集合 $H_i = H \setminus \{h_i\}$，女性集合 $D_j = D \setminus \{d_j\}$ の安定結婚問題を $I_{i,j}$ とおき，その安定結婚グラフを $\Gamma_{i,j}$ とおく。ただし，$I_{i,j}$ の希望リストについては，I の希望リストから h_i と d_j を削除するだけで順序の入れ替えはしない。

例 4.2. 例 2.1 の安定結婚問題 I に対しては，以下の 3 つの安定マッチングが存在する。

$$M_1 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_4), (h_3, d_2), (h_4, d_3)\},$$
$$M_2 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_2), (h_3, d_4), (h_4, d_3)\},$$
$$M_3 = \{(h_1, d_4), (h_2, d_2), (h_3, d_3), (h_4, d_1)\}.$$

従って，$\mathcal{M}_{1,1} = \{M_1, M_2\}, \mathcal{M}_{3,2} = \{M_1\}$ である。また，$I_{3,2}$ の希望リストは次のようになる。

h_1	:	d_3	d_1	d_4	d_1	:	h_4	h_1	h_2
h_2	:	d_4	d_1	d_3	d_3	:	h_2	h_4	h_1
h_4	:	d_3	d_1	d_4	d_4	:	h_1	h_4	h_2

マッチングの定義より，次が成り立つ。

命題 4.1.

(1) $\mathcal{M}_{i,j} \cap \mathcal{M}_{i,k} = \mathcal{M}_{j,i} \cap \mathcal{M}_{k,i} = \emptyset \quad (j \neq k)$

(2) $\mathcal{M}(I) = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{M}_{i,j} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{M}_{j,i}$

(3) $|\mathcal{M}(I)| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\mathcal{M}_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{M}_{j,i}|$

命題 4.1(3) より，安定結婚問題 I におけるマッチングの数は，$\mathcal{M}_{i,j}$ の要素の個数から求めることができる。

$|\mathcal{M}_{i,j}|$ については次が成り立つ。

命題 4.2.

(1) $M \in \mathcal{M}_{i,j}$ に対して $M' = M \setminus \{(h_i, d_j)\}$ とおくとき，$M' \in \mathcal{M}(I_{i,j})$ である。

(2) $|\mathcal{M}_{i,j}| \leq |\mathcal{M}(I_{i,j})|$

証明

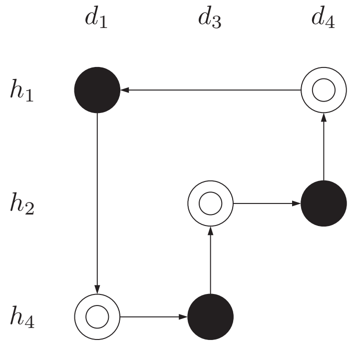
(1) M はマッチングであるから，M' もマッチングである。また，M' が不安定ペア (h, d) を持つとすると，(h, d) は M においても不安定ペアとなる。これは M が安定マッチングであることに矛盾するから，M' も安定マッチングであり，$M' \in \mathcal{M}(I_{i,j})$ が成り立つ。

(2) (1) より $\{M' \mid M \in \mathcal{M}_{i,j}\} \subset \mathcal{M}(I_{i,j})$ であり，$M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{i,j}, M_1 \neq M_2$ とすると $M_1' \neq M_2'$ であるから，$|\mathcal{M}_{i,j}| \leq |\mathcal{M}(I_{i,j})|$ が成り立つ。 □

例 4.3. 例 2.1 の安定結婚問題を I とし，$\mathcal{M}(I_{3,2})$ を求める。$I_{3,2}$ の希望リストは

h_1	:	d_3	d_1	d_4		d_1	:	h_4	h_1	h_2
h_2	:	d_4	d_1	d_3		d_3	:	h_2	h_4	h_1
h_4	:	d_3	d_1	d_4		d_4	:	h_1	h_4	h_2

であり，既約安定結婚グラフは次のようになる。



$I_{3,2}$ は安定マッチング $M_a = \{(h_1, d_1), (h_2, d_4), (h_4, d_3)\}$, $M_b = \{(h_1, d_4), (h_2, d_3), (h_4, d_1)\}$ を持ち，$\mathcal{M}(I_{3,2}) = \{M_a, M_b\}$ である。よって，$|\mathcal{M}(I_{3,2})| = 2$ となり，例 4.2 より $|\mathcal{M}_{3,2}| = 1$ であるから，$|\mathcal{M}_{3,2}| \leq |\mathcal{M}(I_{3,2})|$ が成立する。

この例でも分かるように，$|\mathcal{M}_{i,j}| = |\mathcal{M}(I_{i,j})|$ が成り立つとは限らない。

命題 4.3. $f(n) \leq nf(n-1)$

証明

I を $f(n)$ 個の安定マッチングを持つサイズ n の安定結婚問題とする。

このとき，$I_{i,j}$ はサイズ $n-1$ の安定結婚問題となり，

$$|\mathcal{M}_{i,j}| \leq |\mathcal{M}(I_{i,j})| \leq f(n-1).$$

従って

$$f(n) = |\mathcal{M}(I)| = \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{M}_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n} f(n-1) = nf(n-1)$$

となる。 □

命題 4.2 (1) で，$\mathcal{M}_{i,j}$ から $\mathcal{M}(I_{i,j})$ への写像を

$$\mathcal{M}_{i,j} \ni M \mapsto M' = M \setminus \{(h_i, d_j)\} \in \mathcal{M}(I_{i,j})$$

により定めた。ここで，逆の写像を考える。つまり $M_0 \in \mathcal{M}(I_{i,j})$ に対し，$M = M_0 \cup \{(h_i, d_j)\}$ と定める。このとき M はマッチングとなるが，$M \in \mathcal{M}_{i,j}$ を満たすとは限らない。実際，例 4.3 の $M_b = \{(h_1, d_4), (h_2, d_3), (h_4, d_1)\} \in \mathcal{M}(I_{3,2})$ では，$M = M_b \cup \{(h_3, d_2)\}$ は不安定ペア (h_2, d_2) を持つので安定マッチングではない。

ここで，$M = M_0 \cup \{(h_i, d_j)\}$ が安定マッチングとなるための条件を求める。

$M_0 \in \mathcal{M}(I_{i,j})$ であるから，$H_i \times D_j$ に含まれる点は M の不安定ペアとならない。よって，M の不安定ペアとなり得るのは，点 (h_i, d_k) $(k \neq j)$ または点 (h_k, d_j) $(k \neq i)$ である。点 (h_i, d_k) が M の不安定ペアとなるのは $d_k <_{h_i} d_j, h_i <_{d_k} P_M(d_k) = P_{M_0}(d_k)$ の場合である。同様に，点 (h_k, d_j) が M の不安定ペアとなるのは $h_k <_{d_j} h_i, d_j <_{h_k} P_M(h_k) = P_{M_0}(h_k)$ の場合である。そこで，$M = M_0 \cup \{(h_i, d_j)\}$ が安定マッチングとなるために $H_i \times D_j$ から除外すべき点の集合を定義する。

定義 4.3. $1 \leq i, j \leq n$ に対し，$V_{i,j}^1, V_{i,j}^2, V_{i,j}$ を次により定める。

$$\begin{aligned} V_{i,j}^1 &= \{(h, d) \in H_i \times D_j \mid h_i <_d h, d <_{h_i} d_j\}, \\ V_{i,j}^2 &= \{(h, d) \in H_i \times D_j \mid h <_{d_j} h_i, d_j <_h d\}, \\ V_{i,j} &= V_{i,j}^1 \cup V_{i,j}^2. \end{aligned}$$

例 4.4. 例 2.1 の安定結婚問題 I の場合は，$V_{3,2}^1 = \emptyset, V_{3,2}^2 = \{(h_2, d_3)\}$ となり，$V_{3,2} = \{(h_2, d_3)\}$ である。

命題 4.4.

(1) $M \in \mathcal{M}_{i,j}$ に対して $M' = M \setminus \{(h_i, d_j)\}$ とおくとき，$M' \cap V_{i,j} = \emptyset$ である。

(2) $M_0 \in \mathcal{M}(I_{i,j})$ が $M_0 \cap V_{i,j} = \emptyset$ を満たすとき，$M = M_0 \cup \{(h_i, d_j)\} \in \mathcal{M}_{i,j}$ である。

証明

(1) $M' \cap V_{i,j}^1 \neq \emptyset$ と仮定する。
$(h, d) \in M' \cap V_{i,j}^1 \subset M \cap V_{i,j}^1$ とすると，$h_i <_d h = P_M(d), d <_{h_i} d_j = P_M(h_i)$ より，(h_i, d) が M の不安定ペアとなる。これは M が安定マッチングであることに矛盾するので $M' \cap V_{i,j}^1 = \emptyset$ である。
同様にして，$M' \cap V_{i,j}^2 = \emptyset$ が言えるので，$M' \cap V_{i,j} = \emptyset$ が成り立つ。

(2) $M_0 \in \mathcal{M}(I_{i,j})$ が $M_0 \cap V_{i,j} = \emptyset$ を満たすとし，$M = M_0 \cup \{(h_i, d_j)\}$ とおくと，M は (h_i, d_j) を含むマッチングである。ここで，M が不安定ペア (h, d) を持つとすると，M_0 は $H_i \times D_j$ における安定マッチングだから $(h, d) \notin H_i \times D_j$ である。従って，$h = h_i$ または $d = d_j$ となる。

(i) $h = h_i$ の場合

このとき (h, d) は (h_i, d_k) $(k \neq j)$ とおける。(h_i, d_k) が M の不安定ペアであることより，$h_i <_{d_k} P_M(d_k) = P_{M_0}(d_k)$，$d_k <_{h_i} P_M(h_i) = d_j$ であるので，$(P_{M_0}(d_k), d_k) \in V^1_{i,j} \subset V_{i,j}$ となる。すると，$(P_{M_0}(d_k), d_k) \in M_0 \cap V_{i,j}$ となり，$M_0 \cap V_{i,j} = \emptyset$ であることに矛盾する。

(ii) $d = d_j$ の場合

このとき (h, d) は (h_k, d_j) $(k \neq i)$ とおける。(h_k, d_j) が M の不安定ペアであることより，$h_k <_{d_j} P_M(d_j) = h_i$，$d_j <_{h_k} P_M(h_k) = P_{M_0}(h_k)$ であるので，$(h_k, P_{M_0}(h_k)) \in V^2_{i,j} \subset V_{i,j}$ となる。すると，$(h_k, P_{M_0}(h_k)) \in M_0 \cap V_{i,j}$ となり，$M_0 \cap V_{i,j} = \emptyset$ であることに矛盾する。

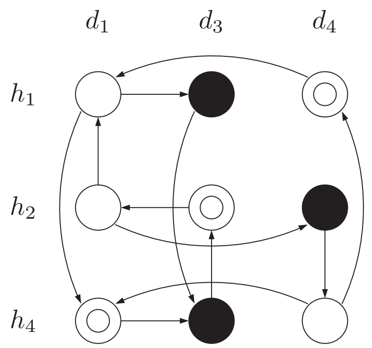
(i),(ii) より M は不安定ペアを持たないので安定マッチングとなり $M \in \mathcal{M}_{i,j}$ である。□

定義 4.4. $W_{i,j} = (H_i \times D_j) \setminus V_{i,j}$ とおき，$I_{i,j}$ の安定結婚グラフ $\Gamma_{i,j}$ の安定結婚部分グラフ $(\Gamma_{i,j})_{W_{i,j}}$ を $G_{i,j}$ とおく。さらに，$G_{i,j}$ の既約安定結婚部分グラフを $G'_{i,j}$ で表し，**既約安定結婚縮小グラフ**という。

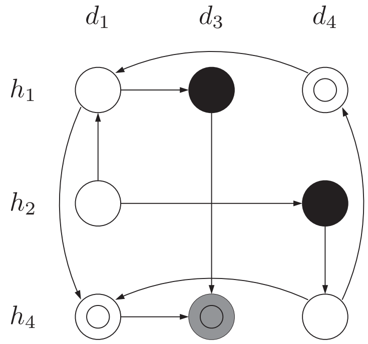
例 4.5. 例 2.1 の安定結婚問題 I を用いる。例 4.3 より $I_{3,2}$ の希望リストは

h_1	:	d_3	d_1	d_4	d_1	:	h_4	h_1	h_2
h_2	:	d_4	d_1	d_3	d_3	:	h_2	h_4	h_1
h_4	:	d_3	d_1	d_4	d_4	:	h_1	h_4	h_2

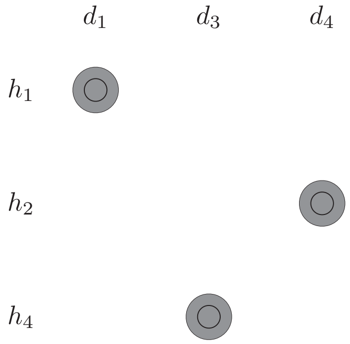
であり，安定結婚グラフは次のようになる。



例 4.4 より $V_{3,2} = \{(h_2, d_3)\}$ であるから $G_{3,2}$ と既約安定結婚縮小グラフ $G'_{3,2}$ は次のようになる。ただし，◎は男性最良点でも女性最良点でもある点を表す。



$G_{3,2}$



$G'_{3,2}$

命題 4.4 より，次が成立する。

命題 4.5.

(1) $M \in \mathcal{M}_{i,j}$ に対して $M' = M \setminus \{(h_i, d_j)\}$ とおくとき， $M' \in \mathcal{M}(G_{i,j})$ である。
(2) $M_0 \in \mathcal{M}(G_{i,j})$ に対して $M = M_0 \cup \{(h_i, d_j)\}$ とおくと き，$M \in \mathcal{M}_{i,j}$ である。

命題 4.5 より，$\mathcal{M}_{i,j} \ni M \mapsto M' = M \setminus \{(h_i, d_j)\} \in \mathcal{M}(G_{i,j})$ は全単射となるから，定理 3.1 より次が成り立つ。

定理 4.1. $|\mathcal{M}_{i,j}| = |\mathcal{M}(G_{i,j})| = |\mathcal{M}(G'_{i,j})|$

次に，既約安定結婚縮小グラフ $G'_{i,j}$ の点の数について調べる。
グラフ G の点集合を $V(G)$ で表すと，$V(G'_{i,j}) \subset V(G_{i,j}) = (H_i \times D_j) \setminus V_{i,j}$ であるから

$$|V(G'_{i,j})| \leq |V(G_{i,j})| = (n-1)^2 - |V_{i,j}| \tag{4.1}$$

となる。

定義 4.5. サイズ n の安定結婚問題の安定結婚グラフ全体の集合を $\mathcal{G}_n$ で表し，n^2 以下の非負整数 k に対して，

$$f'(n) = \max\{\ |\mathcal{M}(\Gamma)|\ \mid\ \Gamma = \Gamma', \Gamma \in \mathcal{G}_n\},$$
$$f_k(n) = \max\{\ |\mathcal{M}(\Gamma'_W)|\ \mid\ |V(\Gamma'_W)| \leq n^2 - k, W \subset H \times D, \Gamma \in \mathcal{G}_n\}$$

と定める。

$f'(n)$ は，サイズ n の既約安定結婚グラフで，点の数が n^2 個のグラフが持つ安定マッチングの最大数を，$f_k(n)$ は，サイズ n の安定結婚グラフの既約安定結婚部分グラフで，点の数が $n^2 - k$ 個以下のグラフが持つ安定マッチングの最大数を表している。

定義より，$f(n) = f_0(n)$ であり，$k < l$ のとき $f_k(n) \geq f_l(n)$ が成り立つ。

命題 4.6. m を n 以下の正の整数とする。$(m-1)n < k \leq mn$ のとき $f_k(n) \leq (n-m)f(n-1)$ である。

証明

Γ'_W をサイズ n の安定結婚グラフの既約安定結婚部分グラフで，$|V(\Gamma'_W)| \leq n^2 - k$ であるものとすると，$(m-1)n < k \leq mn$ のとき $|V(\Gamma'_W)| \leq n^2 - k < n^2 - (m-1)n = n(n-m+1)$ である。ここで，$1 \leq i \leq n$ に対して，$\{j \mid (h_i, d_j) \in V(\Gamma'_W)\}$ の要素の数を r_i とし，$r_1, \cdots, r_n$ の最小値を R とする。$\sum_{i=1}^{n} r_i = |V(\Gamma'_W)| < n(n-m+1)$ より $R < n-m+1$ となり，R は整数であるから $R \leq n-m$ となる。よって，i を $r_i = R$ となる値とすると，$\mathcal{M}_{i,1}, \cdots, \mathcal{M}_{i,n}$ のうち空集合でないものは $n-m$ 個以下である。また，$|\mathcal{M}_{i,j}| \leq f(n-1)$ であるから

$$|\mathcal{M}(\Gamma'_W)| = \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{M}_{i,j}| \leq (n-m)f(n-1)$$

となる。従って，$f_k(n) \leq (n-m)f(n-1)$ である。 □

(4.1)より

$$|\mathcal{M}(G'_{i,j})| \leq f_{|V_{i,j}|}(n-1)$$

が成り立つので，命題 4.1, 定理 4.1 より次の定理が得られる。

定理 4.2. I をサイズ n の安定結婚問題とするとき，次が成り立つ。

(1) $|\mathcal{M}(I)| \leq \sum_{j=1}^{n} f_{|V_{i,j}|}(n-1) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$

(2) $|\mathcal{M}(I)| \leq \sum_{i=1}^{n} f_{|V_{i,j}|}(n-1) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$

$k = 1, 2$ に対して，$|V_{i,j}| \geq |V^k_{i,j}|$ より $f_{|V_{i,j}|}(n-1) \leq f_{|V^k_{i,j}|}(n-1)$ が成立し，$|V^k_{i,j}|$ については次が成り立つ。

命題 4.7. $|V^1_{i,j}| = \sum_{d <_{h_i} d_j} \{n - \mathrm{rank}_d(h_i)\}$, $|V^2_{i,j}| = \sum_{h <_{d_j} h_i} \{n - \mathrm{rank}_h(d_j)\}$

証明

$d <_{h_i} d_j$ となる d に対して, $(h,d) \in V^1_{i,j}$ となるのは $h_i <_d h$, すなわち $\mathrm{rank}_d(h_i) < \mathrm{rank}_d(h)$ となる場合なので，$V^1_{i,j}$ に含まれる (h,d) は $n - \mathrm{rank}_d(h_i)$ 個ある。したがって，

$$|V^1_{i,j}| = \sum_{d <_{h_i} d_j} \{n - \mathrm{rank}_d(h_i)\}$$

である。同様にして，$|V^2_{i,j}|$ の式も成立する事が言える。 □

次に，n^2 個の点を持つ既約安定結婚グラフについて考える。

命題 4.8. n を 3 以上の整数とする。サイズ n の安定結婚問題 I の既約安定結婚グラフが n^2 個の点を持つとき，以下が成り立つ。

(1) $\mathrm{rank}_h(d) = 1$ と $\mathrm{rank}_d(h) = n$ は同値である。
(2) $\mathrm{rank}_d(h) = 1$ と $\mathrm{rank}_h(d) = n$ は同値である。
(3) $V_{i,j} = \emptyset$ となるための必要十分条件は $\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = \mathrm{rank}_{d_j}(h_i) = 2$ である。

証明

(1) $\mathrm{rank}_h(d) = 1$ のとき $\mathrm{rank}_d(h) < n$ であるとすると，$h <_d h'$ となる男性 h' が存在し，点 (h', d) は男性最良点 (h,d) に支配される。すると，安定結婚グラフの既約化の過程で (h', d) は削除されるので，既約安定結婚グラフの点の数は n^2 より少なくなり，n^2 個の点を持つことに反する。従って，$\mathrm{rank}_d(h) = n$ である。また，$\mathrm{rank}_h(d) = 1$ を満たす点 (h,d) は n 個あり，$\mathrm{rank}_d(h) = n$ を満たす点 (h,d) も n 個あるから，$\mathrm{rank}_d(h) = n$ ならば $\mathrm{rank}_h(d) = 1$ も言える。
(2) も同様である。

(3) 命題 4.7 より，$V^1_{i,j} = \emptyset$ となるのは，$\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = 1$ のとき，または「$d <_{h_i} d_j$ ならば $\mathrm{rank}_d(h_i) = n$」が成り立つときに限られる。(1) より $\mathrm{rank}_d(h_i) = n$ と $\mathrm{rank}_{h_i}(d) = 1$ は同値であるから，「$d <_{h_i} d_j$ ならば $\mathrm{rank}_d(h_i) = n$」が成り立つのは，$\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = 2$ の場合である。従って，$V^1_{i,j} = \emptyset$ となるのは $\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = 1, 2$ のときである。同様にして，$V^2_{i,j} = \emptyset$ となるのは $\mathrm{rank}_{d_j}(h_i) = 1, 2$ のときである。
$V_{i,j} = \emptyset$ は $V^1_{i,j} = V^2_{i,j} = \emptyset$ と同値であるから，$V_{i,j} = \emptyset$ となるのは $\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = 1, 2$ と $\mathrm{rank}_{d_j}(h_i) = 1, 2$ が同時に成り立つときである。しかし，(1) より $\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = 1$ のときは $\mathrm{rank}_{d_j}(h_i) = n > 2$，(2) より $\mathrm{rank}_{d_j}(h_i) = 1$ のときは $\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = n > 2$ であるから，$V_{i,j} = \emptyset$ となるための必要十分条件は $\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = \mathrm{rank}_{d_j}(h_i) = 2$ である。 □

定理 4.3. n を 3 以上の整数とするとき，$f'(n) \leq f(n-1)+(n-1)f_1(n-1)$ が成り立つ。

証明

n を 3 以上の整数とし，サイズ n の安定結婚問題 I の既約安定結婚グラフは n^2 個の点を持つとする。定理 4.2 より $|\mathcal{M}(I)| \leq \sum_{j=1}^{n} f_{|V_{1,j}|}(n-1)$ であり，$\mathrm{rank}_{h_1}(d_j) \neq 2$ のときは $V_{i,j} \neq \emptyset$ であるから

$$|\mathcal{M}(I)| \leq f(n-1)+(n-1)f_1(n-1)$$

となる。よって，

$$f'(n) \leq f(n-1)+(n-1)f_1(n-1)$$

が成立する。 □

命題 4.9. n を 3 以上の整数とする。サイズ n の安定結婚問題 I の既約安定結婚グラフが n^2 個の点を持つとき，以下が成り立つ。

(1) $\mathrm{rank}_{h_i}(d_j)=2, h_i <_{d_j} h_k$ ならば $|\mathcal{M}_{k,j}| \leq f(n-2)$ である。
(2) $\mathrm{rank}_{d_j}(h_i)=2, d_j <_{h_i} d_k$ ならば $|\mathcal{M}_{i,k}| \leq f(n-2)$ である。

証明

(1) $\mathrm{rank}_{h_i}(d_j)=2, h_i <_{d_j} h_k$ とすると，$V^2_{k,j}=\{(h,d)\in H\times D \mid h <_{d_j} h_k,\ d_j <_h d\}$ より，$\{(h_i,d) \mid d_j <_{h_i} d\} \subset V^2_{k,j} \subset V_{k,j}$ となる。また，$\mathrm{rank}_{h_i}(d_j)=2$ より，点 (h_i,d_l) を男性最良点とすると，$\{(h_i,d_m) \mid m \neq j,l\} \subset V_{k,j}$ となる。ここで，$M \in \mathcal{M}_{k,j}$，$M' = M\setminus\{(h_k,d_j)\}$ とおくと，命題 4.4 (1) より $M' \cap V_{k,j}=\emptyset$ であるから $(h_i,d_l)\in M'$ となる。よって，$M''=M\setminus\{(h_k,d_j),(h_i,d_l)\}$ とおくと，M'' は，$H\setminus\{h_i,h_k\}$ を男性集合，$D\setminus\{d_j,d_l\}$ を女性集合とするサイズ $n-2$ の安定結婚問題における安定マッチングである。従って，M'' の数は $f(n-2)$ 以下となり，$|\mathcal{M}_{k,j}| \leq f(n-2)$ である。

(1) において男女の役割を入れ替えることにより (2) が言える。 □

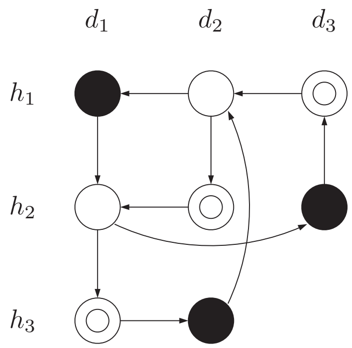
4.2 サイズ 3 の安定結婚問題の場合

ここでは，サイズ 3 の安定結婚問題が持つ安定マッチングの数の最大値について考える。
最初に，いくつか例を挙げる。

例 4.6.

h_1	:	d_1	d_2	d_3	d_1	:	h_3	h_2	h_1
h_2	:	d_3	d_1	d_2	d_2	:	h_2	h_1	h_3
h_3	:	d_3	d_2	d_1	d_3	:	h_1	h_2	h_3

この希望リストの既約安定結婚グラフは 8 個の点からなる次のグラフである。



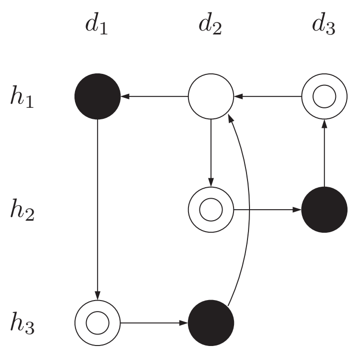
また，安定マッチングは次の 3 つである。

$$M_1 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_3), (h_3, d_2)\}, M_2 = \{(h_1, d_2), (h_2, d_3), (h_3, d_1)\},$$
$$M_3 = \{(h_1, d_3), (h_2, d_2), (h_3, d_1)\}.$$

例 4.7.

h_1	:	d_1	d_2	d_3	d_1	:	h_3	h_2	h_1
h_2	:	d_3	d_1	d_2	d_2	:	h_2	h_1	h_3
h_3	:	d_3	d_2	d_1	d_3	:	h_1	h_2	h_3

この希望リストの既約安定結婚グラフは 7 個の点からなる次のグラフである。



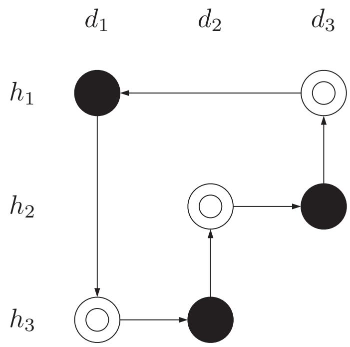
また，安定マッチングは次の 3 つである。

$$M_1 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_3), (h_3, d_2)\}, M_2 = \{(h_1, d_2), (h_2, d_3), (h_3, d_1)\},$$
$$M_3 = \{(h_1, d_3), (h_2, d_2), (h_3, d_1)\}.$$

例 4.8.

h_1	:	d_1	d_3	d_2	d_1	:	h_3	h_1	h_2
h_2	:	d_3	d_2	d_1	d_2	:	h_1	h_2	h_3
h_3	:	d_3	d_2	d_1	d_3	:	h_1	h_2	h_3

この希望リストの既約安定結婚グラフは 6 個の点からなる次のグラフである。



また，安定マッチングは次の 2 つである。

$$M_1 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_3), (h_3, d_2)\}, M_2 = \{(h_1, d_3), (h_2, d_2), (h_3, d_1)\}.$$

次に，$f_k(3)$ の値を求める。

命題 4.10. $f_3(3) = 2$

証明

既約安定結婚部分グラフの点の数が 5 個以下の場合は，点の数が 1 個以下となる行，列が存在するので，安定マッチングの数は $f(2)$ 個以下，つまり 2 個以下となる。次に，6 個の点からなる既約安定結婚部分グラフを考える。ある行，または列に点が 1 個以下しかない場合は，安定マッチングの数が 2 個以下となるので，どの行，列にも点がちょうど 2 個ある場合を考える。このとき，男性，女性に適当に番号付けをすることにより，点集合は以下のようにできる。

	d_1	d_2	d_3
h_1	○		○
h_2		○	○
h_3	○	○	

(h_1, d_1) を含むマッチングの数は最大で 1 つ，(h_1, d_3) を含むマッチングの数も最大で 1 つであるから，安定マッチングの数は 2 個以下である。よって，$f_3(3) \leq 2$ が言える。ここで，例 4.8 より，既約安定結婚グラフが 6 個の点からなるサイズ 3 の安定結婚問題で，2 個の安定マッチングを持つ例が存在するので $f_3(3) = 2$ である。 □

命題 4.11. $f_2(3) = 3$

証明

命題 4.10 より，既約安定結婚部分グラフの点の数が 6 個以下の場合は，安定マッチングの数が 2 個以下となるので，7 個の点からなる既約安定結婚部分グラフを考える。ある行，または列に点が 1 個以下しかない場合は，安定マッチングの数が 2 個以下となるので，どの行，列にも点が 2 個以上ある場合を考える。このとき，男性，女性に適当に番号付けをすることにより，点集合は以下のようにできる。

	d_1	d_2	d_3
h_1	○	○	○
h_2		○	○
h_3	○	○	

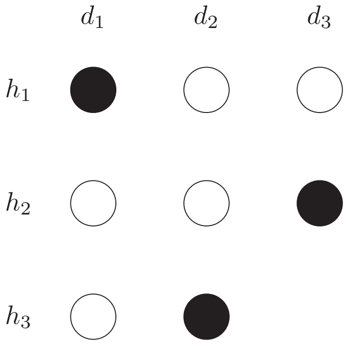
(h_1, d_1) を含むマッチングの数は最大で 1 つ，(h_3, d_1) を含むマッチングの数は最大で 2 つであ

るから，$f_2(3) \leq 3$ である。ここで，例 4.7 より，既約安定結婚グラフが 7 個の点からなるサイズ 3 の安定結婚問題で，3 個の安定マッチングを持つ例が存在するので $f_2(3) = 3$ である。 □

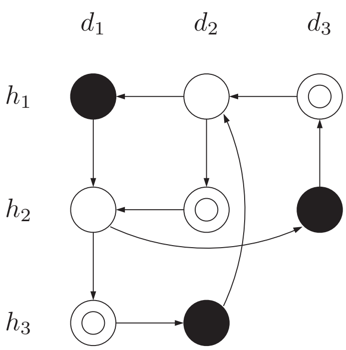
命題 4.12. $f_1(3) = 3$

証明

命題 4.11 より, 既約安定結婚部分グラフの点の数が 7 個以下の場合は, 安定マッチングの数が 3 個以下となるので，8 個の点からなる既約安定結婚部分グラフ Γ'_W を考える。$(h_3, d_3) \notin V(\Gamma'_W)$ となるように h_3, d_3 を定める。また，既約化したグラフは各列，各行に男性最良点と女性最良点が 1 つずつ存在するので，適当に番号付けすると $(h_2, d_3), (h_3, d_2)$ が男性最良点になるようにできる。このとき，(h_1, d_1) が男性最良点になる。



すると，$(h_1, d_3), (h_2, d_2), (h_3, d_1)$ が女性最良点に決まるので，既約安定結婚部分グラフは次のようになる。

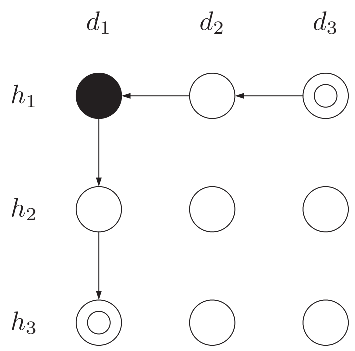


これは，例 4.6 と同じ既約安定結婚グラフなので，安定マッチングの数は 3 つである。従って $f_1(3) = 3$ が成り立つ。 □

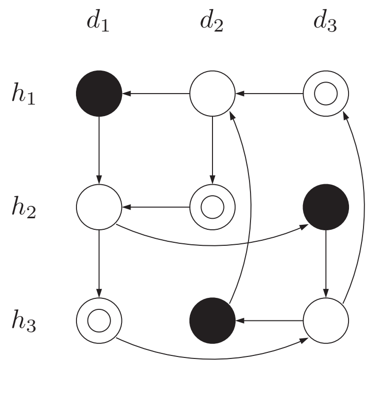
命題 4.13. $f'(3) = 3$

証明

サイズ 3 の既約安定結婚グラフで 9 個の点からなるものを考える。(h_1, d_1) が男性最良点となるように h_1, d_1 を定め，$d_1 <_{h_1} d_2 <_{h_1} d_3$ となるように d_2, d_3 を決める。また，命題 4.8(1) より，(h_1, d_1) は女性最悪点でもあるので，$h_3 <_{d_1} h_2 <_{d_1} h_1$ となるように h_2, h_3 を決める。このとき，行 h_1, 列 d_1 の辺は次のようになる。



すると，(h_2, d_2) が女性最良点，$(h_2, d_3), (h_3, d_2)$ が男性最良点となり，既約安定結婚グラフは次のように決まる。



このとき，安定マッチングは次の 3 つである。

$$M_1 = \{(h_1, d_1), (h_2, d_3), (h_3, d_2)\}, M_2 = \{(h_1, d_2), (h_2, d_1), (h_3, d_3)\},$$
$$M_3 = \{(h_1, d_3), (h_2, d_2), (h_3, d_1)\}.$$

従って，$f'(3) = 3$ である。 □

定理 4.4. サイズ 3 の安定結婚問題において，安定マッチングの数の最大値は 3 である。すなわち，$f(3) = 3$ である。

証明

命題 4.12, 4.13 より $f_1(3) = f'(3) = 3$ であり，$f(3)$ は $f_1(3)$ と $f'(3)$ の最大値であるから $f(3) = 3$ である。 □

4.3　サイズ 4 の安定結婚問題の場合

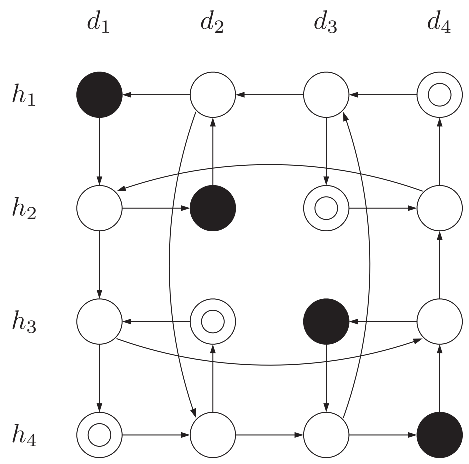
ここでは，サイズ 4 の安定結婚問題が持つ安定マッチングの数の最大値について考える。

最初に例を一つ挙げる。

例 4.9.

h_1	:	d_1	d_2	d_3	d_4	d_1	:	h_4	h_3	h_2	h_1
h_2	:	d_2	d_1	d_4	d_3	d_2	:	h_3	h_4	h_1	h_2
h_3	:	d_3	d_4	d_1	d_2	d_3	:	h_2	h_1	h_4	h_3
h_4	:	d_4	d_3	d_2	d_1	d_4	:	h_1	h_2	h_3	h_4

この希望リストの既約安定結婚グラフは 16 個の点からなる次のグラフである。



また，安定マッチングは次の 10 個である。

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(h_1,d_1),(h_2,d_2),(h_3,d_3),(h_4,d_4)\}, & M_2 &= \{(h_1,d_2),(h_2,d_1),(h_3,d_3),(h_4,d_4)\}, \\ M_3 &= \{(h_1,d_1),(h_2,d_2),(h_3,d_4),(h_4,d_3)\}, & M_4 &= \{(h_1,d_2),(h_2,d_1),(h_3,d_4),(h_4,d_3)\}, \\ M_5 &= \{(h_1,d_3),(h_2,d_1),(h_3,d_4),(h_4,d_2)\}, & M_6 &= \{(h_1,d_2),(h_2,d_4),(h_3,d_1),(h_4,d_3)\}, \\ M_7 &= \{(h_1,d_3),(h_2,d_4),(h_3,d_1),(h_4,d_2)\}, & M_8 &= \{(h_1,d_4),(h_2,d_3),(h_3,d_1),(h_4,d_2)\}, \\ M_9 &= \{(h_1,d_3),(h_2,d_4),(h_3,d_2),(h_4,d_1)\}, & M_{10} &= \{(h_1,d_4),(h_2,d_3),(h_3,d_2),(h_4,d_1)\}. \end{aligned}$$

命題 4.14. $f'(4) = 10$

証明

I をサイズ 4 の安定結婚問題で，既約安定結婚グラフ Γ' が 16 個の点を持つものとする。Γ' の点で，男性最良点でも女性最良点でもない点 (h,d) に対しては，$\mathrm{rank}_h(d), \mathrm{rank}_d(h)$ はそれぞれ 2, 3 のいずれかの値を取るので，$(\mathrm{rank}_h(d), \mathrm{rank}_d(h))$ は $(2,2),(2,3),(3,2)$ または $(3,3)$ である。

(i) $(\mathrm{rank}_{h_i}(d_j), \mathrm{rank}_{d_j}(h_i)) = (2,2)$ となる点 (h_i,d_j) が存在する場合
$\mathrm{rank}_{d_j}(h_i) = 2$ より，$h_i <_{d_j} h_k$ となる $k \in \{1,2,3,4\}$ は 2 つ存在し，この k に対しては命題 4.9 (1) より $|\mathcal{M}_{k,j}| \leq f(2) = 2$ となる。従って，

$$|\mathcal{M}(\Gamma)| = \sum_{l=1}^{4} |\mathcal{M}_{l,j}| \leq 2f(3) + 2f(2) = 10$$

である。

(ii) $(\mathrm{rank}_{h_i}(d_j), \mathrm{rank}_{d_j}(h_i)) = (2,2)$ となる点 (h_i,d_j) が存在しない場合
このときは $\mathrm{rank}_h(d) = 2$ ならば $\mathrm{rank}_d(h) = 3$ となり，また $\mathrm{rank}_d(h) = 2$ ならば $\mathrm{rank}_h(d) = 3$ となる。$\mathrm{rank}_h(d) = 2,3$ となる点 (h,d) はそれぞれ 4 つ，$\mathrm{rank}_d(h) = 2,3$ となる点 (h,d) もぞれぞれ 4 つ存在するから，$(\mathrm{rank}_h(d), \mathrm{rank}_d(h)) = (2,3)$ または $(3,2)$ である。ここで，点 (h_k,d_j) を男性最良点とし，$\mathrm{rank}_{d_j}(h) = 3$ である男性 h を h_i で表すと，$\mathrm{rank}_{h_i}(d_j) = 2, h_i <_{d_j} h_k$ であるから，命題 4.9 (1) より $|\mathcal{M}_{k,j}| \leq f(2) = 2$ となる。同様にして，点 (h_l,d_m) が女性最良点のときは $|\mathcal{M}_{l,m}| \leq 2$ となる。点 (h_1,d_j) $(j=1,2,3,4)$ の中には，男性最良点，女性最良点が 1 つずつ存在するから

$$|\mathcal{M}(\Gamma)| = \sum_{j=1}^{4} |\mathcal{M}_{1,j}| \leq 2f(3) + 2f(2) = 10$$

である。

(i),(ii) より $f'(4) \leq 10$ である。ここで，例 4.9 より，既約安定結婚グラフが 16 個の点からなるサイズ 4 の安定結婚問題で，10 個の安定マッチングを持つ例が存在するので $f'(4) = 10$ である。 □

命題 4.6 より $f_1(4) \leq 3f(3) = 9$ であるから，命題 4.14 より次の定理が成り立つ。

定理 4.5.
サイズ 4 の安定結婚問題において，安定マッチングの数の最大値は 10 である。すなわち，$f(4) = 10$ である。

参考文献

[1] 伊藤大雄・宇野裕之 編著，『離散数学のすすめ』，現代数学社，2010

[2] 久保幹雄・田村明久・松井知己 編，『応用数理計画ハンドブック』，朝倉書店，2002

[3] M. Balinski, G. Ratier, "On stable marriages and graphs, and strategy and polytypes", SIAM Review, **39**, pp.575-604, 1997

[4] D. Eilers, Irvine Compiler Corporation Technical Report, ICC TR1999-2, 1999

[5] D. Gale, L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage", The American Mathematical Monthly, **69**, pp.9-15, 1962

[6] D. M. Gusfield , R. W. Irving , "The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms", The MIT Press, 2003

[7] R.W. Irving, P. Leather, "The complexity of counting stable marriages", SIAM J. Comput., **15**, pp.655-667, 1986

[8] D. E. Knuth, "Mariages Stables", Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1976

[9] E. G. Thurber ,"Concerning the maximum number of stable matchings in the stable marriage problem" , Discrete Mathematics, **248**, 2002