Generators for an Arbitrary Nonnegative Integer Solution of Linear Inhomogeneous Diophantine Equations

福井大学 工学部 研究報告 第49巻 第1号 2001年3月
Mem. Fac. Eng. Fukui Univ., Vol. 49, No. 1 (March 2001)

線形 Diophantine 方程式の任意非負整数非同次解の Generators

松本 忠* 高田 真樹* 平光 篤史* 茂呂 征一郎*

Generators for an Arbitrary Nonnegative Integer Solution of Linear Inhomogeneous Diophantine Equations

Tadashi MATSUMOTO*, Maki TAKATA*, Atsushi HIRAMITSU* and Seiichiro MORO*

(Received February 28, 2001)

Given the following system $Ax = b,\ A \in Z^{m\times n},\ b \in Z^{m\times 1}$. This system is called a linear inhomogeneous Diophantine system, written in matrix form. Theories of systems of linear Diophantine equations can be found in [NEWM72]. They give necessary and sufficient condition for the existence of an integer solution $x \in Z^{n\times 1}$ in case the system is consist. Their formulations involve finding unimodular matrices, U and V, such that UAV is a diagonal matrix or, more restrictively, in the Smith normal form of the coefficient matrix A. A computationally feasible procedure for the generation of all invariants $x \in Z_{NN}^{n\times 1}$ satisfying a given homogeneous Diophantine system $Ax = 0^{m\times 1}$ has been presented in [KRÜC87]. In this paper, based upon the results of Level 0-2 [NIKA61], the general form of arbitrary nonnegative integer solutions $x = \sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j v_j \in Z_{NN}^{n\times 1}$ on $Ax = b$ is presented in each of Level 4, 5, and 6 by showing the generators $u_i \in Z_{NN}^{n\times 1}$ for homogeneous solutions such that $Au_i = 0^{m\times 1}, i \in I(l)$, and the generators $v_j \in Z_{NN}^{n\times 1}$ for particular solutions such that $Av_j = b,\ j \in I(k)$. Computational procedures for finding generators in each level are briefly discussed.

Key words: Diophantine systems, nonnegative integer solutions, invariants, particular solutions, reachability, Petri nets.

1. まえがき

$Ax = b\ (A \in Z^{m\times n}, b \in Z^{m\times 1})$ の $x \in Z^{n\times 1}$ は線形非同次 Diophantine 方程式の整数解と呼ばれている[KRÜC87], [DESE96]. 更には，$Ax = b\ (A \in Z^{m\times n}, b \in Z^{m\times 1})$ の非負整数解 $x \in Z_{NN}^{n\times 1}$ は古くから種々の分野の基本的な問題に現われ，整数計画(IP)問題とも関係が深い．特に，同次解はインバリアントとも呼ばれ深く研究されているが[KRÜC87]，特解については余り明らかにされていなかった[MATS00-2]．本論文では，レベル 0-2 の成果[NIKA61]に基づき，レベル4，レベル5，レベル6に $Ax = b$ の非負整数非同次解 $x \in Z_{NN}^{n\times 1}$ の一般形を同次解と特解の generator を与える形式で示すとともに，それらを同時に求める新しい計算法を論じている．

離散事象システムのモデル化法の有用なものであるペトリネットの挙動解析法の1つに，上述の方程式の非負整数非同次解 $x \in Z_{NN}^{n\times 1}$（すなわち，トランジションの発火回数ベクトル）を基本とするものがある[MURA92]．しかし，この解にはペトリネットの発火条件が陽に含まれていないため，解の実行可能性をチェックする必要がある．また，$x \in Z_{NN}^{n\times 1}$ が実行可能解でも，トランジションの発火順序が明示されていない。一般ペトリネットでは，以上の理由から無限個存在する非負整数非同次解 $x \in Z_{NN}^{n\times 1}$ を有限個の generator で表現し，解の実行可能性の判定と発火順序系列を具体化することが強く望まれている．本論文ではこのための generator を具体化している（本論文では，各レベルにおける特解をも明示し，基本特解なる概念を新しく導入している）．

本論文の構成は2節が準備であり，3 節では，既知

* 電気・電子工学科
* Dept. of Electrical and Electronics Engineering

のことであるが，後半の基礎としてレベル 0-1 と 0-2 がまとめられている．また，4節ではレベル 1，2 の generator を基本事項としてまとめている．ただし，レベル 0-2，1，2 で同次解と特解を同時に求めるために $Ax=0^{m\times 1}$ の解法を $\tilde{A}\tilde{x}=0^{m\times 1}$ へ拡張していることは本論文の主張点の１つである．5 節では，レベル４～７の generator を段階的に与えている．6 節はレベル 1～7 の generator の相互関係を，7 節はレベル６の generator の求め方とレベル６の generator からレベル 5，4 の generator を求める方法を示している．

2.　諸準備

$R^{m\times n}$;　実数を要素とする $m\times n$ 次行列の集合,
$R_{NN}^{m\times n}$;　非負実数を要素とする $m\times n$ 次行列の集合,
$Q^{m\times n}$;　有理数を要素とする $m\times n$ 次行列の集合,
$Q_{NN}^{m\times n}$;　非負有理数を要素とする $m\times n$ 次行列の集合,
$Z^{m\times n}$;　整数を要素とする $m\times n$ 次行列の集合,
$Z_{NN}^{m\times n}$;　非負整数を要素とする $m\times n$ 次行列の集合,

以上で，$R^{m\times n}\supset R_{NN}^{m\times n}$，$Q^{m\times n}\supset Q_{NN}^{m\times n}$，$Z^{m\times n}\supset Z_{NN}^{m\times n}$，$R^{m\times n}\supset Q^{m\times n}\supset Z^{m\times n}\supset Z_{NN}^{m\times n}$，$R^{m\times n}\supset R_{NN}^{m\times n}\supset Q_{NN}^{m\times n}\supset Z_{NN}^{m\times n}$ であることに注意されたい．

$I(k):=\{1,2,\cdots,k\}$; インデックス集合,
$E^{m\times m}$;　$m\times m$ 次単位行列,
$0^{m\times n}$;　$m\times n$ 次零行列,
$1^{1\times n}:=[1,1,\cdots,1]$,
$x(i)$: 例えば $x\in R^{n\times 1}$ の第 i 要素を意味する，$i\in I(n)$.

ベクトルの不等式の表示法を，列ベクトル $x=(x(1),\cdots,x(n))^T$ と $y=(y(1),\cdots,y(n))^T$ の関係に代表させて示しておく．

$$x>y \Leftrightarrow x(i)>y(i)\quad \forall i\in I(n),$$
$$x\geqq y \Leftrightarrow x(i)\geqq y(i)\quad \forall i\in I(n),$$
$$x\geq y \Leftrightarrow x\geqq y,\ \text{かつ},\ \exists i\in I(n)\ s.t.\ x(i)>y(i).$$

本論文で用いる解の定義を明示しておく．

① $Ax=b$ の同次解；$m\times n$ 次行列 A，$m\times 1$ 次行列 $b=0^{m\times 1}$ のときの $n\times 1$ 次行列 x を同次解と呼ぶ.

② $Ax=b$ の非同次解；$m\times n$ 次行列 A，$m\times 1$ 次行列 $b\neq 0^{m\times 1}$ のときの $n\times 1$ 次行列 x を非同次解と呼ぶ.

③ $Ax=b$ の特解；各レベルにおいて，非同次解が同次解を含む和形式に表せないとき，その非同次解を特解と呼ぶ. [NIKA61]

④ $Ax=b$ の基本特解；各レベルにおいて，特解が他の特解との和で表現されないとき，その特解を基本特解と呼ぶ.

⑤レベルとは表 2 のように generator と展開係数の属性を制約したときの計算複雑度を示しており，大きな数字のレベルは複雑度が増す.

3.　$Ax=b$ $(A\in R^{m\times n}, b\in R^{m\times 1})$ の $x\in R^{n\times 1}$ または $x\in R_{NN}^{n\times 1}$

<u>レベル 0・1</u>[NIKA61], [FURU59], [MATS97]

$Ax=b$ $(A\in R^{m\times n}, b\in R^{m\times 1})$ の $x\in R^{n\times 1}$

①　$x\in R^{n\times 1}$ の存在条件；次の各命題は互いに等価である．

(1) $Ax=b$（$A\in R^{m\times n}$，$b=R^{m\times 1}$）に実数解 $x\in R^{n\times 1}$ が存在する．

(2) $p=r$; $r:=\mathrm{rank}(A)$,　$p:=\mathrm{rank}[A,b]$.

(3) $b_0=0^{(m-r)\times 1}$ である；$b_0:=b_2-A_3A_1^{-1}b_1$,

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix},$$

$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A_1)=r$.　[FURU59]

表 1.　n 個の変数をもつ m 個の方程式からなる連立線形方程式，$Ax=b$

Table 1.　Systems of m equations in n variables,　$Ax=b$

Relationship between m and n	Rank$(A)=r$ Rank$[A,b]=p$		Solutions to $Ax=b$
$m<n$	$r<m<n$	$r\neq p$	No solution
	$r<m<n$	$r=p$	Infinity of solutions
	$r=m$	p must $=r$	Infinity of solutions
$m=n$	$r<m$	$r\neq p$	No solution
	$r<m$	$r=p$	Infinity of solutions
	$r=m=n$	p must $=r$	Unique solution
$m>n$	$r\leqq n<m$	$r\neq p$	No solution
	$r<n<m$	$r=p$	Infinity of solutions
	$r=n$	$r=p$	Unique solution

(4) $A^T y = 0^{n\times1}$ の任意の解 $y \gtreqless 0^{m\times1}$ に対して，$y^T b = 0^{1\times1}$ となる．[MURA92]

(5) $Ax = b$ $(b \neq 0^{m\times1})$ が解をもつか，または，$y^T A = 0^{1\times n}$，$y^T b = \lambda \neq 0^{1\times1}$ が解をもつかの必ずどちらか一方だけが成立する．[HU69] ■

② $x \in R^{n\times1}$ の一般形；

$$x = x_{H01} + x_{P01} \in R^{n\times1},$$
$$x_{H01} = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i u_i \in R^{n\times1},\ \alpha_i \in R^{1\times1},\ i \in I(n-r),$$
$$u_i \in U_{01} := \{u_i \in R^{n\times1} \mid Au_i = 0^{m\times1}, i \in I(n-r)\},$$
$$l_{01} := |U_{01}| = n-r,$$
$$x_{P01} = v \in R^{n\times1},$$
$$V_{01} := \{v \in R^{n\times1} \mid Av = b\} = \{v\}, k_{01} := |V_{01}| = 1,$$

ここで、u_i, v を閉形解として示すと，次のようになる

$$[u_1, u_2, \cdots, u_{n-r}] = [u_i] = \begin{bmatrix} -A_1^{-1}A_2 \\ E^{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \in R^{n\times(n-r)},$$

$$v = \begin{bmatrix} A_1^{-1}b_1 \\ 0^{(n-r)\times1} \end{bmatrix} \in R^{n\times1},$$

ただし，$r := \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_1)$ とし、A, b の分割は①の(3)とする．

③ Remarks 0・1；

(1) $v \in R^{n\times1}$ は特解＝基本特解であり，一意に決まる．また，$k_{01} = |V_{01}| = |\{v\}| = 1$ である．

(2) ①の m, n, r, p と解の存在性との関係は次の表1のごとくである．[MATS97]

(3) $Ax = b$ の $x \in R^{n\times1}$ の generator (U_{01}, V_{01}) は，$\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m\times1}$ $(\tilde{A} = [A, -b] \in R^{m\times(n+1)})$ の同次解 $x \in R^{(n+1)\times1}$ をガウスの消去法（行基本操作の繰り返し）で求めることから，同時に得られる．

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A_1) = \mathrm{rank}(\tilde{A}_1) = r$ とし，

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1^{-1} & 0^{r\times(m-r)} \\ -\tilde{A}_3\tilde{A}_1^{-1} & E^{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{r\times r} & \tilde{A}_1^{-1}\tilde{A}_2 \\ 0^{(m-r)\times r} & 0^{(m-r)\times(n+1-r)} \end{bmatrix}, \cdots (*)$$

$$\tilde{A}_1 = A_1,\ \tilde{A}_2 = [A_2, -b_1],\ \tilde{A}_3 = A_3,\ \tilde{A}_4 = [A_4, -b_2].$$

したがって，$\tilde{x}_1 = x_1 \in R^{r\times1}$，$\tilde{x}_2 = [x_2^T, \tilde{x}(n+1)]^T \in R^{(n+1-r)\times1}$ と表現して，上式から次式が得られる．

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_1^{-1}\tilde{A}_2 \\ E^{(n+1-r)\times(n+1-r)} \end{bmatrix} \tilde{x}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -A_1^{-1}A_2 & A_1^{-1}b_1 \\ E^{(n-r)\times(n-r)} & 0^{(n-r)\times1} \\ 0^{1\times(n-r)} & 1^{1\times1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \tilde{x}(n+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [u_1, u_2, \cdots, u_{n-r}] & v \\ 0^{1\times(n-r)} & 1^{1\times1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \tilde{x}(n+1) \end{bmatrix} \in R^{(n+1)\times1}.$$

$\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m\times1}$ の同次解 $\tilde{x} \in R^{(n+1)\times1}$ の generator で，第 $(n+1)$ 要素が $zero$ であるものから第 $(n+1)$ 要素をすてて得られる $\{u_i \in R^{n\times1}, i \in I(n-r)\}$ が U_{01} であり，第 $(n+1)$ 要素が 1 であるものから第 $(n+1)$ 要素をすてて得られる $\{v \in R^{n\times1}\}$ が V_{01} である．

また，$\tilde{x} \in R^{(n+1)\times1}$ で $\tilde{x}(n+1) = 0$ に設定し，第 $(n+1)$ 要素をすてれば，$Ax = b$ のすべての同次解が $u_i \in R^{n\times1}$ の1次結合で与えられ，また $\tilde{x}(n+1) = 1$ に設定し，第 $(n+1)$ 要素をすてれば，$Ax = b$ のすべての非同次解 $x \in R^{n\times1}$ が同次解 $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i u_i \in R^{n\times1}$ と特解 $v \in R^{n\times1}$ の和で与えられる（$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}]^T = x_2$ である）. ここで，特解 v は基本特解 v の凸結合となっていることに留意されたい．

以上は，理解を容易にするために，すべてを閉形解として示したが，数値的にガウスの消去法を用いて，generator や解を求めることが有用である．

(4) (3)の(*)式の第(2,2)部分零行列 $0^{(m-r)\times(n+1-r)}$ の最後の列は $-b_0 := -(b_2 - A_3A_1^{-1}b_1) \in R^{(m-r)\times1}$ であり，それが零列ベクトルとなる．すなわち，この手順は①の(3)による解の存在条件をチェックしていることになる．■

④ ［例0-1］（レベル0-1の例題）

図1の A, b を $A \in R^{4\times7}, b \in R^{4\times1}$ とみなして，$x \in R^{7\times1}$ の generator を求める．

このとき，$n - r = 7 - 3 = 4$ であり，同次解の generator $U_{01} = \{u_i \in R^{7\times1}, i \in I(n-r)\}$ と 1 個かつ一意な特解 $v \in R^{7\times1}$ は次のごとくになる．

$$u_1 = (0.5, 1.0, 1.0, 1.0, 0, 0, 0)^T,$$
$$u_2 = (0, -1.0, 0, 0, 1.0, 0, 0)^T,$$
$$u_3 = (0, -1.0, -1.0, 0, 0, 1.0, 0)^T,$$
$$u_4 = (0.5, 1.0, 0, 0, 0, 0, 1.0)^T,$$
$$v = (0.5, 1.0, 0, 0, 0, 0, 0)^T.$$

この例での $\tilde{A}\tilde{x} = 0^{4\times1}$ の同次解 $\tilde{x} \in R^{8\times1}$ は，

$$\tilde{x} = (\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_4 + \frac{1}{2}\alpha_5, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1 - \alpha_3,$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)^T$$

となる．$\alpha_5 = 0$ とし，第 8 要素をとったものは $Ax = b$ の同次解 $x_{H01} \in R^{7\times1}$ のすべてを，$\alpha_5 = 1$ とし,第8要素をとったものは $Ax = b$ の非同次解 $x_{P01} \in R^{7\times1}$ のすべてを与えており,このときの $x = x_{H01} + x_{P01} \in R^{7\times1}$ をパラメータ化解と呼ぶことにする．レベル 0-1, レベル 1, レベル 2 では基底の数や特解の数は既知であるが, レベル 0-2 とレベル 3 以上ではそれらは一般にはじめから与えられない．後述の例0-2，例3～例7の generator の極

大集合の検証に上記パラメータ化解を用いている．記号に関する混乱をさけるために，以後の例題では，この例における $\alpha_1 = s, \alpha_2 = t, \alpha_3 = u, \alpha_4 = v, \alpha_5 = w$ なる置換したものを用いることにする．

また，U_{01} と v を用いて，任意の非同次解は②のごとくに与えられるが，その具体例は次のごとくである

$$x = (-0.5, 0, -2.0, -1.0, 0, 1.0, -1, 0)^T$$
$$= -u_1 + u_3 - u_4 + v \in R^{7\times1},$$

ここで，$w = \alpha_5 = 1$ のもとで，$s = \alpha_1 = 1, v = \alpha_4 = -1,$ $t = \alpha_2 = 0, u = \alpha_3 = 1$ となっている．■

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) 4× 7 coefficient matrix, (b) 4×1 forced term matrix

図１ 例0-1, 例0-2, 例１, 例２，例３のための線形方程式 $Ax = b$.

Figure 1. $Ax = b$; System of linear equations for Examples 0-1, 0-2, 1, 2, and 3.

<u>レベル 0-2</u> [FURU59], [MATS00-2], [NIKA61]

$Ax = b\ (A \in R^{m\times n}, b \in R^{m\times1})$ の $x \in R_{NN}^{n\times1}$

① $x \in R_{NN}^{n\times1}$ の存在条件；次の命題は互いに等価である．

(1) $Ax = b\ (A \in R^{m\times n}, b \in R^{m\times1})$ が非負実数解 $x \in R_{NN}^{n\times1}$ をもつ．

(2) (Minkowski-Farkas の補題[NIKA61]) 同次線形不等式 $A^T y \geq 0^{n\times1}$ の任意の解 $y \in R^{m\times1}$ に対して，$y^T b \geqq 0^{1\times1}$ となることである．

(3) ③の Remarks 0-2 の(3)の LP 表現式が $s_{02} = (k_{02} + l_{02})$ 個の最適非負実数解 $\tilde{x} \in R_{NN}^{(n+1)\times1}$ をもつ．[MATS00-2]

② $x \in R_{NN}^{n\times1}$ の一般形；

$$x = x_{H02} + x_{P02} \in R_{NN}^{n\times1},$$
$$x_{H02} = \sum_{i=1}^{l_{02}} \alpha_i u_i \in R_{NN}^{n\times1},\ \alpha_i \in R_{NN}^{1\times1},\ i \in I(l_{02}),$$
$$u_i \in U_{02} := \{u_i \in R_{NN}^{n\times1} \mid Au_i = 0^{m\times1}, i \in I(l_{02})\},$$
$$l_{02} = |U_{02}|,$$
$$x_{P02} = \sum_{j=1}^{k_{02}} \beta_j v_j \in R_{NN}^{n\times1}, \beta_j \in R_{NN}^{1\times1}, j \in I(k_{02}), \sum_{j=1}^{k_{02}} \beta_j = 1,$$
$$v_j \in V_{02} := \{v_j \in R_{NN}^{n\times1} \mid Av_j = b, j \in I(k_{02})\},\ k_{02} = |V_{02}|.$$
$$r := \mathrm{rank}(A),\ l_{02} \geqq n - r,\ k_{02} \geqq 1.$$

③ Remarks 0-2；

(1) $U_{02} = \left\{ u_i \in R_{NN}^{n\times1}, i \in I(l_{02}) \right\}$ を非負実数同次解の generator, $V_{02} = \{v_j \in R_{NN}^{n\times1},\ j \in I(k_{02})\}$ を非負実数特解の generator と呼ぶ．このとき，$l_{02} \geqq n-r$，$k_{02} \geqq 1$ $(b \neq 0^{m\times1})$ である．

(2) $Au_i = 0^{m\times1}$ を満たしている非負実数同次解の generator "$u_i \in R_{NN}^{n\times1}, i \in I(l_{02})$，（すなわち，$U_{02}$）" は，次式のように $Ax = 0^{m\times1}$ の LP 解法で求められる．

$$\text{minimize}\,(z = 0^{1\times n} \cdot x)$$
$$\text{subject to} \begin{bmatrix} A \\ 1^{1\times n} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0^{m\times1} \\ 1^{1\times1} \end{bmatrix}, \text{ かつ } x \in R_{NN}^{n\times1}.$$

したがって，上式が形成する凸多面体の端点数を l_{02} とすると，$l_{02} = |U_{02}|$ となる．[MATS00-1].

(3) $Av_j = b$ を満たしている非負実数特解の generator "非負実数基本特解 $v_j \in R_{NN}^{n\times1}, j \in I(k_{02})$,（すなわち，$V_{02}$）" は，次式のように $Ax = b$（すなわち，$\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m\times1}$ の $\tilde{A} = Z^{m\times(n+1)}$）に対する LP 解法で，$u_i \in R_{NN}^{n\times1} (i = I(l_{02}))$ とともに同時に求められることに留意されたい．

$$\text{minimize}\,(z = 0^{1\times(n+1)} \cdot \tilde{x})$$
$$\text{subject to} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ 1^{1\times(n+1)} \end{bmatrix} \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0^{m\times1} \\ 1^{1\times1} \end{bmatrix}, \text{ かつ } \tilde{x} \in R_{NN}^{(n+1)\times1},$$

ただし，$\tilde{A} := [A, -b] \in Z^{m\times(n+1)}$ である．

上式の形成する凸多面体の端点数を s_{02} とすると，非負実数基本特解の数 k_{02} は次式で与えられる．

$$k_{02} = s_{02} - l_{02}$$

ここで，上記 LP 表現式の s_{02} 個の最適非負実数解 $\tilde{x} \in R_{NN}^{(n+1)\times1}$ を吟味しよう．まず，k_{02} 個の非負実数基本特解 $V_{02} = \{v_j \in R_{NN}^{n\times1}, j \in I(k_{02})\}$ は，$\tilde{x}(n+1) \neq 0^{1\times1}$ である k_{02} 個の非負実数解 $\tilde{x} \in R_{NN}^{(n+1)\times1}$ の第 $(n+1)$ 要素，$\tilde{x}(n+1)$，を単位になるように全要素を調整した後，$\tilde{x}$ から第 $(n+1)$ 要素，$\tilde{x}(n+1)$，を除去したものとして得られる．（このことは，$x \in R_{NN}^{n\times1}$，$\tilde{x} \in R_{NN}^{(n+1)\times1}$ を考えているのであるから，常に可能であることに注意されたい．）また，$\tilde{x}(n+1) = 0^{1\times1}$ である非負実数解 $\tilde{x} \in R_{NN}^{(n+1)\times1}$ は l_{02} 個存在し，$\tilde{x}$ から $\tilde{x}(n+1)$ を除去して得られるものが非負実数同次解の generator $U_{02} := \{u_i \in R_{NN}^{(n\times1)}, i \in I(l_{02})\}$ である．[MATS00-1] [MATS00-2].

(4) $l_{02} > n - r$ の例が存在することは④の例 0-2 で与えられている．

(5) $x \in R_{NN}^{n\times1}$ の導出アルゴリズムは(3)の $Ax = b$（すなわち，$\tilde{A}\tilde{x} = 0^{m\times1}$）に対する LP 解法による generator（U_{02} と V_{02}）の導出アルゴリズムで十分である．このとき，U_{02} と V_{02} が同時に求められることに留意されたい．■

④ ［例 0-2］（レベル 0-2 のための例題）

図１の A, b を $A \in R^{4\times7}, b \in R^{4\times1}$ とみなして，$x \in R_{NN}^{7\times1}$ の generator を求める．このとき，$l_{02} = 5 > 4 = n - r,$

$s_{02}=7,\ k_{02}=s_{02}-l_{02}=7-5=2$ となる．まず，非負実数同次解の generator $U_{02}=\{u_i\in R_{NN}^{7\times1}, i\in I(l_{02})\}$ と非負実数特解の generator $V_{02}=\{v_j\in R_{NN}^{7\times1}\ \ , j\in I(k_{02})\}$ は，具体的には，次のごとくになる．

$u_1=(0.2, 0, 0, 0, 0.4, 0, 0.4)^T$,

$u_2=(0.2, 0, 0, 0.4, 0, 0.4, 0)^T$,

$u_3=(0.143, 0, 0.289, 0.289, 0.289, 0, 0)^T$,

$u_4=(0.2, 0.4, 0, 0, 0, 0, 0.4)^T$,

$u_5=(0.143, 0.289, 0.289, 0.289, 0, 0, 0)^T$,

$v_1=(0.5, 1.0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$,

$v_2=(0.5, 0, 0, 0, 1.0, 0, 0)^T$.

次に，U_{02} と V_{02} を用いて，与えられた非負実数非同次解 $x\in R_{NN}^{7\times1}$ を合成する．

$$x=(0.643, 1.0, 0.289, 0.289, 0.289, 0, 0)^T$$
$$=u_5+\frac{5}{7}v_1+\frac{2}{7}v_2$$

ここで，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0,\ \alpha_5=1,\ \beta_1=5/7,\ \beta_2=2/7$ であり，$x\in R_{NN}^{7\times1}$ は例 0-1 で $s=t=0.289,\ u=v=0,\ w=1$ とおいたものである．

上記の $x\in R_{NN}^{7\times1}$ の表現は②の一般形を満たしている．■

4． $Ax=b\ (A\in Q^{m\times n}, b\in Q^{m\times1})$ の $x\in Q^{n\times1}$ または $Ax=b\ \ (A\in Z^{m\times n}\subset Q^{m\times n},\ b\in Z^{m\times1}\subset Q^{m\times1})$ の $x\in Z^{n\times1}$

レベル 1 [DESE96], [KRÜC87],[MATS97], [NEWM72]

$Ax=b\ (A\in Q^{m\times n}, b\in Q^{m\times1})$ の $x\in Q^{n\times1}$

① $x\in Q^{n\times1}$ の存在条件；

レベル 0-1 の①での実数演算を有理数演算としたものであるが，例えば，レベル 0-1 の①の(4)を言い換えると次のようになる．

" $Ax=b$ has a solution $x\in Q^{n\times1}$ if and only if $y^Td=0^{1\times1}$ for every $y\in Q^{m\times1}$ satisfying $y^TA=0^{1\times n}$."

② $x\in Q^{n\times1}$ の一般形；

$$x=x_{H1}+x_{P1}\in Q^{n\times1},$$
$$\begin{cases} x_{H1}=\sum_{i=1}^{n-r}\alpha_iu_i\in Q^{n\times1}, \alpha_i\in Q^{1\times1}, i\in I(n-r), \\ u_i\in U_1:=\{u_i\in Q^{n\times1}\mid Au_i=0^{m\times1}, i\in I(n-r)\}, \\ l_1:=|U_1|=n-r, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{P1}=v\in Q^{n\times1}, \\ V_1:=\{v\in Q^{n\times1}\mid Av=b\}=\{v\}, k_1:=|V_1|=|\{v\}|=1, \end{cases}$$
$$r:=\mathrm{rank}(A).$$

③ Remarks 1；

(1) $v\in Q^{n\times1}$ は特解＝基本特解であり，一意に決まる．また，$k_1:=|V_1|=|\{v\}|=1$ である．

(2) [DESE96] に $b=M_d-M_0\in Z^{m\times1}\subset Q^{m\times1}$, $M_d, M_0\in Z_{NN}^{m\times1}$ の場合の $x\in Q^{n\times1}$ の存在条件が次のように mod(0) インバリアントを用いて与えられた．しかし，これは上記①そのものであるが，レベル 2 の③ Remarks 2 の(3)と対比させるために示していることに注意されたい．

$x\in Q^{n\times1}$ が存在する． $\Leftrightarrow$ $y^TM_0=y^TM_d\ \forall$ mod(0) P-invariant $y\in Z^{m\times1}$.

(3) レベル 1 の連続緩和問題はレベル 0-1 である．

(4) (3)の理由から，$x\in Q^{n\times1}$ を求めるための計算アルゴリズムは，有理数演算のもとでのガウスのアルゴリズムまたは閉形解で十分である．■

④［例 1］（レベル 1 のための例題）

図 1 の A, b を $A\in Z^{4\times7}\subset Q^{4\times7}, b\in Z^{4\times1}\subset Q^{4\times1}$ とみなして、$x\in Q^{7\times1}$ の generator を求める．このとき，$n-r=7-3=4$ となる．まず，有理数同次解の generator $U_1=\{u_i\in Q^{7\times1}, i\in I(n-r)\}$ と 1 個かつ一意に決まる有理数特解 $v\in Q^{7\times1}$ は次のごとくになる．ただし，U_1, V_1 はこの例ではレベル 0-1 の U_{01}, V_{01} (例 0-1 参照) を有理数表現したものとなる．

$u_1=(\frac{1}{2},1,1,1,0,0,0)^T$, $u_2=(0,-1,0,0,1,0,0)^T$,

$u_3=(0,-1,-1,0,0,1,0)^T$, $u_4=(\frac{1}{2},1,0,0,0,0,1)^T$,

$v=(\frac{1}{2},1,0,0,0,0,0)^T$.

また，分解または合成例は

$$x=(3/4, 0, 0, 1, 1/2, 1, -1/2)^T$$
$$=u_1+\frac{1}{2}u_2+u_3-\frac{1}{2}u_4+v$$

であり，$\alpha_1=\alpha_3=1,\ \alpha_2=1/2,\ \alpha_4=-1/2$ である．$x\in Q^{7\times1}$ は例 0-1 において $s=u=w=1,\ u=1/2,\ v=-1/2$ に選んだものである．なお，例 0-1 の $x\in R^{7\times1}$ の分解例を有理数表現したものもレベル 1 の分解例となっていることに注意されたい．■

レベル 2 [KRÜC87],[KANN79], [NEWM72], [DESE96], [MATS97]

$Ax=b\ (A\in Z^{m\times n}, b\in Z^{m\times1})$ の $x\in Z^{n\times1}$

① $x\in Z^{n\times1}$ の存在条件；

"Let $A\in Z^{m\times n}$ and $b\in Z^{m\times1}$. Let $S=QAP$ be the Smith normal form of A, and let $s_{11},\cdots,s_{\alpha\alpha}$ be the elementary divisors of A. Define $\bar{b}=(\bar{b}(1),\cdots,\bar{b}(m))^T=Qb$.

Then $Ax=b$ has a solution $x\in Z^{n\times1}$ if and only if (i) s_{jj} is a divisor of $\bar{b}(j)$ for $1\leqq j\leqq\alpha$, and (ii) $\bar{b}(j)=0$ for $j>\alpha$."

② $x\in Z^{n\times1}$ の一般形；

$$\begin{aligned}&x = x_{H2} + x_{P2} \in Z^{n\times 1},\\&\left\{\begin{array}{l} x_{H2} = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i u_i \in Z^{n\times 1},\ \alpha_i \in Z^{1\times 1},\ i \in I(n-r),\\ u_i \in U_2 := \{u_i \in Z^{n\times 1} \mid Au_i = 0^{m\times 1},\ i \in I(n-r)\},\\ l_2 := |U_2| = n-r,\end{array}\right.\\&\left\{\begin{array}{l} x_{P2} = v \in Z^{n\times 1},\\ V_2 := \{\, v \in Z^{n\times 1} \mid Av = b\} = \{v\}, k_2 := |V_2| = 1,\end{array}\right.\\&r =: \mathrm{rank}(A).\end{aligned}$$

③ Remarks 2；

(1)1 レベル２の方程式は，“Systems of linear Diophantine equations” と言われているものである．

(2) $v \in Z^{n\times 1}$ は特解＝基本特解であり，一意に決まる．また，$k_2 := |V_2| = |\{v\}| = 1$ である．

(3)[DESE96] に $b = M_d - M_0 \in Z^{m\times 1}, M_d, M_0 \in Z_{NN}^{m\times 1}$ の場合の解 $x \in Z^{n\times 1}$ の存在条件が, mod(k) インバリアントを用いて与えられた．

$x \in Z^{n\times 1}$ が存在する． $\Leftrightarrow y^T M_0 = y^T M_d (\mathrm{mod}(k))$, $k \geqq 2$, $\forall\,\mathrm{mod}(k)$ P-invariant $y \in Z^{m\times 1}$.

(4)レベル２の連続緩和問題はレベル 0-1 であるが，(5)のように注意を要する．

(5)レベル２のインバリアントの効率良いアルゴリズムは [KANN79]で modulo 演算を用いて与えられている（言わゆる，A の Hermite-Smith 正準形を求める際に，インバリアントが生成される [DESE96]）．基本特解は１個のみでかつ一意であるが，レベル 0-1 を有理数演算で求めても一般には整数基本特解が得られないことがある．例 0-1 と例２参照．したがって，U_2 と V_2 を求めるためには[KANN79]のアルゴリズムを $\widetilde{A}$ へ拡張する必要がある．このとき，U_2 と V_2 が同時に得られるという利点が生じる．

(6) ①の諸定義，mod(k) インバリアント等の定義は [DESE96], [KRÜC87], [KANN97], [NEWM72], [MATS99] を参照されたい． ■

④［例２］（レベル２のための例題）

図１の A, b を $A \in Z^{4\times 7}, b \in Z^{4\times 1}$ とみなして，$x \in Z^{7\times 1}$ の generator を求める．このとき，$n - r = 7 - 3 = 4$ となる．まず，整数同次解の generator $U_2 = \{u_i \in Z^{7\times 1}, i \in I(n-r)\}$ と整数特解 $v \in Q^{7\times 1}$ は次のごとくになる．しかし，レベル 0-1，レベル１の generator (U_{01}, V_{01}, U_1, V_1) と比較すると，レベル２の v, u_1, u_4 のとり方に変化が生じている．ただし，$l_2 = l_1 = l_{01} = 4$ ，$k_2 = k_1 = k_{01} = 1$ である．

$$u_1 = (1,2,2,2,0,0,1)^T,\quad u_2 = (0,-1,0,0,1,0,0)^T,$$
$$u_3 = (0,-1,-1,0,0,1,0)^T, u_4 = (0,0,-1,-1,0,0,1)^T,$$
$$v = (0,0,-1,-1,0,0,0)^T .$$

また，レベル 0-1 の④の $\widetilde{x} \in R^{8\times 1}$ で（すなわち，例0-1 で） $w = \alpha_5 = 1, s = \alpha_1 = 0, t = \alpha_2 = 1, u = \alpha_3 = 1, v = \alpha_4 = 1$ のときの非同次解 $x \in Z^{7\times 1}$ は，$x = (1,0,-1,0,1,1,1)^T = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + v$ のように generator U_2 と $V_2 = \{v\}$ を用いて分解または合成される．ここで，レベル２の②での U_2 による展開係数 α_i は $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ となっていることに注意されたい．比較のために同じ $x \in Z^{7\times 1}$ をレベル１の $U_1 = \{u_1^{(1)}, \cdots, u_4^{(1)}\}$ と $V_1 = \{v^{(1)}\}$（例１参照）を用いて表わすと， $x = (1,0,-1,0,1,1,1)^T \quad = u_2^{(1)} + u_3^{(1)} + u_4^{(1)} + v^{(1)}$ $(\alpha_1^{(1)} = 0, \alpha_2^{(1)} = \alpha_3^{(1)} = \alpha_4^{(1)} = 1)$ となることに注意されたい． ■

5． $Ax = b\ (A \in Q^{m\times n}, b \in Q^{m\times 1})$ の $x \in Q_{NN}^{n\times 1}$ または $Ax = b\ \ (A \in Z^{m\times n} \subset Q^{m\times n},\ b \in Z^{m\times 1} \subset Q^{m\times 1})$ の $x \in Z_{NN}^{n\times 1}$

レベル３ $Ax = b\ \left(A \in Q^{m\times n},\ b \in Q^{m\times 1}\right)$ の $x \in Q_{NN}^{n\times 1}$

① $x \in Q_{NN}^{n\times 1}$ の存在条件； $x \in Q_{NN}^{n\times 1}$ が存在するための必要十分条件は，次の $\widetilde{A} \in Z^{m\times(n+1)}$ に対する LP(線形計画)表現による $s_3 = (k_3 + l_3)$ 個の最適非負有理数解 $\widetilde{x} \in Q_{NN}^{(n+1)\times 1}$ が存在することである．

$$\text{minimize}\quad (z = 0^{1\times(n+1)} \cdot \widetilde{x})$$

$$\text{subject to}\ \begin{bmatrix} \widetilde{A} \\ 1^{1\times(n+1)} \end{bmatrix} \widetilde{x} = \begin{bmatrix} 0^{m\times 1} \\ 1^{1\times 1} \end{bmatrix}, \widetilde{x} \geqq 0^{(n+1)\times 1}.$$

ただし，s_3 個の $\widetilde{x} \in Q_{NN}^{(n+1)\times 1}$ から U_3（l_3 個の $u_i \in Q_{NN}^{n\times 1}$）と V_3（$k_3 = s_3 - l_3$ 個の $v_j \in Q_{NN}^{n\times 1}$）を求める手順は，レベル 0-2 の Remarks 0-2 の(3)と同様にして得られるもの（ただし，$R_{NN}^{n\times 1} \to Q_{NN}^{n\times 1}$ として）である．ここで，s_3 は LP 表現の制約式で形成される凸多面体の端点数である．

② $x \in Q_{NN}^{n\times 1}$ の一般形；

$$x = x_{H3} + x_{P3} \in Q_{NN}^{n\times 1},$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{H3} = \sum_{i=1}^{l_3} \alpha_i u_i \in Q_{NN}^{n\times 1},\ \ \alpha_i \in Q_{NN}^{1\times 1},\qquad i \in I(l_3),\\ u_i \in U_3 := \{u_i \in Q_{NN}^{n\times 1} \mid Au_i = 0^{m\times 1},\ \ i \in I(l_3)\}, l_3 := |U_3|.\end{array}\right.$$

$$x_{P3} = \textstyle\sum_{j=1}^{k_3} \beta_j v_j \in Q_{NN}^{n\times 1},\ \beta_j \in Q_{NN}^{1\times 1},\ j \in I(k_3),\ \sum_{j=1}^{k_3} \beta_j = 1,$$

$$v_j \in V_3 := \{v_j \in Q_{NN}^{n\times 1} \mid Av_j = b,\ i \in I(k_3)\},\quad k_3 := |V_3|.$$
$$r = rank(A), l_3 \geqq n - r.$$

③ Remarks 3；

(1) レベル３の連続緩和問題はレベル 0-2 であり，①，②はこのことに基礎がおかれている．すなわち，$\widetilde{A} = [A, -b] \in Z^{m\times(n+1)}$ に対する LP 解法で U_3 と V_3 が同時に求められることに留意されたい。また，U_3 は U_{02}

とともに Fourier-Motzkin 法でも求められるが，$\widetilde{A} \in Z^{m\times(n+1)}$ に Fourier-Motzkin 法を適用すれば，U_3 と V_3 が同時に得られることにもなる．

(2) $l_3 > n-r$ の例が存在することは④の例３で与えられており，その例では $k_3 > 1$ ともなっている．

(3) ①は，レベル 0-2 の③の Remarks 0-2 の(3)を有理数演算のもとで行うことに相当する．したがって，$s_3 = s_{02}$，$l_3 = l_{02}$，$k_3 = k_{02}$ である．

(7) ペトリネットに関する諸定義は[MURA92]を参照されたい． ■

④ [例３](レベル３のための例題)

図１の A, b を $A \in Z^{4\times7} \subset Q^{4\times7}, b \in Z^{4\times1} \subset Q^{4\times1}$ とみなして，$x \in Q_{NN}^{7\times1}$ の generator を求める．このとき，$l_3 = 5 > 4 = 7-3 = n-r$，$s_3 = 7, k_3 = s_3 - l_3 = 7-5 = 2$ となる．非負有理数同次解の generator $U_3 = \{u_i \in Q_{NN}^{7\times1}, i \in I(l_3)\}$ と非負有理数特解の generator $V_3 = \{v_j \in Q_{NN}^{7\times1}, j \in I(k_3)\}$ は次のごとくになる．ただし，U_3, V_3 はこの例ではレベル 0-2 の U_{02}, V_{02} (例 0-2 参照)を有理数表現したものとなる．

$$u_1 = (\frac{1}{5}, 0, 0, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{5})^T, u_2 = (\frac{1}{5}, 0, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0)^T,$$

$$u_3 = (\frac{1}{7}, 0, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0)^T, u_4 = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0, 0, \frac{2}{5})^T,$$

$$u_5 = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0, 0)^T,\ v_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

$$v_2 = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T.$$

$x \in Q_{NN}^{7\times1}$ の分解例を示す．

$$x = (3/5,\ 4/5,\ 0, 0, 2/5, 0, 1/5)^T = \frac{1}{2}u_4 + \frac{3}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0, \alpha_4 = 1/2, \beta_1 = 3/5, \beta_2 = 2/5$ である．また，例 0-2 の $x \in R_{NN}^{7\times1}$ を有理数表現したものもレベル３の分解例となっている． ■

レベル４ [KRÜC87], [MATS00-2]

$Ax = b\ (A \in Z^{m\times n}, b \in Z^{m\times1})$ の $x \in Z_{NN}^{n\times1}$ (ただし，レベル３で更に $u_i, v_j \in Z_{NN}^{n\times1}$ を要請したものである．)

① $x \in Z_{NN}^{n\times1}$ の存在条件；

$x \in Z_{NN}^{n\times1}$ が存在するための必要十分条件は，次の IP (整数計画)表現による $s_4 = (k_4 + l_4)$ 個の最適非負整数解 $\widetilde{x} \in Z_{NN}^{(n+1)\times1}$ が存在することである．

" Minimize $(z = 0^{1\times(n+1)} \cdot \widetilde{x})$ for $\widetilde{x}(n+1) = 0^{1\times1}$, and minimize $(z = [0^{1\times n}, 1^{1\times1}][x^T, (\widetilde{x}(n+1)-1)]^T = \widetilde{x}(n+1)-1)$ for $\widetilde{x}(n+1) \neq 0^{1\times1}$ subject to $\begin{bmatrix} \widetilde{A} \\ 1^{1\times(n+1)} \end{bmatrix} \widetilde{x} = \begin{bmatrix} 0^{m\times1} \\ 1^{1\times1} \end{bmatrix}$, $\widetilde{x} \geqq 0^{(n+1)\times1}$ s.t. $\widetilde{x}(q) \in Z_{NN}^{1\times1}, q \in I(n+1)$."

s_4 個の $\widetilde{x} \in Z_{NN}^{(n+1)\times1}$ から U_4(l_4 個の $u_i \in Z_{NN}^{n\times1}$) と V_4($k_4 = s_4 - l_4$ 個の $v_j \in Z_{NN}^{n\times1}$) を得る手順はレベル 0-2 の③の Remarks 0-2 の(3)と同様にして得られるもの(ただし，$R_{NN}^{n\times1} \to Z_{NN}^{n\times1}$)である．ただし，$s_4 \geqq s_3$ である．s_3 はレベル３で定義されたものであり，

$\begin{bmatrix} \widetilde{A} \\ 1^{1\times(n+1)} \end{bmatrix} \widetilde{x} = \begin{bmatrix} 0^{m\times1} \\ 1^{1\times1} \end{bmatrix}, \widetilde{x} \geqq 0^{(n+1)\times1}$，が形成する凸多面体の端点数である．

② $x \in Z_{NN}^{n\times1}$ の一般形；

$$\begin{cases} x = x_{H4} + x_{P4} \in Z_{NN}^{n\times1}, \\ x_{H4} = \sum_{i=1}^{l_4} \alpha_i u_i \in Q_{NN}^{n\times1},\ \alpha_i \in Q_{NN}^{1\times1}, i \in I(l_4), \\ u_i \in U_4 := \{u_i \in Z_{NN}^{n\times1} \mid Au_i = 0^{m\times1},\ i \in I(l_4)\}, \\ l_4 := |U_4|. \end{cases}$$

$$x_{P4} = \sum_{j=1}^{k_4} \beta_j v_j \in Q_{NN}^{n\times1},\ \beta_j \in Q_{NN}^{1\times1}, j \in I(k_4),\ \sum_{j=1}^{k_4} \beta_j = 1,$$

$$v_j \in V_4 := \{v_j \in Z_{NN}^{n\times1} \mid Av_j = b,\ i \in I(k_4)\},\ k_4 := |V_4|.$$

$$r = \mathrm{rank}(A),\ l_4 = l_3 \geqq n-r,\ k_4 \geqq k_3.$$

③ Remarks 4；

(1) レベル４の連続緩和問題はレベル３であり，レベル３の連続緩和問題はレベル 0-2 である．レベル４とレベル３の間には非負基本特解に関して大きな差異があることに留意されたい．

(2) $l_4 = l_3$，$k_4 \geqq k_3$ である．$k_4 > k_3$ の例の存在することは，④の例４に与えられている．

(3) $l_4 = l_3$ の理由は次のごとくである．レベル３と４で $b = 0^{m\times1}$ とすれば，$x = x_{H3}$ での $u_i \in Q_{NN}^{n\times1}$ と $x = x_{H4}$ での $u_i \in Z_{NN}^{n\times1}$ のみが差異となっている．$b = 0^{m\times1}$ のもとで $u_i \in Q_{NN}^{n\times1}$ と $u_i \in Z_{NN}^{n\times1}$ は１対１対応をなしているので，$l_4 = l_3$ である．

(4) レベル４の U_4 は極小台集合(すなわち，初等的)T インバリアントの極大集合であり，V_4 は非負整数基本特解の極大集合である．

(5) レベル４の U_4 と V_4 を IP 表現式を用いて同時に求めることの詳細は[TAKA01-2]に与えられている．IP 表現式の $\widetilde{A}\widetilde{x} = 0^{m\times(n+1)}$ の係数行列 $\widetilde{A} = [A, -b] \in Z^{m\times(n+1)}$ は，ペトリネットにおいては図２(a)のようにトランジション t_8 とアーク $(p_2, t_8), (t_8, p_4)$ を付加された拡大ネットに対応している．したがって，$\widetilde{A}\widetilde{x} = 0^{m\times1}$ の非負整数解 $\widetilde{x} = Z_{NN}^{(n+1)\times1}$ そのものは，図２(a)の拡大ネットの T インバリアントを意味している．しかし，IP 表現式で

は，図2(a)の拡大ネットのTインバリアント $\tilde{x}=Z_{NN}^{(n+1)\times1}$ に，更には，$\tilde{x}(n+1)=1$ （i.e., $Ax=b, A\in Z^{m\times n}, b\in Z^{m\times1}$ における非負整数非同次解 $x=Z_{NN}^{n\times1}$）であることが要請されていることに留意されたい．以上の内容は，[MATS00-2]の(4)式を詳しくしたものに相当する．

他方，(U_4,V_4) は，§7のように $(U_6,V_6)\to(U_5=U_6,V_5)\to(U_4,V_4=V_5)$ としても求められる．尚，U_4 だけを求めたいならば，U_{02},U_3 から得られる（すなわち，$A\in Z^{m\times n}$ に対するLP法, Fourier-Motzkin法で十分である）．

(6) $\alpha_i\in Q_{NN}^{1\times1}$，$i\in I(l_4)$ でも $x=x_{H4}+x_{P4}\in Z_{NN}^{n\times1}$，$x_{H4},x_{P4}\in Z_{NN}^{n\times1}$ が常に存在すること．

(a) レベル4の方程式 $Ax=b\ \left(A\in Z^{m\times n},\ b\in Z^{m\times1}\right)$ の非負有理数特解は一般に $x_{P4}=\sum_{j=1}^{k_4}\beta_j v_j\in Q_{NN}^{n\times1}$，$\beta_j\in Q_{NN}^{1\times1}$，$\sum_{j=1}^{k_4}\beta_j=1$ である．

(b) (a)のとき，常に次の表現が可能であることに注意されたい．

$$x_{P4}=\sum_{j=1}^{k_4}\beta_j v_j\in Z_{NN}^{n\times1},\ \beta_j\in Q_{NN}^{1\times1},\ \sum_{j=1}^{k_4}\beta_j=1.$$

このとき，必然的に，$x_{H4}=\sum_{i=1}^{l_4}\alpha_i u_i\in Z_{NN}^{n\times1}$ $(\alpha_i\in Q_{NN}^{1\times1})$ かつ $x=x_{H4}+x_{P4}\in Z_{NN}^{n\times1}$ となる．

(7)ペトリネットに関する諸定義は[MURA92]を参照されたい．■

④ [例4](レベル4のための例題)

図2(a)のペトリネットシステム（ただし，t_8 とアーク $(p_2,t_8),(t_8,p_4)$ はないものとする）を考える．このとき，プレース・トランジション接続行列 $A\in Z^{4\times7}$，マーキング差 $b=M_d-M_o\in Z^{4\times1}(M_0,M_d\in Z_{NN}^{4\times1})$ が，それぞれ図2(b), (c)と与えられている．このときの発火回数ベクトル $x\in Z_{NN}^{7\times1}$ の generator を求める．ここで，$l_4=l_3=5$，$s_4=11$，$k_4=s_4-l_4=11-5=6>2=k_3$ となる．ただし，$u_i,v_j\in Z_{NN}^{7\times1}$ かつ $\alpha_i,\beta_j\in Q_{NN}^{7\times1}$ を要請する．したがって，このときの非負有理数同次解 $x_{H4}\in Q_{NN}^{7\times1}$ の generator $U_4=\{u_i\in Z_{NN}^{7\times1}, i\in I(l_4)\}$（すなわち，極小台集合Tインバリアントの極大集合）と非負有理数特解 $x_{P4}\in Q_{NN}^{7\times1}$ の generator $V_4=\{v_j\in Z_{NN}^{7\times1}, j\in I(k_4)\}$（すなわち，非負整数基本特解の極大集合)は次のごとくになる．

$$u_1=(1,2,2,2,0,0,0)^T,\ u_2=(1,0,2,2,2,0,0)^T,$$
$$u_3=(1,0,0,2,0,2,0)^T,\ u_4=(1,2,0,0,0,0,2)^T,$$
$$u_5=(1,0,0,0,2,0,2)^T,\ v_1=(1,2,1,1,0,0,0)^T,$$
$$v_2=(1,1,0,1,0,1,0)^T,\ v_3=(1,0,1,1,2,0,0)^T,$$
$$v_4=(1,0,0,1,1,1,0)^T,\ v_5=(1,2,0,0,0,0,1)^T,$$
$$v_6=(1,0,0,0,2,0,1)^T.$$

更に，$v_1\sim v_6$ の凸結合で表される非負整数特解は，

$$v_7=(1,1,1,1,1,0,0)^T=(v_1+v_3)/2,$$
$$v_8=(1,1,0,0,1,0,1)^T=(v_5+v_6)/2$$

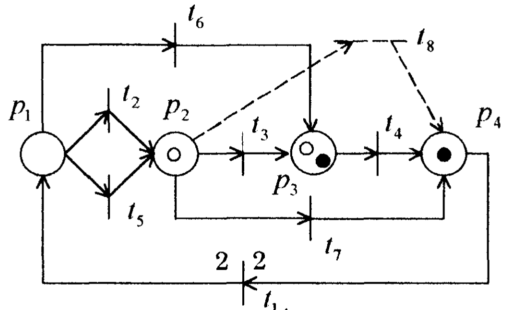
であることに留意されたい．v_7，v_8 は非負整数特解であるが，非負整数基本特解ではない．

$x\in Z_{NN}^{7\times1}$ の分解例を示す．

$$x=(2\,1\,1\,2\,2\,1\,1)^T=\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{2}u_3+\frac{1}{2}v_5+\frac{1}{2}v_6$$

$\alpha_1=\alpha_4=\alpha_5=0,\alpha_2=\alpha_3=1/2$, $\beta_5=\beta_6=1/2$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$ である．この $x\in Z_{NN}^{7\times1}$ は例0-1で，$s=t=2$，$u=v=w=1$ とおいて得られたものである．また，$x=(2\,1\,1\,2\,2\,1\,1)^T=\frac{1}{2}u_3+\frac{1}{2}u_5+\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_3$，

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=0$, $\alpha_3=\alpha_5=1/2$, $\beta_1=\beta_3=1/2$ でもある．■



(a) $\Sigma(N,M_0,M_d)$; P/T Petri net system

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0&0&-1&-1&0\\0&1&-1&0&1&0&-1\\0&0&1&-1&0&1&0\\-2&0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}=M_d-M_o$$

(b) (c)

図2 例4, 例5, 例6, 例7 のためのペトリネット；$M_0=(0\,0\,1\,1)^T$，$M_d=(0\,1\,1\,0)^T$.

Figure 2. Petri net system for Examples 4, 5, 6 and 7, where $M_0=(0\,0\,1\,1)^T$ and $M_d=(0\,1\,1\,0)^T$.

レベル5 [KRÜC87], [MATS00-2]

$Ax=b\ \left(A\in Z^{m\times n},\ b\in Z^{m\times1}\right)$ の $x\in Z_{NN}^{n\times1}$（ただし，レベル4で更に $\alpha_i\in Z_{NN}^{1\times1}$ を要請したものである．）

① $x\in Z_{NN}^{n\times1}$ の存在条件；

レベル4の①に同じである．ただし，レベル5は，レベル4での“$\alpha_i\in Q_{NN}^{1\times1}$，$i\in I(l_4)$”→“$\alpha_i\in Z_{NN}^{1\times1}$，$i\in I(l_5)$”とせんがために，$l_5\geqq l_4$ となるが，非負整数特解（したがって，非負整数基本特解）は変わらないので，$k_5=k_4$ である．

② $x\in Z_{NN}^{n\times1}$ の一般形；

$$x=x_{H5}+x_{P5}\in Z_{NN}^{n\times1},$$

$$\begin{cases}x_{H5}=\sum_{i=1}^{l_5}\alpha_i u_i\in Z_{NN}^{n\times1},\ \alpha_i\in Z_{NN}^{1\times1},\ i\in I(l_5),\\ u_i\in U_5:=\{u_i\in Z_{NN}^{n\times1}\mid Au_i=0^{m\times1},\ i\in I(l_5)\},\\ l_5:=|U_5|.\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{P5}=\sum_{j=1}^{k_5}\beta_j v_j \in Z_{NN}^{n\times1},\ \beta_j \in Q_{NN}^{1\times1},\ j\in I(k_5),\ \sum_{j=1}^{k_5}\beta_j=1, \\ v_j \in V_5 :=\{v_j \in Z_{NN}^{n\times1} \mid Av_j=b,\ j\in I(k_5)\},\ k_5:=|V_5|. \end{cases}$$

$r=\mathrm{rank}(A),\ l_5 \geqq l_4 = l_3 \geqq n-r,\ k_5=k_4 \geqq k_3.$

③ Remarks 5；

(1)レベル5はレベル4を包含しており，差異はレベル5の$U_5=\{u_i \in Z_{NN}^{n\times1}, i\in I(l_5)\}$が極小Tインバリアントの極大集合になっていることである．したがって，レベル5の基本はレベル4と同じである．

(2)$l_5>l_4$の例が存在することは，④の例5が示している．

(3)$k_5=k_4$の証明；

まず,レベル4 ③の(6)の(a),(b)が成立している．

(c) レベル4と同じ方程式$Ax=b$ $\left(A\in Z^{m\times n},\ b\in Z^{m\times1}\right)$であるレベル5の方程式の非負整数特解$x_{P5}$は次式となる．

$$x_{P5}=\sum_{j=1}^{k_5}\beta_j v_j \in Z_{NN}^{n\times1},\ \beta_j\in Q_{NN}^{1\times1},\ \sum_{j=1}^{k_5}\beta_j=1.$$

このとき，$x_{H5}=\sum_{i=1}^{l_5}\alpha_i u_i \in Z_{NN}^{n\times1}(\alpha_i \in Z_{NN}^{1\times1})$であり，$x=x_{H5}+x_{P5}\in Z_{NN}^{n\times1}$である．

(d) 同じ方程式の非負整数特解がともにレベル4 ③の(6)の(b)と上記(c)であるから，$k_5=k_4$となる．すなわち，レベル5では，レベル4の非負有理数特解の表現の特別なものだけを採用しており，それはレベル4に含まれているものである．他方，レベル5の非負整数同次解の generator U_5 は，レベル4の非負有理数同次解の generator U_4を含んでいることに注意されたい．

(1) レベル5では$V_5=V_4$であるから，U_5をU_4から求めることが考えられるが，§7 のようにU_6,V_6から求めることも可能である． ■

④［例5］（レベル5のための例題）

レベル4のための例4と同じ立場で非負整数非同次解$x\in Z_{NN}^{7\times1}$の generator U_5とV_5を求める．ただし，ここでは$u_i,v_j\in Z_{NN}^{7\times1},\alpha_i\in Z_{NN}^{1\times1},\beta_j\in Q_{NN}^{1\times1}$，$\sum_{j=1}^{k_5}\beta_j=1$を要請する．したがって、このときには$l_5=14>5=l_4$，$s_5=20,\ k_5=s_5-l_5=20-14=6=k_4>k_3=2$となる．非負整数同次解（T インバリアント）$x_{H5}\in Z_{NN}^{7\times1}$の generator（すなわち，極小 T インバリアントの極大集合）$U_5=\{u_i\in Z_{NN}^{7\times1}, i\in I(l_5)\}$ と 非 負 整 数 特 解 $x_{P5}\in Z_{NN}^{7\times1}$の generator（すなわち，非負整数基本特解の極大集合）$V_5=\{v_j\in Z_{NN}^{7\times1}, j\in I(k_5)\}$は，次のごとくになる．ただし，$u_1\sim u_5$はレベル4の$U_4$（すなわち，極小台集合 T インバリアントの極大集合）と同じであり，V_5もレベル4のV_4と同じである．

$u_6=(u_1+u_2)/2=(1122100)^T$,
$u_7=(u_1+u_3)/2=(1112010)^T$,
$u_8=(u_1+u_4)/2=(1211001)^T$,
$u_9=(u_1+u_5)/2=(u_2+u_4)/2=(1111101)^T$,
$u_{10}=(u_2+u_3)/2=(1012110)^T$,
$u_{11}=(u_2+u_5)/2=(1011201)^T$,
$u_{12}=(u_3+u_4)/2=(1101011)^T$,
$u_{13}=(u_3+u_5)/2=(1001111)^T$,
$u_{14}=(u_4+u_5)/2=(1100102)^T$.

$v_7=(v_1+v_3)/2=(1111100)^T$，$v_8=(v_5+v_6)/2=(1100101)^T$については，レベル4のときと同様である．

$x\in Z_{NN}^{7\times1}$の分解例として，例4の具体例をとると，

$x=(2112211)^T=u_{10}+\frac{1}{2}v_5+\frac{1}{2}v_6$となり，

$\alpha_{10}=1,\alpha_i=0(i\in I(14),i\neq10)$,

$\beta_5=\beta_6=1/2,\beta_j=(j\in I(6),j\neq5,6)$である．また，

$x=(2112211)^T=u_{13}+\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_3,\alpha_{13}=1$,

$\alpha_i=0(i\in I(14),i\neq13),\beta_1=\beta_3=1/2,\beta_2=\beta_4=\beta_5=\beta_6=0$でもある．レベル5は，この例のようにレベル4に比して，$x\in Z_{NN}^{n\times1}$の分解または合成がより簡単になる.■

レベル6 [MATS01-2]

$Ax=b$ $(A\in Z^{m\times n}, b\in Z^{m\times1})$の$x\in Z_{NN}^{n\times1}$（ただし,レベル5で更に$\beta_j\in Z_{NN}^{1\times1}$を要請したものである.）

① $x\in Z_{NN}^{n\times1}$の存在条件；

レベル5の①に同じである．ただし,レベル6は,レベル5での“$\beta_j\in Q_{NN}^{1\times1}$, $j\in I(k_5)$”→“$\beta_j\in Z_{NN}^{1\times1}$, $j\in I(k_6)$”とせんがために，$k_6\geqq k_5$となるが，$Ax=b$ の非負整数同次解(したがって，極小 T インバリアントの極大集合)は変わらないので，$l_6=l_5$である．

② $x\in Z_{NN}^{n\times1}$の一般形；

$x=x_{H6}+x_{P6}\in Z_{NN}^{n\times1}$,

$x_{H6}=x_{H5}$ $(x_{H6}=\sum_{i=1}^{l_6}\alpha_i u_i\in Z_{NN}^{n\times1},\alpha_i\in Z_{NN}^{1\times1},i\in I(l_6))$,

$u_i\in U_6=U_5,\ i\in I(l_6)$,

$l_6:=|U_6|=|U_5|=l_5$,

$$\begin{cases} x_{P6}=\sum_{j=1}^{k_6}\beta_j v_j\in Z_{NN}^{n\times1},\ \beta_j\in Z_{NN}^{1\times1},\ j\in I(k_6),\ \sum_{j=1}^{k_6}\beta_j=1, \\ v_j\in V_6:=\{v_j\in Z_{NN}^{n\times1}\mid Av_j=b,\ j\in I(k_6)\},k_6:=|V_6|. \end{cases}$$

$r=\mathrm{rank}(A),\ l_6=l_5\geqq l_4=l_3\geqq n-r,k_6\geqq k_5=k_4\geqq k_3.$

③ Remarks 6；

(1)レベル6はレベル5を包含しており，差異はレベル6の$V_6=\{v_j\in Z_{NN}^{n\times1},j\in I(k_6)\}$が非負整数特解の極大集合になっていることである．

(2)$k_6>k_5$の例が存在することは，④の例6が示している．

(3)$l_6=l_5$の説明；①の説明を参照のこと．

(4)$x_{P6}=v_j\in V_6(\beta_j=1,\beta_k=0\ (k\neq j,k\in I(k_6))$

の説明；$\beta_j \in Z_{NN}^{1\times1} \subset Q_{NN}^{1\times1}$, $\sum_{j=1}^{k_6}\beta_j = 1$を要請しているので，$x_P$ は$v_j \in V_6$の凸結合であることには変わりはないが，必ず $x_{P6} = v_j \in V_6, j \in I(k_6)$ のごとく $\beta_j = 1$の単項として表わされている．

(5) レベル 6 のU_6 とV_6 は，$\widetilde{A} = [A, -b] \in Z^{m\times(n+1)}$ に[KRÜC87]のアルゴリズム（すなわち，$A \in Z^{m\times n}$ の極小Tインバリアントのすべてを求めるもの．ただし，[KRÜC87]には誤りがあり，[TAKA01-1]では修正がなされている）を適用すると同時に求められる[TAKA01-1]．他方，(U_6, V_6) は，$U_6 = U_5$ ゆえ，レベル5 のV_5からV_6を計算することによっても求められる．このとき，M_0からM_dまでの可到達経路の並列構造を用いても$V_6 \setminus V_5$を決定できるであろう．■

④ [例6]（レベル6のための例題）

[例5]でのV_5の他に，v_7, v_8 をV_6 の要素と考えたことになる．すなわち，$V_6 = \{v_1, \cdots, v_8\}$ は非負整数特解の極大集合であり，$V_5 = \{v_1, \cdots, v_6\}$ である．

$$\begin{cases} U_6 = U_5, \quad l_6 = l_5 = 14, \\ V_6 = V_5 \cup \{v_7, v_8\}, \quad k_6 = 8 > 6 = k_5. \end{cases}$$

$x \in Z_{NN}^{7\times1}$ の分解例として，例5の具体例をとると，

$$x = (2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1)^T = u_{10} + v_8$$

となり，$\alpha_{10} = 1, \alpha_i = 0\ (i \in I(14)$ かつ $i \neq 10)$, $\beta_8 = 1$, $\beta_j = 0\ (j \in I(8)$ かつ $j \neq 8)$ である．また，$x = (2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1)^T = u_{13} + v_7$ でもあり，$\alpha_{13} = 1$, $\alpha_i = 0\ (i \in I(14)$ かつ$i \neq 13)$．$\beta_7 = 1, \beta_j = 0\ (j \in I(8)$ かつ$j \neq 7)$ である．レベル6は，この例のように$x \in Z_{NN}^{n\times1}$の分解または合成が最も簡単になる．■

レベル7　[KRÜC87]

$Ax = b\ (A \in Z^{m\times n}, b \in Z^{m\times1})$ の $x \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1}$ (i. e., $x(q) \in \{0, 1\}, q \in I(n)$)

① $x \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1}$ の存在条件；
レベル6の①に含まれている．

② $x \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1}$ の一般形；

$$x = x_{H7} + x_{P7} \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1},$$

$$\begin{cases} x_{H7} = \sum_{i=1}^{l_7}\alpha_i u_i \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1}, \ \alpha_i \in \{0, 1\}, i \in I(l_7), \\ u_i \in U_7 := \{u_i \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1} \mid Au_i = 0^{m\times1},\ i \in I(l_7)\}, l_7 = |U_7|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{P7} = \sum_{j=1}^{k_7}\beta_j v_j \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1}, \beta_j \in \{0,1\},\ j \in I(k_7), \sum_{j=1}^{k_7}\beta_j = 1, \\ v_j \in V_7 := \{v_j \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1} \mid Av_j = b,\ j \in I(k_7)\},\ k_7 = |V_7|. \end{cases}$$

③ Remarks 7；

(1) $U_6 \supseteq U_7, V_6 \supseteq V_7$ である．$l_6 \geqq l_7$，$k_6 \geqq k_7$.

(2) レベル 7 の特解もレベル 6 の場合と同様に $x_{P7} = v_j \in V_7, \beta_j = 1$ と単項で表わされる．

(3) レベル7は各トランジションを高々1回発火することを許したもとでのM_0 からM_d' への可到達性を考えていることになる．■

④ [例7]（レベル7のための例題）

$U_7 = \{u_1^{(7)}, u_2^{(7)}, u_3^{(7)}\}$,
$u_1^{(7)} = u_9$，$u_2^{(7)} = u_{12}$，$u_3^{(7)} = u_{13}$,
$u_i \in U_6$，$l_7 = |U_7| = 3$.
$V_7 = \{v_1^{(7)}, v_2^{(7)}, v_3^{(7)}, v_4^{(7)}\}$,
$v_1^{(7)} = v_2$，$v_2^{(7)} = v_4$，$v_3^{(7)} = v_7$，$v_4^{(7)} = v_8, v_j \in V_6$,
$k_7 = |V_7| = 4, s_7 = k_7 + l_7 = 4 + 3 = 7$.

この例の generator U_7, V_7 のすべてが第1要素を“1”としているので，レベル 7 の $x \in Z_{\{0,1\}}^{7\times1}$ の例は単独の $u_i^{(7)} (i = 1,2,3)$ または $v_j^{(7)} (j = 1,2,3,4)$ である．しかし，$x \in x_{H7} + x_{P7} \in Z_{\{0,1\}}^{n\times1}$ で x_{H7} と x_{P7} の両者を含む例を示すことは容易である．■

6. レベル0-1, 0-2とレベル1～7のまとめ

レベル0-1とレベル0-2に関しては，基礎事項としての概要が§3にまとめられており，本論文ではレベル0-1はレベル1の，レベル0-2はレベル3の連続緩和問題としてそれぞれ機能している．

レベル1からレベル7までの特徴をまとめると表2のごとくになるが，本論文では同次解の generator のみならず，特解の generator も同時に明示している．この点が本論文の特長の1つ目である．その結果，レベル3とレベル4の間，レベル5とレベル6の間ではそれぞれ特解の表現にのみ差異が生じているが，非負非同次解(すなわち，非負同次解と非負特解の両者)を論じるとき，レベル3，レベル6を提案することの意義（i.e., 必然性）が明らかとなっている．

[KRÜC87]でのレベル1, 2, 3, 4, 5は，同次解だけを論じているが，それぞれ本論文のレベル1, 2, 4, 5, 7に対応している．ただし，[KRÜC87]のレベル 1 では，$u_i \in Z^{n\times1}$，$x_{H1} \in Z^{n\times1}$ としており，[KRÜC87]のレベル3（すなわち，本論文のレベル4）では，$x_{H4} \in Z_{NN}^{n\times1}$ としている．本論文でのレベル1は，レベル 0-1 と対比しやすくするために，[KRÜC87]のレベル1を拡張して定義されている．また，本論文のレベル4は，レベル4での③の(6)で述べたごとく(b)の事実を認識しつつ，[KRÜC87]のレベル3を拡張して定義されている．

[KRÜC87]で，本論文のレベル3, 6を考慮に入れなかったのは，同次解のみを考えていたので，本論文のレベル3と4の間に，またレベル5と6の間に差異が生じなかったためである．

以上のように，本論文では，[KRÜC87]の同次解のみ

表 2　generator u_i, v_j を求める計算複雑度からみた７つのレベル.

Table 2.　Seven levels based on the complexity of calculation for the generators u_i and v_j, where the higher simplicity of composition and decomposition of generators, the higher complexity of calculation for generators (i.e., the higher power of the method used to construct generators).

L ; Level	Homogeneous solution				Particular solution				Complete solution
	α_i	u_i	$U_L = \{u_i\}$	x_{HL}	β_j	v_j	$V_L = \{v_j\}$	x_{PL}	$x = x_{HL} + x_{PL}$
7	$\{0, 1\}$	$Z^{n\times1}_{\{0,1\}}$	Unique $\lvert U_7 \rvert \leqq \lvert U_6 \rvert$	x_{H7} Charact.	$\{0, 1\}$	$Z^{n\times1}_{\{0,1\}}$	Unique $\lvert V_7 \rvert \leqq \lvert V_6 \rvert$	x_{P7} Charact.	$x = x_{H7} + x_{P7}$ $\in Z^{n\times1}_{\{0,1\}}$ Charact.
6	$Z^{1\times1}_{NN}$	$Z^{n\times1}_{NN}$	Unique $\lvert U_6 \rvert = \lvert U_5 \rvert$	x_{H6} $\in Z^{n\times1}_{NN}$	$Z^{1\times1}_{NN}$	$Z^{n\times1}_{NN}$	Unique $\lvert V_6 \rvert \geqq \lvert V_5 \rvert$	x_{P6} $\in Z^{n\times1}_{NN}$	$x = x_{H6} + x_{P6}$ $\in Z^{n\times1}_{NN}$
5	$Z^{1\times1}_{NN}$	$Z^{n\times1}_{NN}$	Unique $\lvert U_5 \rvert \geqq \lvert U_4 \rvert$	x_{H5} $\in Z^{n\times1}_{NN}$	$Q^{1\times1}_{NN}$	$Z^{n\times1}_{NN}$	Unique $\lvert V_5 \rvert = \lvert V_4 \rvert$	x_{P5} $\in Z^{n\times1}_{NN}$	$x = x_{H5} + x_{P5}$ $\in Z^{n\times1}_{NN}$
4	$Q^{1\times1}_{NN}$	$Z^{n\times1}_{NN}$	Unique $\lvert U_4 \rvert = \lvert U_3 \rvert$	x_{H4} $\in Q^{n\times1}_{NN}$ $(\in Z^{n\times1}_{NN})$	$Q^{1\times1}_{NN}$	$Z^{n\times1}_{NN}$	Unique $\lvert V_4 \rvert \geqq \lvert V_3 \rvert$	x_{P4} $\in Q^{n\times1}_{NN}$ $(\in Z^{n\times1}_{NN})$	$x = x_{H4} + x_{P4}$ $\in Z^{n\times1}_{NN}$
3	$Q^{1\times1}_{NN}$	$Q^{n\times1}_{NN}$	Unique $\lvert U_3 \rvert \geqq$ $n-r$	x_{H3} $\in Q^{n\times1}_{NN}$	$Q^{1\times1}_{NN}$	$Q^{n\times1}_{NN}$	Unique $\lvert V_3 \rvert \geqq \lvert V_2 \rvert$	x_{P3} $\in Q^{n\times1}_{NN}$	$x = x_{H3} + x_{P3}$ $\in Q^{n\times1}_{NN}$
2	$Z^{1\times1}$	$Z^{n\times1}$	Base $\lvert U_2 \rvert =$ $n-r$	x_{H2} $\in Z^{n\times1}$	$\beta_j = 1$ $\in Z^{1\times1}$ $j = 1$	$v = v_1$ $\in Z^{n\times1}$ $j = 1$	Unique $\lvert V_2 \rvert = 1$ $j = 1$ $v = v_1$	x_{P2} $= v$	$x = x_{H2} + x_{P2}$ $\in Z^{n\times1}$
1	$Q^{1\times1}$	$Q^{n\times1}$	Base $\lvert U_1 \rvert =$ $n-r$	x_{H1} $\in Q^{n\times1}$	$\beta_j = 1$ $\in Q^{1\times1}$ $j = 1$	$v = v_1$ $\in Q^{n\times1}$ $j = 1$	Unique $\lvert V_1 \rvert = 1$ $j = 1$ $v = v_1$	x_{P1} $= v$	$x = x_{H1} + x_{P1}$ $\in Q^{n\times1}$

を求めるためのレベル１～５を，同次解と特解の両者(すなわち，非同次解)を求めるためのレベル１～７へと自然な形で拡張している．また，更には，同次解と特解の両generatorを同時に求めるための計算法をも提案している．この点が本論文の特徴の２つ目である．これらにより，永年の難問であったP/Tペトリネットの可到達判定問題に状態方程式を用いた一般的な可到達判定アルゴリズムを与えることが可能となりつつある[MATS01-2]．次節では，種々と考えられるレベル4, 5, 6のgeneratorの導出法のうち，P/Tペトリネットの可到達問題に最も応用しやすい計算法の概略を述べる．

7．(U_6,V_6)の求め方とそれから(U_5,V_5)，(U_4,V_4)を求める方法

7.1 (U_6,V_6)の求め方

(1) $\tilde{A}=[A,-b]\in Z^{m\times(n+1)}$に[KRÜC87]のアルゴリズムを適用して，$\tilde{A}$のすべての極小Tインバリアント$\tilde{U}_6=\{\tilde{u}_i\in Z_{NN}^{(n+1)\times 1}\mid \tilde{A}\tilde{u}_i=0^{m\times 1}, i\in I(\tilde{l}_6)\}$，を求める[TAKA01-1]．ここで，$\tilde{l}_6$は,$\tilde{A}$のすべての極小Tインバリアントの総数である．

(2) $\tilde{u}_i(n+1)=0^{1\times 1}$のとき，$\tilde{u}_i\in Z_{NN}^{(n+1)\times 1}$から第$(n+1)$要素，$\tilde{u}_i(n+1)$，を除去して得られる$u_i\in Z_{NN}^{n\times 1}$を求めると，$\{u_i\in Z_{NN}^{n\times 1}\mid Au_i=0^{m\times 1}, i\in I(l_6)\}=U_6$となる．$l_6=:|U_6|\leqq \tilde{l}_6$である．

(3) $\tilde{u}_j(n+1)=1^{1\times 1}$のとき，$\tilde{u}_j\in Z_{NN}^{(n+1)\times 1}$から第$(n+1)$要素，$\tilde{u}_j(n+1)$，を除去して得られる$v_j:=u_j\in Z_{NN}^{n\times 1}$を求めると，$\{v_j\in Z_{NN}^{n\times 1}\mid Av_j=b, j\in I(k_6)\}=V_6$となる．$k_6=:|V_6|\leqq \tilde{l}_6$である．また，$k_6+l_6\leqq \tilde{l}_6$である．

(4) $\tilde{u}_i(n+1)>1^{1\times 1}$である$\tilde{u}_i\in Z_{NN}^{(n+1)\times 1}$はすてる．

Remarks 8;

(1) このとき，$s_6=k_6+l_6$はレベル6の全generatorの数である．

(2) $U_6=U_5=\{A$の極小Tインバリアントのすべて$\}$，$V_6=\{A$の非負整数特解のすべて$\}$であり，このときの任意の非負整数非同次解(すなわち，発火回数ベクトル)$x\in Z_{NN}^{n\times 1}$は§５のレベル6の②のごとくU_6とV_6を用いて最も簡単に表現され，しかもレベル6の③の(4)が成立していることに留意されたい．したがって，P/Tペトリネットの可到達問題にレベル6の表現を用いることは，簡単な判定アルゴリズムを作るためには有用である[MATS01-2]．ただし，U_6，V_6を求めるための計算手数は下位レベルを用いる場合よりも増大すると言うトレードオフがある．

(3) [KRÜC87]のアルゴリズムを$\tilde{A}\in Z^{m\times(n+1)}$に適用するとき，$\tilde{A}\in Z^{m\times(n+1)}$のHermite-Smith正準形を求める際に得られる（レベル２でのgenerator(U_2,V_2)を拡張したもの）$\tilde{U}_2=:\{\tilde{u}_i\in Z^{(n+1)\times 1}\mid \tilde{A}\tilde{u}_i=0^{m\times 1}, i\in I(\tilde{l}_2)\}$を基礎にしている．ここで,$\tilde{l}_2$は$\tilde{A}$に対するレベル2の基底の総数である．($\tilde{l}_2=n+1-r=l_2+1$, $l_2=:|U_2|=n-r$, $U_2=\{u_i\in Z^{n\times 1}\mid Au_i=0^{m\times 1}, i\in I(n-r)\}$, $r=:\mathrm{rank}(\tilde{A})=\mathrm{rank}(A)$)．

7.2 V_6から$V_5=V_4$を求める方法

(1) $v_j^{(6)}, v_k^{(6)}\in V_6(j\neq k)$のとき，support$(v_j^{(6)})$がsupport$(v_k^{(6)})$と >, <, = のいずれの関係をも持たないならば，かつそのときに限り，$\{v_j^{(6)}\}=V_5=V_4$とする．§５の例４～６では，$V_4=V_5=\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}$，$V_6\setminus V_5=\{v_7,v_8\}$である．ここで，与えられた$x=[x(i)]\in Z_{NN}^{n\times 1}$，$i\in I(n)$で，要素$x(i)\neq 0^{1\times 1}$ならば，[support (x)] $(i)=1^{1\times 1}$，$x(i)=0^{1\times 1}$ならば，[support (x)] $(i)=0^{1\times 1}$，として得られるものをsupport$(x)\in Z_{NN}^{n\times 1}$，と呼んでいる．

(2) $V_6\setminus V_5$はV_5の凸結合で与えられる．

(3) $V_5=V_4=\{A$の非負整数基本特解のすべて$\}$である．

7.3 $U_6=U_5$からU_4を求める方法

(1) $u_i^{(6)}, u_j^{(6)}\in U_6(i\neq j)$のとき，support$(u_i^{(6)})$がsupport$(u_j^{(6)})$と >, <, = のいずれの関係をも持たないならば，かつそのときに限り，$\{u_i^{(6)}\}=U_4$とする．§５の例４～６では，$U_4=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，$U_5\setminus U_4=\{u_6,u_7,\cdots,u_{14}\}$である．

(2) $U_6\setminus U_4=U_5\setminus U_4$は$U_4$の非負有理数係数１次結合で与えられる．

(3) $U_4=\{A$の極小台集合(すなわち，初等的)Tインバリアントのすべて$\}$である．

以上のように，(U_6,V_6)から(U_5,V_5)，(U_4,V_4)が容易に得られることがわかる．それぞれのレベルでの非負整数非同次解（すなわち，発火回数ベクトル）は§5のように各generatorを用いて与えられる（すなわち，分解または合成される）．

8. むすび

$Ax=b\,(A\in Z^{m\times n}, b\in Z^{m\times 1})$の$x\in Z_{NN}^{n\times 1}$をレベル0-1から段階的に論じ，$x\in Z_{NN}^{n\times 1}$の一般形とそのgeneratorの具体形を示すとともに，その計算法にも言及した．特に，基本特解を定義し，レベル4～6に非負同次解と非負特解の有限個の非負整数generatorを明示している(その根拠はレベル0-2となっている[MATS00-2])．このように，レベル$L\,(L=4,5,6)$の有限個の非負整数generator$(U_L$と$V_L)$のすべてが容易に求められることは，無限個存在する非負整数非同次解$x\in Z_{NN}^{n\times 1}$に関する

諸性質を考察することを容易にしている．特に，以上の内容はペトリネットの可到達問題に状態方程式を用いた一般的な可到達判定アルゴリズムを与えるために役立つ[TAKA01 -1], [TAKA01 -2], [MATS01 -2].

今後は generator の計算法の具体化し，可到達性判定アルゴリズムへの応用を行いたい．

謝辞

例題の作成や討論に参加した，高島浩二，吉田知弘，稲場邦彦，立川智教，山脇健一の諸君に謝意を表します．

文献

[DESE96] J. Desel, K.-P. Neuendorf, and M.-D. Radola; " Proving Nonreachability by Modulo-Invariants, " Theoretical Computer Science, Vol.153, pp.49-64, 1996.

[FUKA91] 布川,中山,谷野; 線形代数と凸解析，コロナ社, 1991.

[FURU59] 古屋; 行列と行列式, 培風館, 1959.

[HU69] T. C. Hu; Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[KANN79] R. Kannan and A. Bachen; "Polynomial Algorithms for Calculating the Smith and Hermite Normal Forms of an Integer Matrix," SIAM J. Comp.,Vol.8, pp.499-507, 1979.

[KRÜC87] F. Krückeberg and M. Jaxy; "Mathematical Methods for Calculating Invariants in Petri Nets," LNCS, 266, pp.104-131, Springer-Verlag, 1987.

[MATS97] 松本; "ペトリネットのインバリアント基底系の簡易計算法," 信学技報，Vol.97, No.156, pp.13-20(CST97-9), 1997-07.

[MATS98-1] 松本,伊藤,蒋; "ペトリネットの極小インバリアントのすべての求め方について," 信学技報, Vol.98, No.87, pp.31-38(CST98-5), 1998-05.

[MATS98-2] 松本,蒋,伊藤; "ペトリネットの状態方程式の解について，" 信学技報，vol.98, No.87, pp.39-46(CST98-6), 1998-05.

[MATS99] 松本; "コンカレントシステムにおけるインバリアントー展望ー," 信学技報，Vol.98, No.565, pp.51-58(CST98-36), 1999-01.

[MATS00-1] 松本,吉田,高島; "ペトリネットの初等的インバリアントのすべてを線形計画法によって求めるための二,三の考察," 信学技報，Vol.100, No.103, pp.73-80(CST2000-10), 2000-06.

[MATS00-2] 松本,平光,茂呂; "ペトリネットの状態方程式の非負特解について," 信学技報，Vol.100, No.251, pp.1-8(CST2000-11), 2000-08.

[MATS01-1] 松本，高田，平光，茂呂；"P/T ペトリネットの状態方程式の非負整数非同次解の一般形，" 平成 13 年電子情報通信学会総合大会, 2001 - 03.

[MATS01-2] 松本，高田，吉田，茂呂；" P/T ペトリネットの可到達問題の代数的考察，" 平成 13 年電子情報通信学会総合大会, 2001 - 03.

[MATS01-3] 松本, 高田, 平光, 茂呂；" 線形 Diophantine 方程式の非負整数解の GENERATORS とその応用" 信学会，第 14 回回路とシステム(軽井沢)ワークショップ, 2001 - 04.

[MURA92] 村田; ペトリネットの解析と応用，近代科学社，1992.

[NEWM72] M. Newman; Integral Matrices, Academic Press, New York, 1972.

[NIKA61] 二階堂; 経済のための線型数学, 培風館, 1961.

[NIKA68] H. Nikaido; Convex Structures and Economic Theory, Academic Press, 1968.

[TAKA01 - 1] 高田，松本，茂呂；"P/T ペトリネットの状態方程式の解の generator の求め方—極小インバリアントを用いる場合—，" 平成 13 年信学会総合大会、2001 - 03.

[TAKA01 - 2] 高田、松本、茂呂；"P/T ペトリネットの状態方程式の解の generator の求め方—極小台集合インバリアントを用いる場合—，" ibid.， 2001 - 03.