ナラティブの視点と算数・数学の学び：新たな数学観というストーリーを育てる

ナラティブの視点と算数・数学の学び

新たな数学観というストーリーを育てる

西川　満

Ⅰ. はじめに

教師教育研究 11 号で、事実行為としての懲戒についてナラティブの視点での考察を試みた。考えているうちに、ナラティブ・アプローチは、対立を修復し学びに変えるためにだけではなく、学校教育全般の学びに生かせる考え方ではないかと思い始め、オルタナティブストーリーを見つけられそうな気がした。

高校の数学教師になったころ、授業で生徒からよく「数学とは何ですか」「なぜ数学を勉強する必要があるのですか」と尋ねられ困ってしまった。どう答えてみても手ごたえがなく「そのうちわかるよ」と逃げることも多かった。そこで、研修の機会を得て現場を離れ福井大学の教育学研究科でゆっくり考えを深めることにした。そして、高校生が、数学の単位を取るために、大学入試に勝ち抜くために、意欲的に授業に向かい数学の学習と正面から向き合うようになるには、生徒各々の数学観を育てること、つまり生徒自身が数学とはどのようなものかを捉え、それぞれが数学を学ぶことの意味付けを自分なりに見つけることこそが必要なのではとの考えにいたり、その後の授業実践に取り組んできた。

退職して福井大学教職大学院のスタッフとなり、初めてのカンファレンスで、数学教育に対する考え方を問われた際に、「生徒の数学観を育てる」ことが大切だと考えて実践してきたことをこのように話し始めたものの、そのあとに続くべきしっくりとくるストーリーを語れずに困ってしまった不甲斐なさを覚えている。

「主体的・対話的で深い学び」に向けた授業改善が求められるようになり、教職大学院の拠点校・連携校では、各校の研究集会において授業実践研究の成果を公開している。そこで授業者から提案される「主体的・対話的で深い学び」を目指す算数・数学の提案授業を目の当たりにしてその授業改革の新たな挑戦に驚きを覚える日々である。教職大学院や拠点校、教育総合研究所などでの様々なグループセッションに参加し人の話に聴き入りながら、ふっと考え入ってしまう。自分が心掛けてきた「生徒の数学観を育てる」ことと、教職大学院やその拠点校で行われている「主体的・対話的で深い学び」、そして「ナラティブ・アプローチ」の三者が根っこのところで繋がっているのではないか。これらの 3 つの理念を統一し自分の中に位置づけることができるのではないかと思い始め、挑戦してみることにした。心理学や哲学に門外漢である自分にはなじみのない言葉や概念である「Narrative」や「Agency」、「社会構成主義」などについて理解を深められたらと思っている。

Ⅱ. ナラティブの視点と学び

1. ナラティブ・セラピーからの示唆

ナラティブ・アプローチについては昨年の教師教育研究にまとめた。再び同じ言葉を書き写すことはやめ、ここでは渡部昌平准教授(秋田県立大学総合科学センター)のナラティブ・セラピーに関するまとめが簡潔明瞭だと感じたので以下に紹介しておく。

ここ数十年、構成主義または社会構成主義、あるいはナラティブを用いたカウンセリングが急速に拡がっている。ナラティブ・アプローチやブリーフセラピー、解決志向アプローチなどと呼ばれる一群のものである。

ホワイト(2009)などのナラティブ・セラピーでは、まず現在の問題・課題をクライアント自身から切り離す「外在化」という技法を用いる。現在の問題にのめり込み囚われ過ぎるのではなく、問題がある程度客観的に対象化して見ることができるようになる。「クライアントの中に問題があるのはクライアントに責任がある」のではなく、一旦クライアントの外に「問題」を出して、クライアントとカウンセラーとが問題に対する治療同盟をつくりやすくする。そしてその問題に名前を付けることによって、その後の対応をやりやすくしている。問題を「クライアントの外に存在する文脈に位置づけられたもの」として扱うのである。

カウンセリングでは、クライアントの責任に焦点を当てずに、その問題とそれを引き起こす文脈に対処すればいいことになる。そして問題からの影響の相対化、問題が人生に与えた影響の評価、評価の正当性の検討、例外探しなどの手法を経て、新たな人生物語、オルタナティブストーリー作りへと進んでいく。

「新たな人生物語」がわかりやすく面白い表現だと思う。初めてナラティブ・アプローチの本を読んだ時には耳になじみのなかったいろいろな言葉が、今は何かしら親しみを携えて飛び込んでくるように感じる。今回は、ナラティブ・セラピーを教室に取り入れようという方向ではなく、その社会構成主義的な考え方を見てみたいと考えている。まず、国重浩一氏の、『ナラティブ・セラピーの会話術』から、大切だと思われるいくつかの考え方についてまとめ、確認しておく。

(1)ナラティブ・セラピー

人を問題の主たる責任者であると位置づけることを拒絶し、ものごとの「本当の真実」は存在せず、ただそのことを語るストーリーが存在するという立場をとる。そして、その人自身に自分の人生を生き抜いていける資質、資源、能力が必ずや存在しているという仮説を持っていること、つまり、その人には必ずや希望があるのだという信念を持っていることが大切であると考える。

(2)言葉

言葉は単なるコミュニケーションの道具ではなく、ものごとをそのままに示すものでもない。言葉を、私たちの現実を創り出し、私たちの感情や考えを演じることができるパフォーマティブなものであるとみなす。つまり、感情や考えがもともと備わっていて、それを言葉にしていくのではなく、言葉そのものが感情や考えをつくり出していくという発想である。言葉のやり取りを通じて、問題に対する意味付けに変更が加わり、新しい視点が生まれると考える。

(3)ディスコース

近代社会において、私たちは、自分自身と他人を比較するようになってきている。「自分はだれか」を考える時、私たちが利用できる言語の中でしかそれを定義づけることができないので、自分はだれかを考える言葉の意味付けも、文化、時代、そして地域の影響を受けている。私たちは、人生の様々な問題をそこに存在するディスコースによって解釈する。「学校に行くこと」「結婚すること」「離婚すること」「子供を持つこと」などの場面に存在するディスコースはだれもがイメージしやすい。

(4)エージェンシー

多くの問題は、私たちが住む時代、文化、言語などによってつくり上げられ維持されている。私たちは、社会にあるものをただ受容し、再生産することしかできない存在でなく、何らかの可能性を自らの判断で選択し、推し進めていく力、エージェンシーがある存在とみなす。

例えば、「不登校」という問題においては、生徒にとって「学校には行かなければならない」という支配的なディスコースがものすごいプレッシャーになっている。しかしこのディスコースに立ち向かい、「学校に行かなくてもよい」と脱構築し新しい人生物語をつくり始めることもできる。高校は卒業せずとも、高卒程度認定試験に合格して希望するなら大学に進学する生徒もいる。

ある不登校ぎみの生徒の担任になったことがある。出席日数不足でもう一度同じ学年を履修することになった生徒で、新学期が始まっても学校に顔を見せることがなかった。電話であいさつをし、「無理して学校へ来なくてもよいからこれからどうしたいのか考えて教えて」と伝え待つことにした。何度か電話で短く話すことを続けて、「そろそろ電話でなく直接会って聞かせてもらいたいから家庭訪問します」と伝えたところ、「自分のことで来てもらうのは申し訳ないので、学校へ話に行きます」となった。そして、その日から再び登校が始まり、ついには優秀な成績で卒業していった。卒業後一年ほどして「会いたい」と連絡が来て近況を聴きに出かけたことがある。こんなことは全くまれなことで、不思議な出会いを感じた生徒であった。

2．ディスコースとエージェンシー

国重氏は、ディスコースとエージェンシーについて次

のように述べているように読み取れる。

ものごとをどのように理解し、考えていくかは、その人のパーソナリティ、どんな人物かによると考えられていたが、社会構成主義の立場ではこれを否定し、その時代、その地域、その文化に所属する集団によって共有される考え方・価値観・意味付けなどのディスコースによってものごとを理解し考えていくという立場をとる。支配的なディスコースに反して行動することは難しいが、例えば、「時には体罰も必要である」というディスコースが、今では「どんな場合も体罰は許されない」と変わったように、ディスコースは変化するものと理解することが重要である。

「学校に行かない」自分は変だ、おかしい、変わっているという判断しか提供してくれない支配的なディスコースに対して、自分自身や自分の考え方に対して、大義名分を与えてくれるようなディスコースも必ず存在する。自分にとって好ましいディスコースを選択していく力をエージェンシーと呼ぶ。

エージェンシーとは、主体性や主観性と言い換えることもできる。しかし、国重氏には、エージェンシーを「主体性」または「主観性」という訳語に置き換えることにためらいがある。それは、ナラティブ・セラピーが目指している、世の中の常識や、当たり前とみなしている事柄に対しても、挑戦し、自分にとって望ましい方向性を見出していくという領域まで、この「主体性」や「主観性」が伝えてくれるものなのか、確証がないからである。

別の人の言葉を聴いてみよう。『いじめ・暴力に向き合う学校づくり』の綾城初穂氏のあとがきによると、ウィンズレイド教授は、訳者がエージェンシー(行為主体性)の定義について尋ねたとき、これを権力と力への反応(response to the power and the force)だと説明してくれたようだ。人は幼いころには自分がやりたいと思うことが自然にできるものだが、成長していくにつれていろいろな支配的ディスコースの規範に締め付けられ、自由な動きができなくなる。こうした権力の作用に対して瞬間的に出てくる、その人なりの自由な反応、これがエージェンシーだということである。

エージェンシーを仮定しなければ、生徒たちは社会の支配的なディスコースに「適応」という形で従属するだけの、受動的存在ということになってしまう。エージェンシーを仮定するからこそ、生徒たちが自らの力で主体的に「現実」をつくり変えられることを、そしてそれによって対立を乗り越えることを期待できるのである。

3．教育改革における Agency という概念

2018 年 11 月 29 日の至民中学校の「主体的・対話的で深い学び研究発表会」において、福井大学教職大学院の木村優准教授が、「Agency　世界への関与・主体性」と題した講演で、『これからの未来社会を形作っていく子供たちは、自分自身が現在受けている教育を通して、そして生涯を通して、Agency を発揮する必要がある。Agency は「世界に関与する責任」を含む概念である。世界に関与することを通して、人々を、そして様々な出来事や状況を、より良く変える責任を持つことが Agency である。また、Agency には、指針となる目的を打ち立てる能力、一つひとつの目標を達成するための行動を固定する能力が必要となる』と述べている。

また、偶然にもその翌日、11 月 30 日の附属義務教育学校の教育研究集会で、文部科学省の白井俊氏が、「Agency と日本の学校教育」と題し、OECD の Learning Framework 2030 に触れて、Agency という新しい言葉について、「自ら考え、主体的に行動して、責任を持って社会変革を実現していく力」であると述べている。

Ⅲ. 構築主義あるいは構成主義

1．人が問題なのではない、問題が問題なのだ

「人が問題なのではない。問題が問題なのだ」は覚えておくべき大切な言い回しである。ナラティブ・セラピーでは、社会的にどのようにしてそれが問題として成立しているのか、その問題の構築の過程を明らかにし、その問題を解体し、その問題を弱体化させる方法を見つけようとする。

大辞林第三版の解説に、構築主義(constructionism)とは、「事実や現実は人間関係の中でそのつど生成、変形されると考える立場」とある。

また、日本大百科全書(ニッポニカ)に以下のような詳しい解説を見つけた。

現実に存在していると考えられる対象や現象は、客観的もしくは物理的に存在しているのではなく、人々の認識によって社会的に構築されていると考える社会学の理論的立場。社会構築主義、構成主義、社会構成主義ともいう。たとえば、多くの人々は「地球は丸い」ということを体験的に確認しているわけではなく、物理的計算や史実に基づいて共有された社会的な現実として認識している。このように、客観的かつ物理的な現実として存在すると考えられている「丸い地球」も、人々が共有する「地球は

丸いものだ」という認識によって構築された現実として理解される。

ナラティブの考え方は、「社会構成主義（social constructionism)」の考え方と言える。人間社会の価値観は社会的に構築されたものであり、絶対的なものではないので、本人が新たにオルタナティブなストーリーを見つけ出し展開していくことができると考える。

２．社会構築主義的な数学観

「数学とは何か」ということについて考えるのは今回で3 度目である。最初は大学の数学教育の講義であった。「無矛盾・独立・範疇性」とか「三角形の内角の和が 180°でない数学が成り立つ」等々を覚えている。ゼミに参加したり何冊かの本を読み漁ったりしたが、本当にわかっていたとは言えない。赴任した中学校や小学校の授業で、矛盾なくきちんと成り立ち、解がすっきりと求められる問題にばかり慣れてしまい「数学とは何か」あまり気にしなくなっていった。

2 度目は 40 歳のころである。30 歳で普通科高校に初めて転勤し、それからの 10 年間ほどはひたすら数学の大学入試問題を解き、易しい実例を挙げながら丁寧に面白く説明し、練習問題を繰り返して試験でだれもがよい点数を取れるようにと指導していた。しかし、あまり数学が得意でない生徒から、やがて、まじめで熱心な生徒から「なぜ数学を学ぶのか、数学とは何か」と問われることが多くなっていった。そこで福井大学の修士課程に入学し、生徒の質問に何とか答えたいと、眼光紙背に徹すべく先哲の本をめくった。

そして、今回である。38 年間の数学教師を終え、教職大学院で若い教師の希望に燃える日々の実践を聴きながら、ふと自分はどうだったろうと考えないわけにはいかない。細かい文字を読むことに苦労する年齢になったが、幸いに ICT は十分に進化し、このパソコンもインターネットに常時接続されている。楽しい時代になったものである。

「数学とは何か」についてこれまでどのように考えられてきたかについては、V章にまとめた。私は、デービスとヘルシュ氏らによって著された「数学的経験」における結論が気に入っている。

数学は人間がつくった客観的実在である。数学は人間の意味を扱う人文科学の 1 つである。数学では科学らしい一致を達成し、再生可能な諸結果を確立する。一方で人間の意味を扱い、文化の文脈の中でのみ理解可能である。そして、数学は間違えてもよい、間違えたら訂正が可能なものと考えられる。

ユークリッド幾何学は「一直線外の一点を通ってこの直線に平行な直線は 1 本あり、1 本しかない」ことを自明のこととしている。「1 本あり、1 本しかない」と聞いたら、「1 本もない」場合と、「何本もある」場合を考えるのが人間であろう。この考えから、楕円幾何学と双曲幾何学の 2 つの非ユークリッド幾何学が考え出された。宇宙はどの幾何学で語られていると人間は結論付けるのであろうか。

また、多くの人々が、微積分や解析学のもとになる実数について「どの実数も、0 か、正か負のいずれかである」と考えている。しかし、V 章で扱うブローエルの反例の、$Q=\pi-\hat{\pi}$は 0、正、負の何れなのか人間には当分の間述べることができない。だから今のところ「どの実数も、0 か、正か負のいずれかである」としておいて、別の何らかの方法でその間違いが証明されたときに、「どの実数も、0 か、正か、負か、わからないかのいずれかである」と躊躇せず訂正することにしておくのがよさそうだ。

「あるがままの、可謬的、訂正可能で、意味を持つ数学の妥当性」を受け入れたい。生徒には「数学は面白い、数学は間違えるものだ、間違いに気づいたら堂々と直せばよい、正しいとわかれば役に立つ」と平易な言葉で伝えてはどうだろうか。生徒はノートに自分の考えたことや計算、図などを鉛筆で書きながら考えるが、ひとたび教師が何らかの正解を黒板に書き始めると、一斉に消しゴムで自分の考えをごしごしとていねいにしっかり消し去り、板書されたものを一字一句写し取る光景を目にする。私は「消すな」、「あなたの考えたことが大切なんだ」、「数学は、間違えてチャレンジする場だ」と何度も注意せずにはいられなかった。

1976 年に出版されたイムレ・ラカトッシュの『証明と論駁』が、デービスとヘルシュ氏らの社会構築主義的な数学観のきっかけになったと思われる。コーシーによるオイラー公式の伝統的証明から始まる教室での対話である。証明に対して反例が出され、論争が続き、意見が改められ、成長する。骨組みだけに化石化した数学でなく、1 つの問題と 1 つの推測から成長していく数学を、理論が目の前で形成されていく様を、疑問が確信に道を譲りそれからまた新しい疑問に道を譲るさまを、ラカトッシュは示してくれた。「主体的・対話的で深い学び」の手本となる実践と言えるのではないか。

３．教育における構成主義

ウィキペディアは私にとって大変重宝なツールである。

教育における構成主義について、ウィキペディアの言葉に任せたい。

構成主義とは、「学習者たちがある対象について、彼ら自身によるそれぞれ違った理解を組み立てるようなかたちで教育すべきである、あるいは学習者たちの中にすでに存在している概念を前提に授業を組み立てる必要がある」という学習・教授理論を指す。ここでの教師の役目は、学習者がある対象範囲における事実や考えを見つけるのを手助けすることである。

従来の教育では、教師の役割は自分の知識を学習者にコピーすることだった。したがって、学習者は教師から与えられるデータを疑わずにそのまま暗記することが求められていた。何を学ぶかは学校や教師が決めることであり、学習者は教師の指示通りに与えられるものを飲み込み続けていればよかった。社会の構成員が同質で多様性のない時代にはそれこそ効率的な教育方法であり、工員が同じ製品を大量に生産する工場では、まさにそういった均質で代わりの利く人材しか求められていなかった。

しかし、現代のように多様化した社会では、学ぶ意味はそれぞれに違う。また、急速に変化し続ける社会では、教育機関を出た後も常に学び続けていかなければならない。その際、何を学ぶかは自分で判断しなくてはならない。従来の一斉型の画一的な教育方法では、こうした現代にふさわしい人材を輩出することは不可能であるとしている。「なぜ数学を学ぶのか」と高校生が聞くようになったり、構成主義、あるいは社会構成主義が主流になっていったりした理由であろう。

4．オルタナティブなストーリー

「数学観を育てる授業」、「ナラティブでの Agency」、「主体的・対話的で深い学び」の三者が根っこのところで繋がっているのではないかと考察を始め、ここまでまとめてみて、三者の根っことして、社会構成主義・社会構築主義という考え方がかかわっているように思えてきた。自分で問題を見つけ、主体的に話し合いながら、様々なディスコースを疑い、自分なりの目的や価値観、オルタナティブストーリーをつくっていく学びというように意味付けできるのではないか。「効率の良い知識伝達型の画一的な一斉指導」というディスコースを疑い、新たな時代、グローバルな社会をよりよく生きるために、新たなディスコースを見つけ、オルタナティブなストーリーを語り始めることができるかが問題である。

Ⅳ．数学観というストーリーを育てる

1．授業改善の実践例

教職大学院の拠点校や連携校等では着実に「主体的・対話的で深い学び」への授業改善が成果を上げている。私は、先生方が良く練り入念に準備を重ね大胆に実践する面白い授業との出会いを求めて、算数・数学の公開授業には漏らさず参加するようにしてきた。今年度は 7 会場で行われた公開授業に参加し手元に実践記録が残った。2018 年 11 月 16 日の丸岡南中学校、11 月 22 日安居中学校、11 月 30 日の附属義務教育学校前期課程、後期課程と、後述する 3 校である。私自身はもう授業から離れて10年がたつこともあり授業できることをうらやましく思うばかりである。その中から無作為に武生高校、中藤小学校、至民中学校の 3 つの実践を選び授業改善の取組状況について報告しながら、数学観を育てる観点からそれぞれの授業で扱われた「課題」についてふれてみたい。

2．授業者の数学観

武生高校では、2017 年の 2 月に教員の自主的な研究グループ「武生高校授業改善プロジェクトチーム」が発足しこれまで熱心に授業改善に取り組んできた。「毎月 1 回放課後に 1 時間程度の時間、授業実践報告とテーマを決めた研修会を行い、職員会議に 5 分間実践報告をする」、「積極的に授業実践を公開する」ことを続けている。県立高校ではあまり聞かないコミュニティが出来上がっているようだ。

2018 年 11 月 7 日に、武生高校の 2 年生の教室で、メンバーの一人、五十嵐基博教諭の公開授業があった。

課題　無限数列の極限を求め、なぜそのような変形が必要なのかを考え説明する。

がテーマである。まず、予習課題ごとに 4 つのグループに分かれ互いに確認し合う。次に、4 人で構成する 9 つの学習班に戻り、それぞれが担当する課題について説明し合う。最後にクラス全体に発表するという予習型のジグソー法による授業であった。

学習指導案に、教材観・生徒観・指導観が簡潔に記載されていることがうれしく面白いと感じた。この授業の教材観には、「…。無限の概念は直感的には理解できるが、それを用いて極限を求めようとする際、高校までの知識ではきちんと説明しきれない部分が出てくる。それでも大まかなイメージや共通認識を持たせたうえで話を進めざるを得ない分野である。しかし、そこにも様々なルールがあり、そのルールに則って考えていかないと、矛盾

が起きたりおかしな結論にたどり着いてしまったりもする。…。いわゆる「極限の不定形」を考える場合にそのような混乱が起きるので、…。」とある。

指導案に教師の数学観が書かれていることは、参観者にとってとてもありがたい。授業者が数学をどう考えているかを知らずに授業の評価はできない。「観」「概念」「イメージ」など、教師や生徒がそれぞれ自らつくり上げるストーリーであろう。ある生徒は「∞÷∞って駄目なんだよね、だからこうしてから判断すればうまくいくと思う」と言葉にしていた。

数学は人文科学である。私はいつもこのような時に「数学で文学しよう」と掛け声をかけることにしてきた。高校で極限を扱うときは、イプシロンデルタ（$\varepsilon-\delta$）論法を使わずに「限りなく近づく」のように主観的な言葉を使って極限を定義しておくため、生徒同士がいろいろと自分の概念で話ができ、授業が主体的・対話的になることが多い。

３．小学校での主体的・対話的で深い学び

11 月 14 日に中藤小学校の 3 年生の教室で、上田順子教諭による、(2 位数)×(1 位数)の最大値問題を扱う授業が行われた。授業で児童に与えられた課題は次のようなものである。

課題　３つの数字をあてはめて、答えが一番大きくなる筆算を考えよう。

$$\begin{array}{r} \square\square \\ \times\ \ \square \\ \hline \end{array}$$

授業では、まずペアで(2 桁)×(1 桁)の筆算ゲームをする。その後、4 人のグループに分かれ、与えられた数字の組(2, 4, 6)、(3, 5, 7)、(2, 5, 8)のいずれかを選ぶ。その数の組合せで 6 通りの式をつくり、答えの大きい順に一列に並べ替える。そして、気付いたことをグループで話し合い、全体で発表するという展開である。6 通りの式が書かれたカードは、教師の手であらかじめ印刷して用意してあった。

教師の用意したカードが各自に 6 枚ずつ配られると、児童は「早く計算がしたい」と意欲的で、教室は大賑わいとなった。計算が得意でうまくできる児童がほとんどである。やがて黒板にカードが貼られすべての計算結果が出そろった。

3 通りの数字の組それぞれについて、すべての場合を書き上げて観察する面白味がある。最大の場合について考察することは数学の定石である。しかし、単なる計算問題とは異なり、なかなか手ごわい課題である。

児童は、(2, 4, 6)の場合は「4, 8, そして 1 繰り上がって 12 のように 4 ずつ増えている」「2, 4, 6 が 1 の位に 2 回ずつついている」、(3, 5, 7)の場合は「100 の位が 3, 3, 2, 2, 1, 1 となっている」「8 が 1 回だけ出てくる」、(2, 5, 8)の場合は「1 の位が 6, 0, 0, 0, 0, 6 になっている」「100 の位に 3 があったら 1, 2, 3, 4 になるのに」などとそんなことに気が付くのかという様々な考えが出てきて柔らかい頭脳だなあと面白かった。

(2, 4, 6)	(3, 5, 7)	(2, 5, 8)
$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 252 \end{array}$	$\begin{array}{r} 53 \\ \times\ \ 7 \\ \hline 371 \end{array}$	$\begin{array}{r} 52 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 416 \end{array}$
$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 248 \end{array}$	$\begin{array}{r} 73 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 365 \end{array}$	$\begin{array}{r} 82 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 410 \end{array}$
$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 144 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ \ 7 \\ \hline 245 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 200 \end{array}$
$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 128 \end{array}$	$\begin{array}{r} 75 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 225 \end{array}$	$\begin{array}{r} 85 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 160 \end{array}$
$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 104 \end{array}$	$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 185 \end{array}$	$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 140 \end{array}$
$\begin{array}{r} 46 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 92 \end{array}$	$\begin{array}{r} 57 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 171 \end{array}$	$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 116 \end{array}$

一番面白かったのが「どれも DCAEFB になっています」という意見であった。教師の準備したカードの隅に、分類のため小さく書かれていた ABCDEF の記号に着目し、その規則性に一人の児童が気付いたのである。教師はおそらく、すべての数字の組で漏れがないよう同じ規則で掛け算をつくっていったようだ。例えば、組(2, 4, 6)の場合、A 24×6、B 46×2、C 62×4 とし、次に、D 42×6、E 64×2、F 26×4 というリズムで書いていったのであろう。そういうわけで D と書かれたカードに、42×6、53×7、

52×8 と注目すべき計算が現れるのである。

しかしこの意見は惜しくも深まらなかった。そして、児童からこの課題に対する正解は出なかった。

授業を観ていて、自分ならどうするかなあと考えていた。DCAEFB の意見に戻り、D の特徴について考えさせるか。いや、もっと大きな紙に縦の 6 段よりも多い 8 通りぐらいの組合せで書き上げて上段の比較に目が行くようにチャレンジしてみたい。いやいや、体育館に出てすべての数の組合せ、0 を除くなら 84 通りについてやってみようという声が上がるよう子どもをけしかけてみたいなあと大掛かりになっていく。

何らかの予想が提案され、話し合いで成り立たない例がだれからも出てこないとわかっても、すべての場合をやっておかないと証明が必要になる。つまり納得しない子どもが残る。「地図は 4 色あれば塗り分けられるか」という四色問題も、すべての場合をコンピュータのプログラムで調べた結果から成り立つとして四色定理と数学的に認められている。

仕組みはどうなっているのだろう。10>a>b>c>0 として、(10a+b)c, (10a+c)b, (10b+a)c, (10b+c)a, (10c+a)b, (10c+b)a の 6 通りを比較して最大のものを求める問題である。

まず、(10a+b)c－(10b+a)c＝9(a−b)c＞0 から、掛ける数が同じとき 10 の位の数が大きいほうが大きくなるから半分に減り、 (10a+b)c, (10a+c)b, (10b+c)a の 3 通りが残る。

あとはこの 3 つの数の比較だから、運が良ければ 2 回の計算で OK となる。

(10a+b)c－(10a+c)b＝10(c−b)a＜0

(10a+c)b－(10b+c)a＝(b−a)c＜0

以上で、(10b+c)a が最大であることがわかった。つまり、「3 つの数の最大の数が 1 桁の数で、次に大きい数が 2 桁の数の十の位の数であるとき、一番大きくなる」ことが、誰をも納得させる客観的事実となった。このことは再生可能であり、知っていればこのゲームでいつも敗者にならなくてすむ。まだまだ良い証明方法がありそうなのでチャレンジされたい。

中小
× 大
最大値

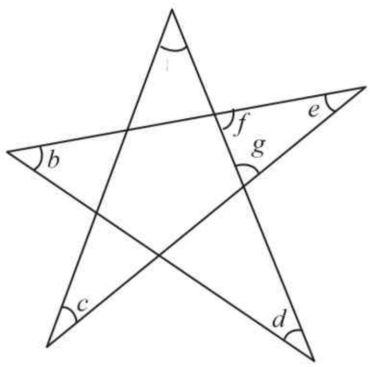
4．中学校での主体的・対話的で深い学び

11 月 29 日に、至民中学校の 2 年生の教室で、堀紘教諭による星形図形の探求の公開授業があった。課題は次のように提示された。

<u>課題　図のような星形の先端にできる 5 つの角の和が何度になるのか、さまざまな方法で説明しよう！</u>

授業の展開は次のとおりであった。まず、ワークシートの図を使って分度器で測り予想を立てる。そして、その理由を最初に個人で考えワークシートに記入する。

「何かいていいかわからん」「それならモデルを示すから」と教師が根拠カードの「三角形の外角はその隣にない内角の和に等しい」を使い、a+c＝g、b+d＝f、f+g+e＝180°から、a+b+c+d+e＝180°となることを図で示す。それではみんなもこれ以外の説明にチャレンジしようと励ました。



根拠カードを参考にしながらしばしの相談で (A)ブーメラン型、(B)ちょうちょ型、(C)平行線の性質、(D)五角形の外角の和の 4 通りでやることになり、4 人の学習グループでそれぞれどの課題に取り組むかを決める。個人で考えた後、別のエリアに移動して同じ考えの人とグループをつくり話し合う。そして、学習班に戻り各自報告するという展開であった。

完成度の高い授業という印象を受けた。教科センター方式の利点を生かして、教室と作業の場を行ったり来たりしながら、具体的な図形を操作しながら話し合いホワイトボードに考えをまとめていくという活動で、数学を考えることに夢中になる授業であった。

生徒の活動する熱気を浴びながら、面白い別解がありそうだと考え始めていた。

(別解１)

いつでも成り立つなら、5 つの角がすべて同じ大きさの時も成り立つことは明らかである。このとき中の五角形は正五角形になるので、

内角の大きさは 540°÷5＝108°、外角は 72°

これより a、b、c、d、e はどれも、180°－72°×2＝36°

よってその和は、36°×5＝180°
と代数的に求められる。このことがわかると、誰もがこのことを一般のｎ（ｎは５以上の奇数）に発展させて表現したくなる。

（別解２）

内角の大きさは、(n－2)×180°÷n

外角は、180°－(n－2)×180°÷n

各頂点は、180°－(180°－(n－2)×180°÷n)×2

これをｎ倍して、180°n－360°n＋(n－2)×360°

などより、星形ｎ角形の角の和は、180°×(n－4)
と表せる。まだまだ我慢できない。

（別解３）

ここで、同じ大きさであるとした初めの仮定を取り払ってしまおう。180°をπと置いて、

中心にあるｎ角形の内角の和Ａは、Ａ＝(n－2)π、ｎ角形の２ｎ個の外角の和Ｂはそれぞれの内角が２回ずつ使われていることを考慮して、Ｂ＝2nπ－2Ａ＝4π

また、ｎ個の三角形の内角の和Ｃは、Ｃ＝nπだから、ｎ個の頂点の和Ｄは、Ｄ＝Ｃ－Ｂ＝nπ－4π＝(n－4)π
となる。

別解には何かしら心配もある。中学生なら十分に深められそうな道筋であるので、客観的事実をつきとめるべく、友人と議論し間違えながらチャレンジして数学をつくっていってほしいものだ。

Ⅴ．数学とは何か

１．数学の定義は変化する

教師は40歳になる頃にだれもが、これまでがむしゃらに取り組んできた日々の教育のことを振り返り、これでよかったのかと考えしばし悩み、「よし」と再び元気に歩き出そうとするようだ。この教職大学院へもそんな年代の先生方が大勢研究にやってきている。その頃に手に取り夢中になって読み、なるほどと納得したデービスとヘルシュ氏らの『数学的経験』をもう一度読み返し、数学とは何かについて再確認することから始めたい。1990年代はMS-DOSからウィンドウズに移っていく頃で、論文の文字データをワープロ専用機で打ち、図や表は専用のソフトで作成してプリントアウトし、はさみと糊でＢ４の紙に貼り、輪転機でわら半紙に印刷、手で袋とじに折り、ホッチキスで止めるという時代であった。その頃修士課程で考え書き留めたデータディスクを読み込むソフトは見当たらず、WORDにコピー&ペーストすることはできない。ちょうどよい機会だと、400頁のずしりと重い本を探し当てた。以下は、再認識のためにまとめてみたものである。「Ⅴ．4.」で社会構築主義的な数学観について述べる。

デービスとヘルシュ氏らは、数学の素朴な定義は「数学は量と空間の科学」であるとし、種々の学派の見解を示しながら定義を修正拡大したいとしている。各世代の数学者はそれぞれ自分の知性(lights)に応じて定義を組み立てるため、数学の定義は変化してきている。

発見されている数学のもっとも古い書板は、紀元前2400年のものである。4000年もしくは5000年の間に数学と見られる実用と概念の広大な実態が出現して、私たちの日常生活とさまざまな具合に結びついてきた。

数学の本性は何か？

その意味は何か？

その関心事は何か？

その方法論は何か？

それはどんな具合に創り出されるか？

それはどんな具合に使われるのか？

それは人間の経験の多様性とどのように適合するのか？

どんな恩恵があるのか？

どんな害が、どんな重要性が、数学に帰せられるのか？

これらの難しい諸問題は、資料の量が莫大でまた関連事項が広汎であるため、それらを要約して並の大きさの書物に圧縮することはもちろん、そのすべてを一人で理解することはだれにも不可能である。数学が無限に複雑で不可思議な世界であることを見いだした彼らとともに「数学とは何か」というこの哲学的命題について考察を始めたい。

まず、数学はどこに存在するか？ 数学の本には知的努力の結果としての数学の明瞭な記録が印刷されている。しかし、本は数学を創造することはないので、数学は人々の心の中に存在するに違いないと考えられる。

どんなに未開な地域であっても何らかの初歩的数学の現れない文化はほとんどない。系統的に西洋数学の主流は、紀元前3000年から紀元前300年のエジプトとメソポタミアに端を発している。そして、現在では、新しい数学を創造しない国は世界中どこにもほとんどない。高校１年生が苦手とする連立方程式、

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

の一般解が、南イラクから出土した紀元前1700年代の楔

形文字文書の粘土板に解かれていることにはとても驚かされる。

試算によると、数学の著作物は重複するものをのぞいて、約10万冊とされる。そしてその著作物を分類すると、数学の分野は3000以上の専門に分かれる。毎年10万個～20万個の定理が新たに公表されている。だれかが合理的に、それぞれの定理を数学的に価値があるかどうか判断し、どの専門分野に分類すべきか判断することは不可能なことのように思われる。

このことは、数学とは何かを考える私にとって、かえって気が楽というものだ。最先端の無数に広がったところはさておき、数学の樹の根幹に目を向けて考えてみたい。

２．３つの標準的教義

モンクによれば、数学者の世界には65%のプラトン主義者と30%の形式主義者、５%の構成主義者が住んでいるらしい。

典型的な現役数学者は、平日はプラトン主義者で日曜は形式主義者としてふるまうといわれている。数学者が数学をやっているときは、自分が客観的実在を扱っており、その諸属性を決定しようと試みていると確信している。しかし、この客観的実在の哲学的説明を求められると、彼はそもそもそんな実在など信じていないというふりをするのである。プラトン主義者と形式主義者は数学の対象が実在するしないに対して正反対の立場にある。多くの数学者はプラトン主義者であると同時に形式主義者でもあるようだ。構成主義者はまれな存在である。

(1)プラトン主義者

宇宙は数学という言語で自分を表現している。数学の諸対象は実在する。それらの存在は客観的事実であって、そのことに対する私たちの知識には全く依存しない。無限集合、非加算無限集合、無限次元多様体、空間充満曲線など、いわば数学という名の動物園にいるものはすべて明確な対象であって、定まった諸性質を持ち、あるものは知られているが、多くは未知である。これらの対象は、肉体的なものでも物質的なものでもない。それらは肉体的経験の時間と空間の外に存在する。それらは不変である。それらは創造されなかったし、変化も消滅もしない。数学的対象についての任意の問いは、私たちが決定できると否とにかかわらず、一定の答えを持つ。数学者は地質学者と同様な経験科学者である。彼は何物も発明できない。なぜならそれはすべてそこに存在するからである。数学者のなしうることは発見することだけである。

(2)形式主義者

いかなる数学的対象も存在はしない。数学は単に、公理・定義・定理から、もろもろの公式からできているに過ぎない。一つの公式からほかの公式を導く規則はあるが、公式は何かに関するものではなくて単なる記号の系列に過ぎないのである。もちろん、形式主義者は、数学的公式が物理的問題に応用されることがあることを知っている。公式に物理的解釈が与えられると、それはある意味を獲得し、真または偽となりうる。しかしこの真偽は特定の物理的解釈にかかわらねばならない。純粋に数学的な公式として、それはいかなる意味もいかなる真理値も持たない。

大学４年生の時の卒論のためのゼミを思い出す。解析学の教授にポテンシャル論に関する論文を読み発表するように指示され、英語と数式に毎晩格闘、ひたすら省略された計算を追いかけ黒板で説明した経験がある。物理学の基本的な力、重力・磁力・電磁力などに関する計算をしているのかなあと思っていたが、具体的なもので試すことはなく、ひたすら計算し結果に間違いなくたどり着こうとしているばかりであった。私は、その期間まさしく形式主義学生として振舞っていたといえるであろう。

プラトン主義者にとって、19世紀に集合論の創始者カントールが提出した連続体仮説は、自分たちの諸公理が実数集合の記述に不完全であることを意味した。それらはすべての真理を語るには十分強力ではなかった。連続体仮説は真か偽かのいずれかであるが、その答えを得るのに自分たちはまだ十分に実数集合を理解していないと考えた。形式主義者にとっては、プラトン主義者の解釈は無意味であった。形式主義者には実数体系などというものは存在しないからである。

・カントールの連続体仮説(Wikipedia)

連続体仮説 (Continuum Hypothesis, CH) とは、整数と実数の濃度である可算濃度と連続体濃度の間には他の濃度が存在しないとする仮説である。19世紀にゲオルク・カントールによって提唱された。現在の数学で用いられる標準的な枠組みのもとでは「連続体仮説は証明も反証もできない命題である」と証明されている。

連続体仮説は真偽が決められない命題であるとゲーデ

ルが証明してしまった。真か偽かの答えがない。困った状態になった。さてどうするか。

⑶ 構成主義者

有限な構成によって獲得できるもののみを真の数学とみなす。実数の集合、任意の無限集合はそのようには獲得できないため、構成主義者はカントールの仮説を無意味な話とみなす。

構成主義については、そしてプラトン主義にとっても、三分法の法則に対するブローエルの実数の反例が有名であり、気に入っている。ブローエルは数学基礎論で直観主義を主張し論理主義と対立した人物である。ブローエルの実数は、次のように定義される。

・ブローエルの実数

πの小数展開を試みた際に、連続して 100 回 0 が続く部分があるかどうかを想定する。ここで一つ目の問題が生じる。

命題 P を「πの小数展開において 100 回連続して 0 が続くことがある」とするとき、命題「P または$\overline{\mathrm{P}}$（P バー）のいずれかが成り立つ」は真か偽か。

排中律の「そうであるか」「そうでないか」のどちらかは成り立つかと問いは単純だが、簡単には答えを述べることができそうにない。

さらに、仮に小数第 n 位からの 100 桁が 0 だったとする。このとき、n が奇数なら新しい実数$\hat{\pi}$（ﾊﾟｲﾊｯﾄ）をπと小数第 n 位まで同じでそこで終わる有限小数と定義し、n が偶数なら n+1 桁目が 1 の有限小数と定義する。もしπが 100 個の 0 の列を含まなければπ＝$\hat{\pi}$である。この状況で、二つ目の問題が生じる。

このとき、Q＝π－$\hat{\pi}$とおくと、Q は正の数か、負の数か、それとも 0 か。

あえて適当に例示すると、次のようなイメージである。

・n が奇数のとき、

$$\pi=3.\overbrace{14\ldots75}^{n-1}\underbrace{00000\ldots00}_{100}2\ldots \quad => \quad \hat{\pi}=3.\overbrace{14\ldots750}^{n}$$

Q＝π－$\hat{\pi}$＞0

・n が偶数のとき

$$\pi=3.\overbrace{14\ldots75}^{n-1}\underbrace{00000\ldots00}_{100}2\ldots \quad => \quad \hat{\pi}=3.\overbrace{14\ldots7501}^{n+1}$$

Q＝π－$\hat{\pi}$＜0

・πが 100 個の 0 の列をどこにも含まなければ、

Q＝π－$\hat{\pi}$＝0

もちろんプラトン主義者は、命題「P または$\overline{\mathrm{P}}$のいずれかが成り立つ」は真であると当たり前に主張するだろう。また、Q は正の数か、負の数か、0 の何れかであることは疑いようのない真実であり、私たちはただそれらを決定する方法をまだ知らないだけであると言うだろう。

構成主義者は同意しない。私たちはπの小数展開の構成法を知っているが、求められるのは小数展開の有限部分であるからだ。構成法の 1 つとしてライプニッツの公式が知られている。

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right)$$

親しみやすい式だが、収束が非常に遅いので電卓ではやってみないほうが良い。さて、命題「P または$\overline{\mathrm{P}}$のいずれかが成り立つ」のは、πの小数展開がすべて求められたときである。完結している必要があるが、私たちには有限の部分しか求めることができない。標準的数学の基本法則である三分法の法則「どの実数も 0 か正か負のいずれかである」についても同様に、すべてが明らかになるまでは、Q はそのどれでもないと主張する。

すばらしく高性能のコンピュータを使ってπの値を、0 が 100 個並ぶところを見つけるまで計算するには、どれだけの時間が必要なのであろうか。人類が存在しているうちに、Q が正か負か 0 のいずれかであること、そのどれであるかを知ることができるのであろうか。そういう事実を考慮せずに三分法の法則が成り立つと主張していると批判できる。この場合、数学的真理は時間に依存するものとなったのである。一般的に、無限集合に関する推論に基づくいかなる結論も、そこに排中律が使われているのなら欠陥があることになる。ここでは、排中律は成り立たず、高校生に便利な背理法は使えない。わからないも正解になるのか。

３．数学基礎論から

周知のように、数学基礎論は、19 世紀末に集合の概念が導入された際発生したパラドックスの解決のために生じたものである。古代ギリシャの頃のパラドックスの例として、命題「クレタ人はうそつきであるとあるクレタ人はいった」は真か偽か、というものがある。この命題が真なら、このことを述べたクレタ人はうそつきとなり、この命題は偽となる…というパラドックスである。

集合論のパラドックスとしては、ラッセルのそれが有

名である。「自分自身を含まない種々の集合を考え、それらすべての集合」をＡとするとき、ＡはＡに含まれるのか、含まれないのかというものである。ＡがＡに含まれるなら定義に反するし、含まれないなら定義に従ってＡに含まれることになるというものである。

数学辞典で数学基礎論を調べてみると、数学とはいかなるものであるべきかという考えに応じて、数学基礎論は発生の初期から、B. Russell の論理主義、L. E. J. Brouwer の直観主義、D. Hilbert の形式主義などに分裂したとある。それぞれについては次のとおりである。

・ラッセルの論理主義

数学は、任意のものや任意の性質について、常に成り立つような事柄を、形式的に、内容とは関係なく取り扱う学問である。数学は論理学の一分科でなくてはならない。

・ブローエルの直観主義

数学的な真理や対象が、数学を考える精神とは独立に存在するとはせず、精神活動によって直接にとらえられるものであるとする。「Ａでない」ことが正しくないからといってＡであるとは認めない。(構成主義)

・ヒルベルトの形式主義

数学を公理系によって規定される形式的な演繹体系と考え（公理主義)、徹底的に形式化された数学の公理系の無矛盾性を証明することによって問題を解決しようとする。

自然数論の無矛盾性の証明などは、ヒルベルトのプログラムに沿っての目覚ましい結果であるといえる。しかし、集合論のいろいろな矛盾に対する正しい答えを見つけ出し、数学の基礎の危機を修復しようと試みたこれらの議論はさほどの成果を上げることなく 40 年ほどで終わり、数学の基礎は確保できなかった。ラッセルは論理主義をあきらめ、ヒルベルトの形式主義はゲーデルの不完全定理によって覆された。ブローエルは数学界から無視された状態で構成主義を説くことになった。

・ゲーデルの不完全定理

第１不完全性定理

自然数論を含む帰納的公理化可能な理論が、ω無矛盾であれば、証明も反証もできない命題が存在する。つまり、ある数学が内部で矛盾していなければ、その数学には解けない問題がある。

第２不完全性定理

自然数論を含む帰納的公理化可能な理論が、無矛盾であれば、自身の無矛盾性を証明できない。

４．社会構築主義的な数学観

それでは、社会構築主義的な数学観について、簡単な作業ではないが、自分なりにまとめよう。まず、現実的な数学的経験から数学の本性に関する 2 つの事実を仮定する。

仮定①　数学は人間の発明である。

数学者は、いろいろな数学を発明したので、数学は人間が発明したと知っている。誰でも知っている算術と初等幾何は、人間のいる所どこにでも、いつもあったように見えるので、神から与えられたように見えるかもしれない。位相数学者によって使用される代数的道具とか、擬微分作用素の変種などは最近発明されたので、私たちは発明者がどのような人たちかを知っている。それらはまだできたての新品であり、私たちはその系図を知ることができる。最新のものから最古のものまで、家族的類似性は紛れもない。代数学と幾何学は、ホモトピー理論と同じように、人間の頭脳から生じた。毎日大勢の教師がこれらを学生の頭脳に浸透させようと骨折っている。

仮定②　数学は神秘的である。

私たちが世界に持ち込んだ幾何学的図形や算術的関数、そして代数的作用素が、それらの創造者である私たちにとって神秘的なことである。それらは大変な努力と技巧を費やして初めて発見できた諸性質を持っている。それらは、努力してもまだ発見できずにいるほかの性質を持っているだろうし、私たちが気付かない諸性質を持っているだろう。

$$e^{i\pi} = -1$$

ネイピア数ｅと虚数単位ｉ、そして円周率πで表現されるシンプルなオイラーの等式はまさに神秘的であろう。

数学の問題を解こうとする活動のすべては、仮定②を根拠としている。形式主義は仮定①の上に建てられている。数学は人間の精神による創造であるという立場である。数学的対象は想念的である。プラトン主義はもちろん仮定②の上に建てられる。プラトン主義者は、数学は私たちが従わなければならない固有の法則を持っているという立場である。そして、プラトン主義の観点からは仮定①は受け入れがたい。数学的対象は人間の精神から

独立した実在なのである。また、構成主義者は仮定②を受け入れがたい。何物も構成的方法で証明されるまでは真ではない。形式主義者には、数学的対象なるものは存在しないので仮定②も存在しない。

プラトン主義、形式主義、構成主義、…、といろいろな見方があり主義があることはわかった。しかし、数学教師は、自分なりの数学観を持って生徒の待つ教室に向かわなくてはならない。矛盾する二つの仮定がともに真であるならば、そのことを受け入れオルタナティブなディスコースとする。そして、二つの仮定を事実と認め、これらの事実を出発点として、新たな数学観のストーリーをつくろう。

事実１　数学は、私たちの創造物である。それは私たちの精神の中の諸観念にかかわる。

事実２　数学は、客観的実在である。数学的対象は発見できたりできなかったりする定まった諸性質を持つ。

創造物としての数学の易しい例を考えてみた。２次元の正方形、３次元の立方体から、私たちは素直に４次元の超立方体を創り出し、１次元は線分かなあ、０次元は点だと考えを深め、n次元超立方体はどんなイメージかなあと思いをはせる。これで例になっただろうか。

客観的実在の例としては、ピタゴラスの定理をあげることができるか。適当な直角三角形を描き、3辺の長さを測る。2辺の長さがa、b、斜辺の長さがcならば、不思議なことに必ず $a^2+b^2=c^2$ となるのだ。

ユークリッド幾何学と、楕円幾何学や双曲幾何学の2つの非ユークリッド幾何学があるが、それらのどの幾何学の数学的対象として宇宙は語られているのであろうかと聞いて考えたことがあるが、未だ結論を知らない。

さて、数学が人間の創造物であり、そして、数学は客観的存在であるという２つの事実を矛盾せず両立させる新たなストーリーはどのようなものであろうか。反証主義の哲学者カール・ポパーが適合する文脈を提供してくれている。ポパーは、物質と精神から成り立っているとする哲学的世界では不十分と考え、世界1，2，3という用語を導入して異なった実在の3つの水準を区別する。

世界１　物理的世界で、質量とエネルギーの世界、星と岩石、血と肉の世界である。

世界２　生物進化の過程の中で出現する意識の世界で、思想、情緒、知覚は非物理的実在である。

世界３　進化のさらに進んだ過程で、社会的意識、伝統、言語、理論、社会制度など人類の非物質的文化のすべてが現れる。ここに数学がある。

数学は、理念的な無時間的実在の研究（プラトン主義）ではない。それはチェスのような既成の記号や公式を使うゲーム（形式主義）でもない。むしろそれは、科学らしい一致を達成し、再生可能な諸結果を確立しうる、人間研究の一部である。数学と呼ばれる主題があることは1つの事実であって問題ではない。この事実の意味するものは、一度理解されれば議論の余地のない、強制的かつ決定的な諸観念に関する推論と議論の諸様式の存在以外の何物でもない。

数学が、人間の共通理解の中に見出されるべきものという点で、イデオロギー、宗教、芸術形式などに似ている。それは人間の意味を扱い、文化の文脈の中でのみ理解可能である。言い換えれば、数学は人文的研究である。それは人文科学の１つである。

数学を他の人文科学から区別する特徴は、それが科学らしい特質を持つことである。その結論は自然科学の諸結論と同じように強制的である。

数学とは何か、なぜ数学を学ぶのかと問い続けここにたどり着いた。必要以上にパラドックスや数学の基礎論に拘泥することはやめよう。数学は人間のつくったもので、客観的実在である。数学は人間の意味を扱う人文科学の１つである。人間がつくってきたあるがままの、間違えてもよい、間違えたら訂正が可能で、意味を持つのが数学だという姿勢で数学と付き合っていきたい。小学校、中学校、高等学校での数学教師としての経験からも、妥当な考え方だと感じる。

Ⅵ. おわりに

今回の考察を進めながら、次のような問題を思いつき育ててみた。考えることは面白い。話し合って決めることは考えが深まる。数学の考え方はいろいろあってどれを採用するかは生徒自身が選択できるというようなことを気付くきっかけになるだろうか。

課題１　1，3，□，7，9，…という数列がある。
　□に入る数はどんな数ですか。

課題２　どう考えるとそのようになりますか。
　グループで考えをまとめ１つ発表しなさい。

解答例

(1)　等差数列(奇数列)で、1，3，$\boxed{5}$，7，9，11，…

(2)　奇数列の3つおきの項を0に置き換えたもので、

(1，3，$\boxed{0}$)，(7，9，0)，(13，15，0)，…

(3)　a(n)=(n−1)(n−2)(n−4)(n−5)+2n−1と考えて、

1，3，$\boxed{9}$，7，9，51，…

最後に、今回の内容に縁のある次の数列を紹介したい。

(4)　次の解答例はどのように成り立っているだろうか。

1，3，$\boxed{6}$，7，9，3，…

答えが問題になった。

課題1のように問う問題をよく見かける。作意は奇数列で$\boxed{5}$と簡単に答えさせたいのだろうと推察される。しかし、等差数列との条件を付けないため、なかなか面白い問題となっている。解答例(1)(2)のように等差数列を含めいろいろな数列を生徒たちは作るだろう。また、4つの点(1，1)、(2，3)、(4，7)、(5，9)を通る写像は解答例(3)の他にもいくつも考えられる。わかっている数の並びから規則を見つけ□に入る数は絶対にこれだとは決定できない。与えられた数の列が1000個だったとしても1001個目からどのようにふるまうかはわかっていない。

解答例(4)は、πの小数展開の中から探してみた。小数第7153桁目からの6つの数字は、136793である。小数第23129桁目から132791が見られる。そしてもちろん、小数第33609桁目から13579が見つけられる。その次の数は残念ながら11ではなく38であった。

グループの構成メンバーの話し合いによってストーリーをつくり多様な数列が表現されることであろう。だから数学を対話する授業は面白い。

昨年の教師教育研究11号でナラティブ・アプローチのことを扱ったが、もう一度本を読んで考えてみたいと思っていた。今回、「生徒の数学観を育てる」ことと「ナラティブ・アプローチ」が、そして、「主体的・対話的で深い学び」を目指した授業改善が、何かしら現在の社会状況によって求められているものではないかと思い始めた。いずれも、簡単に言葉で表現して理解できたり誰もが使える実践マニュアルをつくったりできるものではないとわかっている。

社会構成主義に基づくナラティブ・アプローチでは、「人が問題なのではない、問題が問題なのだ」と考え、問題を外在化して人から切り離し、その問題に潜む支配的ディスコースを明らかにする。そして、エージェンシーを発揮して、別の好ましいディスコースを選び「新たな人生物語」をつくっていく。

数学とは、人間とは別の世界にすでに理路整然と客観的に存在しているもので、人間が少しずつ発見しているものというディスコースを離れ、数学は人間社会の英知が議論して意味のあるものとしてつくり上げてきた社会的活動であると考えていくことにしよう。間違えたら正せばよいし、意味のある役に立つものに、そして美しく面白いものにしていけばよい。プラトン主義的な数学観ではなく、社会構築主義的な新たな数学観というストーリーを育てたい。

これまでは、教師主導の知識注入型の一斉授業こそが、大勢の生徒に正しい知識を効率的にコピーすることができ有効と考えられてきた。こうして獲得した知識はその人の一生を支え、自立した、社会の役に立てる、幸せな人生を送ることができたかもしれない。しかし、グローバルで情報化の進んだ変化の激しいこれからの社会では、学校で与えられた知識だけでは役に立たず、常に学び続ける必要がある。そして新たな仕事を生み出し豊かになること、多様な社会で多様な人々と議論し平和で持続可能な社会をつくっていくことが求められる。そのための「主体的・対話的で深い学び」への授業改善であろう。すでに、挑戦は始まっている。

［参考文献］

ジョン・ウィンズレイド、マイケル・ウィリアムズ　綾城初穂訳(2016)「いじめ・暴力に向き合う学校づくり」、新曜社

J・ウィンズレイド、 G・モンク　小森康永訳(2001)「新しいスクール・カウンセリング―学校におけるナラティヴ・アプローチ」、金剛出版

国重浩一 (2013)「ナラティヴ・セラピーの会話術―ディスコースとエイジェンシーという視点」、金子書房

P.J.デービス、R.ヘルシュ　柴垣和三雄、清水邦夫、田中裕訳 (1986)「数学的経験」、森北出版

渡部昌平著(2016)「社会構成主義からライフ・キャリア適応を考える」、秋田県立大学総合科学研究彙報第17号