

An Application of Groebner Bases to Behavioral Analyses for Petri Nets by Means of Computer Algebra Systems

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2011-04-06 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 高田, 真樹, 松本, 忠, 茂呂, 征一郎, TAKATA, Maki, MATSUMOTO, Tadashi, MORO, Seiichiro メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/3125

計算機代数システム援用によるグレブナー基底のペトリネットの挙動解析への適用

高田 真樹* 松本 忠** 茂呂 征一郎**

An Application of Groebner Bases to Behavioral Analyses for Petri Nets by Means of Computer Algebra Systems

Maki TAKATA*, Tadashi MATSUMOTO** and Seiichiro MORO**

(Received February 10, 2003)

One of methods to solve integer programming problems consists in the method which uses groebner bases. An arbitrary solution for a state equation $Ax=b$ ($A \in Z^{m \times n}$, $b \in Z^{m \times 1}$) of Petri nets means a firing count vector. Then finding a nonnegative integer solution $x \in Z_+^{n \times 1}$ for $Ax=b$ in Petri nets is one of integer programming problems. In this paper, the method to obtain generators of solutions in Petri nets by using groebner bases is proposed and investigated. Moreover, Petri nets have an ill property that the number of minimal support T-invariants increases in exponential when places and transitions are increased. Then, the number of groebner bases and calculation time of groebner bases are measured by using a symbolic computation system or a computer algebra system; Maple 7.

Key words: Groebner Basis, Generators, Monomial Order, Algorithm for Division, Buchberger Algorithm, Symbolic Computation System or Computer Algebra System

1. まえがき

近年見うけられるシステムのほとんどが離散事象システムと呼ばれるもので、並行的・非同期的・分散的・確率的な動作を特徴とするシステムである。ペトリネットはこの離散事象システムの特徴を忠実に反映する数学モデルであり、広い分野でその有効性が認識されている^[1]。ペトリネットの解析法の1つに状態方程式を用いる方法がある。ペトリネット^[1]の状態方程式 $Ax=b$ ($A \in Z^{m \times n}$, $b \in Z^{m \times 1}$) の任意の解は発火回数ベクトルを意味しており、非負整数である必要がある。従って、ペトリネットの状態方程式の解を解くことは整数計画問題を解くことに相当する。以前の報告^[9]では、グレブナー基底を用いて、ペトリネットの同次解の generator と特解の generator を求

める方法を例題を用いて示した。このとき、問題点と今後の課題として次のことが挙げられていた。

- (1) 辞書式順序以外の単項式順序を用いたときの計算結果の違いは？
- (2) 単項式(変数)の順序を入れ替えた場合の計算結果の違いは？
- (3) 扱えるペトリネットの規模は？
- (4) Maple 7 以外の計算代数システムを用いたときの特徴は？
- (5) 最小化目的関数をも考慮に入れた一般的な整数計画問題のグレブナー基底による解法の具体化。

本論文では、このうちの(1), (2)の問題点を例題を用いて検討する。更には、(3)の問題点をプレースの個数とトランジションの個数が増加すると、極小台集合 T-インバリアントの個数が指数関数的に増すペトリネットを考え、プレースの個数とトランジションの個数を変えたときのグレブナー基底の個数とその計算時間の違いから考察する。

2. 諸準備

* 大学院工学研究科電子工学専攻

** 電気・電子工学科

* Electrical and Electronics Engineering Course,
Graduate School of Engineering

** Dept. of Electrical and Electronics Engineering

2.1 記号と用語の定義^{[4], [5]}

任意の体 k に係数を持つ n 個の変数 y_1, \dots, y_n の多項式を扱う。

定義 2.1.1 変数 y_1, \dots, y_n の単項式とは積 $y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}$ をいう。ただし, α_i は非負整数である。 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ を単項式の全次数という。 ■

定義 2.1.2 係数を体 k に持つ y_1, \dots, y_n の多項式とは, 体 k の元を係数とする単項式の有限個の線形結合のことをいう。多項式 f を次のように表わす。 $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} y^{\alpha}$, $a_{\alpha} \in k$ 。ここで, 和は有限個の $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ についてとっている。係数を体 k に持つ y_1, \dots, y_n の多項式全体の集合を $k[y_1, \dots, y_n]$ と表わす。 ■

定義 2.1.3 部分集合 $I \subset k[y_1, \dots, y_n]$ がイデアルであるとは, 次を満たすときをいう。(i) $0 \in I$ 。(ii) $f, g \in I$ ならば $f + g \in I$ 。(iii) $f \in I$ かつ $h \in k[y_1, \dots, y_n]$ ならば $hf \in I$ 。 ■

定義 2.1.4 f_1, \dots, f_s を $k[y_1, \dots, y_n]$ に含まれる多項式とする。このとき, $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \{ \sum_{i=1}^s h_i f_i : h_1, \dots, h_s \in k[y_1, \dots, y_n] \}$ とおく。重要な事実は $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ がイデアルになることである。 ■

定義 2.1.5 多項式環 $k[y_1, \dots, y_n]$ 上の単項式順序とは $k[y_1, \dots, y_n]$ の単項式 y^{α} の集合上の関係 $>$ で次の条件を満たすものを言う。(i) $>$ は全(線形)順序関係である。(ii) $y^{\alpha} > y^{\beta}$ のとき, 任意の単項式 y^{γ} について $y^{\alpha} y^{\gamma} = y^{\alpha+\gamma} > y^{\beta+\gamma} = y^{\beta} y^{\gamma}$ が成り立つ。(iii) 単項式の空でない集合はすべて $>$ に関する最小元を持つ。 ■

定義 2.1.6 (辞書式順序) y^{α}, y^{β} を $k[y_1, \dots, y_n]$ の単項式とする。差 $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ において最も左にある0でない成分が正であるとき, $y^{\alpha} >_{lex} y^{\beta}$ と定義する。 ■

定義 2.1.7 (次数付き辞書式順序) y^{α}, y^{β} を $k[y_1, \dots, y_n]$ の単項式とする。このとき, 「 $\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i$ 」であるか, 或いは「 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ 」であって, 更に, $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ においてもっとも左にあるのゼロでない成分が正」であるとき $y^{\alpha} >_{glex} y^{\beta}$ と定義する。 ■

定義 2.1.8 (次数付き逆辞書式順序) y^{α}, y^{β} を $k[y_1, \dots, y_n]$ の単項式とする。このとき, 「 $\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i$ 」であるか, 或いは「 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ 」であって, 更に, $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ においてもっとも右にあるゼロでない成分が負」であるとき $y^{\alpha} >_{grelex} y^{\beta}$ と定義する。 ■

定義 2.1.9 多項式環 $k[y_1, \dots, y_n]$ 上の $>$ を固定し, $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} y^{\alpha}$ の項を考える。いま, y^{α} が f に現れる順序 $>$ に関して最大の単項式であるとする。このとき, f の主項とは積 $a_{\alpha} y^{\alpha}$ のことをいう。主項を表わすのに $LT(f)$ という記号を使う。 ■

以上の準備のもとで, 次の基本的な性質が得られる。

[定理 1] ($k[y_1, \dots, y_n]$ における割り算アルゴリズム) \mathbb{Z}_+^n における単項式順序 $>$ を1つ固定し, $F = (f_1, \dots, f_s)$ を $k[y_1, \dots, y_n]$ の順序付けられた s 個の多項式の組とする。このとき, どんな $f \in k[y_1, \dots, y_n]$ も $f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + r$ と, $a_i, r \in k[y_1, \dots, y_n]$ を用いて書ける。しかも, r は0であるか, または単項式の k 係数の線形結合で, どの単項式も $LT(f_1), \dots, LT(f_s)$ のいずれでも割り切れない。この r を, f を F で割った余り ($r = \bar{f}^F$) と呼ぶ。さらに, もし $a_i f_i \neq 0$ であるならば, $\text{multideg}(f) \geq \text{multideg}(a_i f_i)$ である。 ■

2.2 グレブナー基底^{[4], [5]}

グレブナー基底の定義とその判定法を述べる。

定義 2.2.1 多項式環 $k[y_1, \dots, y_n]$ 上の単項式順序 $>$ を固定し, $I \subset k[y_1, \dots, y_n]$ をイデアルとする。このとき, I のグレブナー基底とは多項式の有限集合 $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ であって, 条件「0でないすべての $f \in I$ について, その主項 $LT(f)$ がある $LT(g_i)$ で割り切れる」を満たすものをいう。 ■

定義 2.2.2 多項式 $f, g \in k[y_1, \dots, y_n]$ は0でないとする。単項式順序を固定し, $LT(f) = cy^{\alpha}$, $LT(g) = dy^{\beta}$ とする。ただし, $c, d \in k$ である。次に, y^{γ} を y^{α} と y^{β} の最小公倍数とする。このとき, f と g の S 多項式 $S(f, g)$ とは

$$S(f, g) = \frac{y^{\gamma}}{LT(f)} \cdot f - \frac{y^{\gamma}}{LT(g)} \cdot g \quad \text{をいう。} \quad \blacksquare$$

S 多項式 $S(f, g)$ の余りを構成する過程についての重要な結果は次のようなことである。

<ブックバーガーの判定法>

有限集合 $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ が $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ のグレブナー基底であるための必要十分条件は, すべての対 $i \neq j$ について $S(g_i, g_j)^G = 0$ が成り立つことである。 ■

[定理 2]^{[2], [3]}

(グレブナー基底とブックバーガーアルゴリズム)

$I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$ を多項式イデアルとする。 I のグレ

ブナー基底は、次のアルゴリズムによって、有限回のステップで構成することができる。

Input: $F=(f_1, \dots, f_s)$
 Output: a Groebner basis $G=(g_1, \dots, g_t)$
 for I , with $F \subset G$

$G:=F$
 REPEAT
 $G':=G$
 FOR each pair $\{p, q\}$, $p \neq q$ in G' DO
 $S:=S(p, q)_{G'}=0$
 IF $S \neq 0$ THEN $G:=G \cup \{S\}$
 UNTIL $G=G'$

3. グレブナー基底を用いた整数計画問題の解法^[4]

整数計画問題では制約条件

$$Ax = b, \quad A \in Z^{m \times n}, \quad b \in Z^{m \times 1} \quad (1)$$

のもとで、線形関数 $c^T x$, $c^T \in R^n$ を最小化する非負整数解 $x \in Z_+^{m \times 1}$ を求める。

3.1 $a_{ij} \geq 0, b_i \geq 0$ である整数計画問題の解法

この問題はブックバーガーアルゴリズムによって解かれる形にするために 2 段階に分けて検討される。この読み替えの説明のために、最小化目的関数を無視し、まずは $a_{ij} \geq 0, b_i \geq 0$, where $A=[a_{ij}]$ and $b=[b_i]$ である特別な場合を考える。

式(1)のおおのの方程式について不定元 z_i を導入すると次の方程式が得られる。

$$\prod_{j=1}^n (\prod_{i=1}^m z_i^{a_{ij}})^{x_j} = \prod_{i=1}^m z_i^{b_i} \quad (2)$$

式(2)から式(1)の実行可能領域内の n 個の整数の組について次のような直接的な代数的特徴付けを得る。

[定理 3] 体 k を固定し、各 $j=1, \dots, n$ について

$$\varphi(w_j) = \prod_{i=1}^m z_i^{a_{ij}}$$

とおき、一般の多項式 $g \in k[w_1, \dots, w_n]$ について $\varphi(g(w_1, \dots, w_n)) = g(\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_n))$ とすることによって $\varphi: k[w_1, \dots, w_n] \rightarrow k[z_1, \dots, z_m]$ を定義する。このとき、 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ が実行可能領域内の整数点であるための必要十分条件は、 φ が単項式 $w_1^{x_1} w_2^{x_2} \dots w_n^{x_n}$ を単項式 $z_1^{b_1} z_2^{b_2} \dots z_m^{b_m}$ に移すことである。 ■

写像の像の要素についての次のようなテストは整数計画問題の言い換えの重要な部分である。定理 3 の φ の像は $f_j = \prod_{i=1}^m z_i^{a_{ij}}$ の多項式として表わされる $k[z_1, \dots, z_m]$ の多項式の集合であるので、その像を f_j に

よって生成される $k[f_1, \dots, f_n]$ の部分環 $k[z_1, \dots, z_m]$ と書くことができる。

[定理 4] 多項式 $f_1, \dots, f_n \in k[z_1, \dots, z_m]$ を考える。まず、 $k[z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n]$ の単項式順序を、変数 z_1, \dots, z_m のうち 1 つでも含む単項式は $k[w_1, \dots, w_n]$ のすべての単項式よりも大きくなるように定められている (i.e., 消去性が成立している) とする。次に、イデアル $I = \langle f_1 - w_1, \dots, f_n - w_n \rangle \subset k[z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n]$ のグレブナー基底を \mathbf{g} とし、各 $f \in k[z_1, \dots, z_m]$ について $\bar{f}^{\mathbf{g}}$ を f の \mathbf{g} による割り算の余りとする。

- a. 多項式 f が $f \in k[f_1, \dots, f_n]$ を満たすための必要十分条件は $g = \bar{f}^{\mathbf{g}} \in k[w_1, \dots, w_n]$ となることである。
- b. $f \in k[f_1, \dots, f_n]$, $g = \bar{f}^{\mathbf{g}} \in k[f_1, \dots, f_n]$ を a と同様のものとするとき、 f を f_j の多項式として表わすと $f = g(f_1, \dots, f_n)$ である。
- c. 各 f_j と f が単項式で $f \in k[f_1, \dots, f_n]$ であるとき、 \mathbf{g} も単項式である。 ■

換言すると、 c は定理 4 の状況で $z_1^{b_1} \dots z_m^{b_m}$ が φ の像ならば、それは自動的にある単項式 $w_1^{x_1} \dots w_n^{x_n}$ の像であることを述べている。

与えられた線形関数 $l(A_1, \dots, A_n)$ を最小にする整数計画問題 (IP) の解を求めるためには、通常その問題に合うように特別に調整された単項式順序を採用する必要がある。そこで、次の定義を与える。

定義 3.1 $k[z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n]$ 上の単項式順序が整数計画問題(1)式に適合しているとは、その順序が次の 2 つの性質を持つときにいう。

- a. (消去性) z_i の 1 つを含む任意の単項式は w_j のみを含むいかなる単項式よりも大きい。
- b. ($c^T x$ との両立) $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ とする。単項式 $w^x, w^{x'}$ が $\varphi(w^x) = \varphi(w^{x'})$, $c^T x > c^T x'$ を満たすとき $w^x > w^{x'}$ である。 ■

[定理 5] 標準形の整数計画問題(式(1))を考える。すべての i, j について $a_{ij}, b_i \geq 0$ であると仮定し、今までと同様に $f_j = \prod_{i=1}^m z_i^{a_{ij}}$ とする。任意の適合単項式順序に関する $I = \langle f_1 - w_1, \dots, f_n - w_n \rangle \subset k[z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n]$ のグレブナー基底 \mathbf{g} を考える。このとき、 $f = z_1^{b_1} \dots z_m^{b_m}$ が $k[f_1, \dots, f_n]$ の元ならば、余り $\bar{f}^{\mathbf{g}} \in k[w_1, \dots, w_n]$ は $c^T x$ を最小にする式(1)の解を与える。 ■

定理 5 からすべての i, j について $a_{ij}, b_i \geq 0$ である整数計画問題をグレブナー基底を用いて解くアルゴリズムを得る。

< Algorithm for Special IP Problems >

Input: A, b of Eq.(1), an adapted monomial order $>$.

Output: a solution of Special IP problems, if one exists

$f_j := \prod_{i=1}^m z_i^{a_{ij}}$
 $I := \langle f_1 - w_1, \dots, f_n - w_n \rangle$
 $\mathbf{g} :=$ Groebner basis of I with respect to $>$
 $f := \prod_{i=1}^m z_i^{b_i}$
 $g := \overline{f}^{\mathbf{g}}$
 IF $g \in k[w_1, \dots, w_n]$ THEN
 its exponent vector gives a solution
 ELSE
 there is no solution

3.2 $a_{ij} \geq 0, b_i \geq 0$ である整数計画問題の解法

a_{ij}, b_i の幾つかが負であってもよい一般の整数計画問題を考える。この場合には、実施の概念上の違いはない。整数計画問題の幾何学的解釈は§3.1 と全く同じであるが、代数的解釈には違いがある。すなわち、負の a_{ij}, b_i は通常の変数 z_i のローラン多項式 z_i^{-1} を考えることである。ローラン多項式環の表現 $k[z_1^{\pm 1}, \dots, z_m^{\pm 1}] = k[z_1, \dots, z_m, t] / \langle tz_1z_2 \dots z_m - 1 \rangle$ を用いると、 $a_{ij}, b_i \geq 0$ である整数計画問題をグレブナー基底を用いて解くアルゴリズムは次のようになる。

<Algorithm for General IP Problems >

Input: A, b of Eq.(1), an adapted monomial order $>$.

Output: a solution of General IP problems, if one exists

$f_j := t^{e_j} \prod_{i=1}^m z_i^{a_{ij}}$
 $J := \langle t z_1 z_2 \dots z_m - 1, f_1 - w_1, \dots, f_n - w_n \rangle$
 $\mathbf{g} :=$ Groebner basis of J with respect to $>$
 $f := t^e \prod_{i=1}^m z_i^{b_i}$
 $g := \overline{f}^{\mathbf{g}}$
 IF $g \in k[w_1, \dots, w_n]$ THEN
 its exponent vector gives a solution
 ELSE
 there is no solution

4. グレブナー基底の計算結果の比較・検討

図1のペトリネットの接続行列とマーキング差は次のようになる。

接続行列 $A \in Z^{4 \times 7}$ マーキング差 $b \in Z^{4 \times 1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in Z^{4 \times 7}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in Z^{4 \times 1}.$$

$Ax=b$ に対する写像 $\varphi : k[w_1, \dots, w_7] \rightarrow k[z_1, \dots, z_4]$ を

定義する。接続行列 $A \in Z^{4 \times 7}$ と $t = z_1^{-1} z_2^{-1} z_3^{-1} z_4^{-1}$ から次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 w_1 &\mapsto f_1 = z_1 z_4^{-1} = t z_1^2 z_2 z_3, & w_2 &\mapsto f_2 = z_1^{-1} z_2 = t z_2^2 z_3 z_4, \\
 w_3 &\mapsto f_3 = z_2^{-1} z_4 = t z_1 z_3 z_4^2, & w_4 &\mapsto f_4 = z_1^{-1} z_3 = t z_2 z_3^2 z_4, \\
 w_5 &\mapsto f_5 = z_3^{-1} z_4 = t z_1 z_2 z_4^2, & w_6 &\mapsto f_6 = z_2^{-1} z_3 = t z_1 z_3^2 z_4, \\
 w_7 &\mapsto f_7 = z_1^2 z_4^{-2} = t^2 z_1^4 z_3^2 z_4^2.
 \end{aligned}$$

従って、イデアルとして次式を得る。

$$J = \langle t z_1 z_2 z_3 z_4 - 1, f_1 - w_1, \dots, f_7 - w_7 \rangle.$$

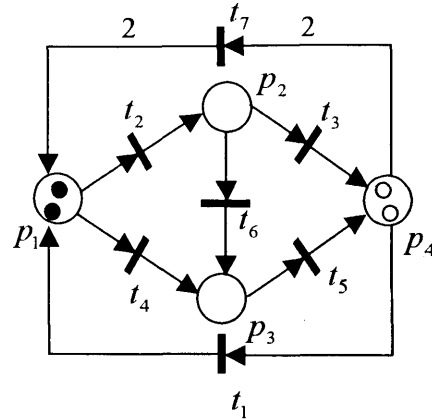


図1 ペトリネットの例1

計算機代数システム;Maple 7 では§2.1 の定義 2.1.7 の次数付き辞書式順序を用いることができないので、3つの単項式順序のいずれも用いることができる計算機代数システム;Mathematica 4.1 を用いて計算する^[6]。ただし、ここでは計算時間は考えず、得られたグレブナー基底の内容と個数についてのみ示す。

辞書式順序 $t >_{lex} z_1 >_{lex} \dots >_{lex} z_4 >_{lex} w_1 >_{lex} \dots >_{lex} w_7$ を用いて計算した場合: $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_8\}$, where $g_1 = -1 + w_5^2 w_4^2 w_7, g_2 = -w_3 + w_5 w_6, g_3 = w_4 - w_2 w_6, g_4 = w_1 - w_4 w_5 w_7, g_5 = z_3 - w_4^2 w_5 w_7 z_4, g_6 = z_2 - w_2 w_3 w_4 w_7 z_4, g_7 = z_1 - w_4 w_5 w_7 z_4, g_8 = w_4 w_5^3 w_6 - t z_4^4$.

次数付き辞書式順序 $t >_{grlex} z_1 >_{grlex} \dots >_{grlex} z_4 >_{grlex} w_1 >_{grlex} \dots >_{grlex} w_7$ を用いて計算した場合: $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_{55}\}$, where $g_1 = w_3 - w_5 w_6, g_2 = w_4 - w_2 w_6, \dots, g_{54} = w_5 w_7 - t z_1^3 z_2, g_{55} = w_1 w_3 w_5 w_7 - t z_1^4$.

次数付き逆辞書式順序 $t >_{grevlex} z_1 >_{grevlex} \dots >_{grevlex} z_4 >_{grevlex} w_1 >_{grevlex} \dots >_{grevlex} w_7$ を用いて計算した場合: $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_{56}\}$, where $g_1 = w_3 - w_5 w_6, g_2 = w_4 - w_2 w_6, \dots, g_{55} = w_5 w_7 - t z_1^3 z_2, g_{56} = -w_1 w_3 w_5 w_7 + t z_1^4$.

各単項式順序を用いて得られたグレブナー基底を比較すると内容も個数も一般的に違うことが分かった。

次に、変数 t, z, w の順序を変更して得られたグレブナー基底の個数の違いを表 1 に示す。ただし、 $z_1 > z_2 > z_3 > z_4, w_1 > w_2 > \dots > w_7$ はこのままの順序である。

表 1 のように、グレブナー基底の個数に違いがあるのは、入力として与えたイデアル内の多項式の順序が、用いる単項式順序や変数の順序によって変わるからだと考えられる。これは、定理 2 に示したブッフバッカーアルゴリズムの Input; $F=(f_1, \dots, f_s)$ が違うということに相当する。従って、グレブナー基底の内容にも個数にも違いが出た。

表 1 グレブナー基底の個数の違い

変数の順序	グレブナー基底の個数		
	辞書式順序	次数付き辞書式順序	次数付き逆辞書式順序
$t > z > w$	8	55	56
$t > w > z$	47	56	55
$z > t > w$	8	55	56
$z > w > t$	8	55	57
$w > t > z$	8	57	55
$w > z > t$	8	57	55

ここで、特解の generator や同次解の generator (T-インバリエント) を求める際には、ある多項式をグレブナー基底を用いて割るという操作をするので、グレブナー基底の個数は少ない方が効率的になると考えられる。従って、以下では辞書式順序のみを用いて計算することとする。

5. 特解の generator の導出法の比較・検討

図 1 に示したペトリネットで考える。マーキング差 $b = (-2002)^T \in Z^{4 \times 1}$ と $t = z_1^{-1} z_2^{-1} z_3^{-1} z_4^{-1}$ から次式を得る。

$$f = \prod_{i=1}^4 z_i^{b_i} = z_1^{-2} z_4^{-2} = t^2 z_2^2 z_3^2 z_4^4$$

$f = t^2 z_2^2 z_3^2 z_4^4$ を §4 に示した、辞書式順序 $t >_{lex} z_1 >_{lex} \dots >_{lex} z_4 >_{lex} w_1 >_{lex} \dots >_{lex} w_7$ を用いた場合のグレブナー基底 $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_8\}$ で割った余り \bar{f}^g を求めると、表 2 のようになる。

表 2 各単項式順序を用いたときの \bar{f}^g の違い

変数の順序	$f = t^2 z_2^2 z_3^2 z_4^4$ を $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_8\}$ で割った余り		
	辞書式順序	次数付き辞書式順序	次数付き逆辞書式順序
$t > z > w$	$w_4^2 w_5^2$	f	f
$t > w > z$	$t w_4 w_5^3 w_6 z_2^2 z_3^2$	f	f
$z > t > w$	$w_4^2 w_5^2$	f	f
$z > w > t$	$w_4^2 w_5^2$	f	f
$w > t > z$	f	f	f
$w > z > t$	f	f	f

表 2 において f は、 $f = t^2 z_2^2 z_3^2 z_4^4$ はどのグレブナー基底 $g_i \in \mathbf{g}$ を用いても割り切れないということを意味している。この理由として、用いる単項式順序と変数の順序の変更によって、各グレブナー基底 $g_i \in \mathbf{g}$ の主項が変わるからであると考えられる。

例えば、次数付き辞書式順序 ($w > t > z$) を用いた場合、辞書式順序で求めたグレブナー基底は次のように変更される。

$$\mathbf{g}' = \{g'_1, \dots, g'_8\}, \text{ where } g'_1 = w_5^2 w_4^2 w_7 - 1, g'_2 = w_5 w_6 - w_3, g'_3 = -w_2 w_6 + w_4, g'_4 = -w_4 w_5 w_7 + w_1, g'_5 = -w_4^2 w_5 w_7 z_4 + z_3, g'_6 = -w_2 w_5 w_4 w_7 z_4 + z_2, g'_7 = -w_4 w_5 w_7 z_4 + z_1, g'_8 = w_4 w_5^3 w_6 - t z_4^4.$$

この場合、 $f = t^2 z_2^2 z_3^2 z_4^4$ はどのグレブナー基底 $g'_i \in \mathbf{g}'$ の主項でも割り切ることができないということは明らかである。

表 2 において w だけの式である $w_4^2 w_5^2$ は特解の generator の 1 つに対応している。次に、割り算アルゴリズムを用いて他の特解の generator の導出を考える。変数 w_1, w_2, \dots, w_7 の順序のみを変更して、再び、 \bar{f}^g を計算してみる。ただし、グレブナー基底の順序も割り算アルゴリズムに影響するため、次のように順序を変更する。 $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_8\} \rightarrow \mathbf{g} = \{g_8, g_7, g_6, g_5, g_1, g_4, g_2, g_3\}$ 。変数 w_1, \dots, w_7 は全部で 7! 通りの順序の入れ替えがあるが、 $\bar{f}^g = \bar{f}_1^g = w_4^2 w_5^2$ の他に得られる \bar{f}^g は次の 2 通りだけである。 $\bar{f}_2^g = w_2^2 w_3^2, \bar{f}_3^g = w_2^2 w_5^2 w_6^2$ 。従って、割り算アルゴリズムを用いて、3 個の特解の generator が得られた。

$$v_1 = (0002200)^T, v_2 = (0220000)^T, v_3 = (0200220)^T.$$

しかし、図 1 のペトリネットにはこの 3 個の特解の generator の他に、更に 3 個の特解の generator が存在する。

$$v_4 = (0111100)^T = (1/2)v_1 + (1/2)v_2, v_5 = (0101210)^T = (1/2)v_1 + (1/2)v_3, v_6 = (0210110)^T = (1/2)v_2 + (1/2)v_3.$$

割り算アルゴリズムでは、すべて割り切れるまで計算が繰り返されるため、 v_4, v_5, v_6 のような特解の generator は導出されなかった。

6. T-インバリエントの導出法の比較・検討

図 1 に示したペトリネットで考える。マーキング差 $b = (0000)^T \in Z^{4 \times 1}$ から、 $f = 1$ となる。 $f = 1$ はグレブナー基底を用いて割ることはできないので、 $g_1 = -1 + w_5^2 w_4^2 w_7 = 0$ を用いて、 $f = 1 = w_5^2 w_4^2 w_7$ とする。この $w_5^2 w_4^2 w_7$ は図 1 のペトリネットの T-インバリエントの 1 つに対応している。 f はすでに変数 w だけの式であるから、グレブナー基底のうち、 $g_2 = -w_3 + w_5 w_6, g_3 = w_4 - w_2 w_6, g_4 = w_1 - w_4 w_5 w_7$ だけを用いて割り算

アルゴリズムを行う。ただし、 $g = \{g_4, g_2, g_3\}$ とする。特解の generator の導出と同様に変数 w_1, \dots, w_7 は全部で 7 通りの順序の入れ替えがあるが、得られる \bar{f}^g は次の 5 通りだけである。

$$\begin{aligned} \bar{f}_1^g &= w_1 w_2 w_3, & \bar{f}_2^g &= w_2^2 w_3 w_7, \\ \bar{f}_3^g &= w_1 w_4 w_5, & \bar{f}_4^g &= w_1 w_2 w_5 w_6, & \bar{f}_5^g &= w_2^2 w_5 w_6 w_7. \end{aligned}$$

従って、割り算アルゴリズムを用いて、6 個の T-インバリアントが得られた。

$$\begin{aligned} u_1 &= (0002201)^T, & u_2 &= (1110000)^T, \\ u_3 &= (0220001)^T, & u_4 &= (1001100)^T, \\ u_5 &= (1100110)^T, & u_6 &= (0200221)^T. \end{aligned}$$

しかし、図 1 のペトリネットにはこの 6 つの T-インバリアントの他に、更に 3 個の T-インバリアントが存在する。

$$\begin{aligned} u_7 &= (0111101)^T = (1/2)u_1 + (1/2)u_3, \\ u_8 &= (0210111)^T = (1/2)u_3 + (1/2)u_6, \\ u_9 &= (0101211)^T = (1/2)u_1 + (1/2)u_6. \end{aligned}$$

これら 3 つの T-インバリアントが導出されない理由は特解の generator の場合と同様である。

7. グレブナー基底の計算時間について

ここでは、次のようなペトリネットを考える。

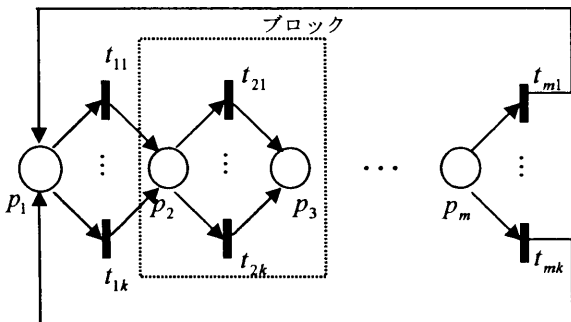


図2 ペトリネットの例2

図 2 のペトリネットの接続行列は次ようになる。

ただし、 $m=2,3,\dots, k=1,2,\dots$ である。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & & & & n=m \cdot k \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

このとき、イデアルは次のようになる。

ただし、 $t = z_1 z_2 \dots z_m$ である。

$$J = \langle t z_1 \dots z_m - 1, t z_2^2 z_3 \dots z_m - w_1, \dots, t z_2^2 z_3 \dots z_m - w_k,$$

$$t z_1^2 z_3^2 z_4 \dots z_m - w_{k+1}, \dots, t z_1 z_3^2 z_4 \dots z_m - w_{2k}, \dots \rangle$$

$$t z_1 \dots z_{m-2} z_m^2 - w_{(m-2)k+1}, \dots, t z_1 \dots z_{m-2} z_m^2 - w_{(m-1)k},$$

$$t z_1^2 z_2 \dots z_{m-1} - w_{(m-1)k+1}, \dots, t z_1^2 z_2 \dots z_{m-1} - w_{mk} \rangle$$

図 2 のペトリネットはプレースの個数 m と 1 ブロックのトランジションの個数 k (全トランジションの個数は $n = m \cdot k$) を変えると、極小台集合 T-インバリアントの個数が指数関数的に増えるというペトリネットである。そこで、このペトリネットのプレースの個数 m と 1 ブロックのトランジションの個数 k を変え、そのときのイデアル J のグレブナー基底の計算時間について考察する。計算機代数システム; Maple 7^[7] を用いて計算した結果を表 3 に示す。

表 3 から、図 2 のペトリネットのグレブナー基底の個数は $m \cdot k + 1$, すなわち、全トランジションの数 + 1 となっていることが分かる。ただし、プレースの個数が 1 個の場合 ($m=1$) を除く。

次に計算時間について考察する。

表 3 を基に、プレースの個数 m と計算時間との関係、1 ブロックのトランジションの個数 k と計算時間との関係をグラフに示すと図 3、図 4 のようになる。

図 3 から、図 2 のプレースの個数 ($|P|=m$) が増すと、グレブナー基底の計算時間が指数関数的に増加することが分かる。一方、図 4 から、図 2 の 1 ブロックのトランジションの個数 k (ただし、全体では $|T|=m \cdot k$) が増しても、グレブナー基底の計算時間が指数関数的に増加することはないことが分かる。従って、グレブナー基底を用いてペトリネットの解の generator を求める方法は、グレブナー基底の計算時間から考えるとプレースの個数が少なく、トランジションの個数が多いペトリネットに有効な方法ではないかと考えられる。

表 3 m と k を変えたときのグレブナー基底の計算時間 (s) と個数

$k \backslash m$	1	2	3	4	5	10
1	0 (1)	0 (2)	0 (3)	0 (4)	0.1 (5)	1.0 (10)
2	0 (3)	0.2 (5)	0.2 (7)	0.3 (9)	0.3 (11)	0.3 (21)
3	0.2 (4)	0.3 (7)	0.3 (10)	0.4 (13)	0.4 (16)	0.8 (31)
4	1.5 (5)	1.8 (9)	2.2 (13)	2.3 (17)	2.6 (21)	4.2 (41)
5	20.2 (6)	23.1 (11)	25.7 (16)	29.0 (21)	32.8 (26)	47.4 (51)
6	435.4 (7)	438.8 (13)	440.9 (19)	589.0 (25)	754.3 (31)	1039.2 (61)
7	16777.2 (8)					18917.2 (71)

() 内が個数

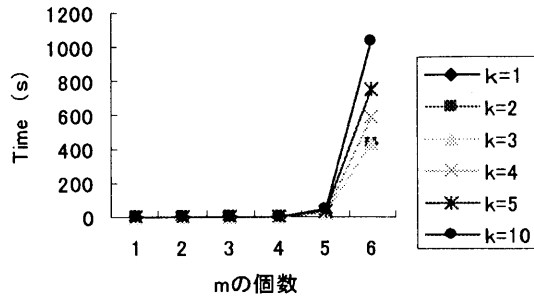


図3 プレース P の個数($|P|=m$)を増やしたときのグレブナー基底の計算時間

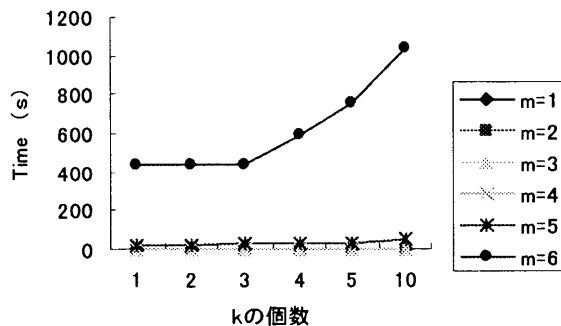


図4 1ブロックのトランジションの個数 k を増やしたときのグレブナー基底の計算時間

8. むすび

本論文では、以前の報告^[9]で問題点と今後の課題として挙げていた、辞書式順序以外の単項式順序を用いたときの計算結果の違い、単項式(変数)の順序を入れ替えた場合の計算結果の違い、扱えるペトリネットの規模について検討した。辞書式順序以外の次数付きの単項式順序を用いた場合は一般にグレブナー基底の個数が多くなるのが分かり、更に割り算アルゴリズムでは多項式を割ることが一般にできないということが分かった。従って、辞書式順序を用いて計算するのが妥当である。また、以前の報告^[9]では1つの解の generator を求めてからその他の解の generator はグレブナー基底を用いて、手計算で変形して求めていたが、単項式(変数)の順序を入れ替えることによって、割り算アルゴリズムで計算して他の解の generator を求めることができることが分かった。しかし、問題となるのは、§5に示したように、極小で極小台集合でない解の generator は導出できないということである。扱えるペトリネットの規模については、プレースの個数が増加すると、グレブナー基底の計算時間が指数関数的に増えることが分かった。これについては、発表で詳しく示す。

今後の課題としては、極小で極小台集合でない解の

generator も導出できるように導出法について検討すること、Maple 7とそれ以外の計算機代数システムの計算時間の比較・検討(ただし、今回、Maple 7以外の計算機代数システムでも得られるグレブナー基底は同じであることはわかっている)、最小化目的関数をも考慮に入れた一般的な整数計画問題のグレブナー基底による解法の実体化などが挙げられる。

9. 文献

- [1] T. Murata: Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, Procs.IEEE, 77-4, pp.541-580 (1989).
- [2] P. Conti and C. Traverso: Buchberger algorithm and integer programming, Proceedings AAEECC-9, Springer Verlag LNCS 539, pp.130-139 (1991).
- [3] R.R. Thomas: A geometric Buchberger algorithm for integer programming, Mathematics of Operations Research, to appear.
- [4] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea: Using Algebraic Geometry, Springer-Verlag New York Inc.(1998).
- [5] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea: Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer-Verlag New York Inc. (1992/1997).
- [6] Mathematica ブック 第4版, 東京書籍 (2000).
- [7] Maple 7 Learning Guide, Waterloo Maple Inc. (2001).
- [8] 平光, 高田, 稲場, 吉田, 松本, 茂呂: P/T ペトリネットの状態方程式の解の実行可能性判定アルゴリズム, 信学技報, 101-458, CAS2001-64, CST 2001-17, pp.1-8 (2001).
- [9] 高田, 松本, 茂呂: グレブナー基底のペトリネット可到達問題への適用について, 信学技報, 102-259, CST2002-16, pp. 31-36 (2002).
- [10] 高田, 松本, 茂呂: グレブナー基底のペトリネット可到達問題への適用 -代数多様体論のペトリネットへの応用-, 平成 14 年度電気関係学会北陸支部連合大会, p.404 (2002).

