数学的リテラシーを育む教材開発：定式化の過程に着目して

福井大学教育実践研究　2017，第42号，pp.137－146

実践報告・資料

数学的リテラシーを育む教材開発
― 定式化の過程に着目して ―

福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻　田　嶋　祥　大
福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻　南　　　芳　邦
福井大学教育学部　西　村　保　三
福井大学教育学部　櫻　本　篤　司
福井大学教育学部　松　本　智恵子
福井大学大学院教育学研究科　風　間　寛　司

本稿は，OECDが提唱する数学的リテラシーを育むための先行研究や実践等から知見を得て，数学的リテラシーを育む教材を開発し，授業実践を行った報告である。特に，生徒が最も困難であると言われているPISA2012での数学的プロセスの一過程である「定式化」に着目し，生徒自らが現実世界の問題を数学の世界の問題に定式化する過程に積極的に関わることで，数学的リテラシーを育むことができると考え，教材開発と授業実践を行い，実践後に見えてきた成果や課題を考察し，まとめたものである。

キーワード：数学教育，数学的リテラシー，数学的プロセス，定式化

1．はじめに

これからの社会は，変化が激しく，予測困難で複雑な社会になることが予測される。このような社会を生き抜く子どもたちを育成するために数学教育としてどうあるべきかについて再検討が求められている。次期学習指導要領の改定に向けた答申（文部科学省，2016）では，「育成すべき資質･能力」を，ⅰ）「何を理解しているか，何ができるか（生きて働く「知識･技能」の習得）」，ⅱ）「理解していること・できることをどう使うか（未知の状況にも対応できる「思考力・判断力・表現力等」の育成）」，ⅲ）「どのように社会・世界と関わり，よりよい人生を送るか（学びを人生や社会に生かそうとする「学びに向かう力・人間性等」の涵養）の三つの柱から整理する必要性について論じられている。

また，数学教育においては，以上の三つの柱に加え，各学校段階を通じて，実社会との関わりを意識した数学的活動の更なる充実が求められている。知識を単に知っているという段階からそれを活用する段階へと学力の質を高め，子どもが将来，時々刻々と生起し変化する課題に自らの経験や知識を活用して対応できる基盤を形成することが求められている（神林，2011）。そのために，基礎的･基本的な知識･技能を身に付けるだけではなく，それを実生活の中で活用したり，応用したりする能力すなわち，「数学的リテラシー」の育成が数学教育として求められている。

福井大学大学院で行っている協働実践研究プロジェクト「数学的リテラシー」では，OECDによる「生徒の学習到達度国際調査」（Programme for International Student Assessment，以下PISAと略す）の枠組みである数学的リテラシーを育むために，PISA調査の示す結果をもとに日本の数学教育の現状と課題を見出し，それを改善するための方策として，PISAの提唱する数学的プロセスを基盤として教材の研究と開発を行っている（前川ほか，2015）。PISA2012調査では，数学的リテラシーに関して，日本の平均点は536点とOECD平均の494点より上位の結果であったものの，質問紙調査においては情意面に関してOECDの平均を大きく下回る結果が示された（国立教育政策研究所，2013）。この情意面に関する調査結果は，2003年から2012年までにいくらか改善しているが，小寺（2007）が「日本の子どもたちは数学の知識や技能の面では世界トップでありながら，数学への興味も応用への関心も乏しい」と指摘するように，子ども達の数学に対する興味・関心を高めていくとともに，数学を応用する能力を高めていく対策を講じる必要がある。

これらのことから，この研究において我々が重視しているのは，現実と数学との結びつきや数学の有用性が実感できるような教材を開発することである。本研究では現実の世界と数学の世界を結び付ける定式化の過程に着目し，生徒自身が定式化することに関わり，さらに生徒自身が今後の問題解決でも定式化を意識して行うことができることを目指して教材開発を行った。

2．数学的リテラシーと定式化
2.1　数学的リテラシーとは

数学的リテラシーの「リテラシー」には，「教養」と

してのリテラシーという伝統的な概念と，「識字」あるいは「読み書き能力」としてのリテラシーという「機能的識字」という概念が含まれている（佐藤，2003）。

一方で，OECD による「生徒の学習到達度国際調査 2012 年調査」（PISA2012）では，リテラシーを「知識の評価だけでなく，熟考する能力や知識や経験を現実世界の課題に応用する能力も含む，幅広い概念」として拡張的に捉え，数学的リテラシーを次のように定義している。

「様々な文脈の中で定式化し，数学を適用し，解釈する個人の能力であり，数学的に推論し，数学的な概念・手順・事実・ツールを使って事象を記述し，説明し，予測する能力を含む。これは，個人が世界において数学が果たす役割を認識し，建設的で積極的，思慮深い市民に必要な確固たる基礎に基づく判断と決定を下す助けとなるものである」（国立教育政策研究所 , 2013）。

また，PISA2012 では，この数学的リテラシーの定義に沿って，現実世界と数学の世界との往還を行う問題解決活動の流れを「数学的プロセス（図1）」と呼び，提唱している（国立教育政策研究所，2013）。

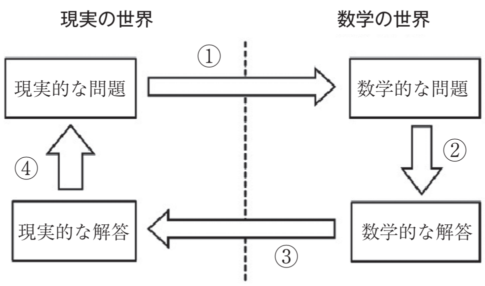

図１．PISA2012における数学的プロセス

数学的プロセスとは，図1に示した4つの過程による問題解決活動のサイクルのことを指す。図1内にある矢印に付された①～④はそれぞれ次のような過程である（国立教育政策研究所，2013）。

①定式化：生徒が数学を使う機会を見つけて特定し，ある文脈の中で提示された問題に対し，数学的構造を与えることである（状況や問題を単純化する，変数，記号，図表を用いて数学的に表現するなど）。

②解決：数学的概念・事実・手順・推論を用いて，数学的に構成された問題を解き，数学的な結論を得ることを示す（統計的データや情報，代数式や方程式，図形を操作する。テクノロジーを含む数学的ツールを使用し，厳密な，あるいは近似的な解を求める助けとするなど）。

③解釈：数学的な解や結果，結論を振り返り，それらを現実世界という文脈の中で解釈する力（数学的に得た結果を現実世界の文脈に戻して解釈するなど）。

④評価：数学的な解や推論を再度問題の文脈の中に戻し，それらが妥当で，問題の文脈の中で意味が通るかどうかを判断すること。（数学的に得た結果や結論が，なぜ与えられた問題の文脈の中で意味を持つのか，あるいは持たないのかを説明する。問題を解くために使ったモデルの限界を，批判的に判断し，特定するなど）。

まず，現実世界の課題として問題を設定する。次に，その問題に対して，定式化・モデル化を行い，現実の問題を数学の問題へと変換する。その上で，問題に数学の公式や定理を適用し，解決することで数学の解を導く。ここで導かれた解に解釈を加えることで，現実の文脈に即した解を得る。最後に，文脈に即した解が最初に設定した問題の解となっているかを評価する。この流れに沿って現実と数学の世界との往還を行うことを数学的活動と捉え，このような授業を行うことは，生徒が数学を学ぶことの楽しさや有用性を感じられる契機にもなると考えられる。

2.2　定式化とは

PISA2012 における定式化については，これまでに様々な先行研究がなされてきている。林（2012）は，三輪（1983）や清野（2004）の数学的モデル化過程を基に定式化の過程に関して，「仮定の設定」と「形式化」の2つの段階に分類している（図2）。「仮定の設定」とは「①現実の問題を数理的に表現しやすくする段階」であり，単純化，理想化，近似などがこの段階にあたるとしている。三輪（1983）は，仮定の設定について，次のように定めている。

> 仮定の設定とは，起こり得る様々な要因を生成，選択しそれらを関連付け，単純化や理想化などをすることで，事象を数理的に表しやすくする段階である

また，「形式化」とは「②それらを実際に数理的に表現することで数学的モデルを作成する段階」であり，数量化，記号化，グラフ化などがこの段階にあたると分類している。①の段階により，事象の本性を歪ませないように仮定を設定する（仮定の設定）ことができれば，②の段階は，形式的に表現する（形式化）ことに留まるために比較的容易になる。

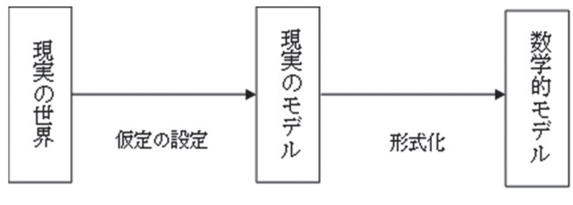

図２．定式化の過程の分類

2.3　現実の世界の問題とは

ところで、定式化を行う以前の問題である現実世界の

問題とは一体どんな問題なのであろうか。

現実の世界の問題は，教科書等にも記載はされている。しかし，教科書等にある問題の多くは，身近な話題を取り上げた数学らしい見かけをしており，すでに定式化がなされている問題であると考えられる。

そこで，本実践研究において，定式化が必要となる現実の世界の問題を，複雑で見慣れない非定型的問題（CUN）（OECD，2015）と捉える。

非定型問題（CUN）とは，「従来の解放では収まりきれないものであり，より真正の場面で数学を用いることを生徒に身に付けさせる上で，一層相応しいもの」（OECD，2015）である。非定型的問題（CUN）を解くためには「伝統的に定まった」知識と技能に基づきつつ，それを上回る高次のスキルも必要であり，この上回る高次のスキルの一つとして，定式化が含まれていると考えられる。このことから，現実の世界の問題を非定型的問題（CUN）として捉えることとした。

2.4　問題提起

PISA 調査における数学的リテラシーの定義からわかるように，現実生活の文脈における数学的問題を認識し，定式化し，数学を活用して解決に取り組むには，数学的プロセスの流れに沿った問題解決活動を普段の授業から行い，数学的リテラシーを育成する必要がある。しかし，三輪（1983）は数学的リテラシーを育むことに対して，現実世界の問題を数学の世界へ持ち込む定式化の段階が最も重要かつ困難であると述べている。すなわち，生徒にとって現実世界の問題を数学的問題に定式化し，モデルを作成することが困難である。

このことを踏まえると，数学を活用する問題解決活動である数学的プロセスにおいて，各過程はどれも必要不可欠な能力であるが，特に児童・生徒が自ら「定式化，モデル化」を行うことができる力を数学的リテラシーとして育む必要がある。その一方で，教科書等にある問題はすでに定式化された数学らしい見かけをした問題が多く，学校数学として数学的プロセスに沿った問題解決活動が行われているとは言い難い。また，生徒が数学的プロセスに沿った問題解決を意識して問題解決活動を行っているのかも疑問である。この問題提起のもと，定式化の過程に着目した問題解決活動を行うことおよび，数学的プロセスを生徒の中に顕在化させること，この2点を実践研究の核とし，数学的リテラシーを育む教材開発を行った。

3．教材開発・授業実践および省察

今回教材として提案するのは「桜の開花日を予想しよう」，「街灯の設置場所を決めよう」の2つである。それぞれ田嶋，南が教材研究と授業実践を行った。本研究では，定式化の過程に着目し，現実の世界の問題を数学の問題に定式化することを生徒自らが行い問題解決することと，また振り返りによって生徒が数学的問題解決の過程を今後意識して問題解決を行えるようにすること，この2点を意識して教材開発を行った。

2つの実践研究では，2.3 節で述べた非定型問題（CUN）を現実の世界の問題として取り上げている。

3.1　桜の開花日を予想しよう（田嶋）

3.1.1　授業構成

3.1.1.1　本実践における定式化

まず，本実践における定式化の過程を，図2で捉えた定式化の過程の分類から整理すると，図3のように捉えることができる。

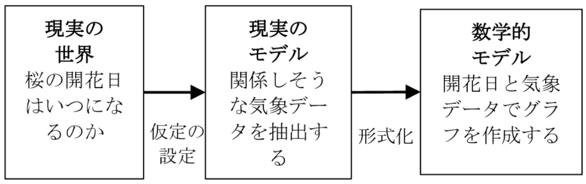

図３．本実践での「定式化」の過程

「桜の開花日はいつになるのか」という複雑で見慣れない非定型的問題（CUN）を現実の世界の問題とする。このような問題を現実の世界の問題とすることで，定式化を行わなければならない必然性を生むことができる。この現実の問題から，「複数の要因から一番関係するものは平均気温である」という“仮定の設定”を行うことで現実のモデルを作成する。さらに，現実のモデルを「散布図を直線とみて，線を引く」という“形式化”を行うことで数学的モデルを作成する。そうすることで，開花日と気温の関係を一次関数とみて予想することできる。

3.1.1.2　数学的プロセスに沿った問題解決

PISA2012 の数学的プロセスの枠組み（図1）から本授業をみると，本授業では，さまざまな気象データをもとに散布図を作成し，開花日に関する要因を見いだすプロセスと，作成した散布図を一次関数とみ，一次関数の式を用いて桜の開花日を予想するプロセスの二つのプロセスで数学的活動を行っていく。従って，次のように本実践を捉えることができる。

【開花日に関する要因を見いだすサイクル】

①桜の開花日を現実世界の課題と捉え，さまざまなデータを散布図に表す。

②散布図の様子（相関関係）から最も関係する要因を考察する。

③桜の開花に関係する要因が「3月の平均気温」であることがわかる。

④桜の開花日と「3月の平均気温」が関係していることから問題を捉えなおす。

【一次関数とみて開花日を予想するプロセス】
①桜の開花日と「3月の平均気温」が関係していることから問題を捉え，散布図に注目する。
②グラフを直線とみて，一次関数の式を求める。
③グラフや式から数値を得て，桜の開花日を予想する。
④ 予想した開花日と実際の開花日を比較する。

数学的問題解決活動の枠組みで見ると，上記のように本実践の活動を捉えることができるが，今回は統計的なアプローチから問題解決を行う。そこで，統計的問題解決活動である PPDAC サイクルから本実践を捉えなおす。PPDAC サイクルとは，日本の SQC（統計的品質管理，Statistical Quality Control）的問題解決のサイクルを模範とした，データに基づく問題解決のサイクルをわかりやすく示したものであり，Problem（身近な課題の明確化）→ Plan（調査・実験研究のデザイン）→ Data（データの収集とデータ表の作成）→ Analysis（データの分析，パターンの発見）→ Conclusion（最初の問題に対する結論と新たな課題の提示）の頭文字をとっている（渡辺他，2012）。このサイクルで本時の問題解決の流れを捉えると，図4のようになる。

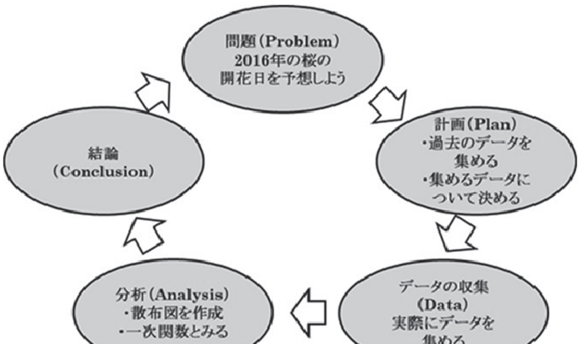

図４．PPDACサイクルからみる教材

Problem（身近な課題の明確化）は，2016 年の桜の開花日を予想するという問題から始まる。次の Plan（調査・実験研究のデザイン）では，過去の開花日のデータを集めること，また開花日に関係しそうな気温や湿度，日照時間等の気象データを集めることを計画する。Data（データの収集とデータ表の作成）では，実際にインターネットなどを利用してデータの収集を行う。Analysis（データの分析，パターンの発見）では，集めたデータから散布図を作成し，一番相関が高い気象要因を選び，一次関数とみて分析を行う。Conclusion（最初の問題に対する結論と新たな課題の提示）では，分析した結果を実際のデータと照らし合わせて評価を行い，さらに 2017 年の開花日はどうなるかという新たな問題を提示する。

3.1.1.3　学習指導要領の視点から

中学校数学における関数の分野には，日常生活や社会には関数関係として捉えられる事象が多く存在しており，実生活や社会と関わりをもった問題解決活動を行うことができる。ポラック（1980）は，「関数は，古典的な応用数学の代表である。」と述べていることからわかるように，社会や産業，科学に現れる様々な問題を解決すること，つまり数学外への応用が重視される領域である。

現行学習指導要領の目標では，中学校第2学年の「一次関数」において，日常生活や社会での具体的な事象から二つの数量の関係を見いだし，考察し表現する力が求められている（文部科学省，2008）。このような目標が述べられている一方で，生徒の“関数的な見方”に関して，風間他（2012），礒田（2015）は，「二変量（伴って変わる）的見方は乏しく，基本的に一変量的である。特に，従属変数に着目し，二項間の差に発展して考える傾向があり，倍の考え方は未分化で適切に表現できない。」と指摘されている。その1つの原因に，教科書等に書かれている問題はすでに定式化がなされ，生徒自らが変数を選択し解決を行う活動を行うことが少なくなり，その結果一変量的な関数の見方がなされていることが多い。つまり，関数領域の指導として多変量から伴って変わる二変量を見いだす活動が少ないことが挙げられる。このことから，学校数学において自ら二変量を抽出する活動を通じて，関数的な見方を会得することが求められる。

さらに，生徒が「未来を見通せる」，「現実不可能な事柄についての予測を行える」といった関数のよさ（南後・田村，2009）を十分に実感できる授業も求められている。実際，どの教科書でも「一次関数の利用」といった題目で，日常事象や自然現象を取り上げた問題を扱っており，関数のよさを学習できるよう工夫されている。しかし，データの数値が作為的であったり，設定された日常事象が限定的であったりするなど既にモデル化された問題がほとんどである。そのため，生徒にとって「一次関数の利用」での問題は，「演習のための問題」となっており，関数のよさを実感することは難しいと考える。すでにモデル化された問題を解くのではなく，非定型的問題（CUN）を扱うことによって，自然現象や日常事象から二変量を抽出することやモデル化すること，つまり自然現象や日常事象を数学の世界に取り込み，一次関数とみて問題解決を行うことを，生徒に取り組ませていく授業を行うことで関数のよさを感じさせる必要がある。

3.1.2　授業実践

本実践は 2017 年3月 15 日，17 日の2コマ（1コマ 50 分）にわたり坂井市立丸岡南中学校2年4組の男子 15 名，女子 12 名の合計 27 名を対象に，特別授業として行ったものである。

授業実践を行ったクラスの数学の授業を見ると，発言は少ないが，問題解決活動に熱心に取り組む姿が見られた。授業実践を行う前に事前アンケートを実施したとこ

ろ，数学に対する情意面はやや肯定的である一方で，数学が現実の世界でどう役に立っているのかなどの活用面の質問には「役に立つのかわからない」など，やや否定的な意見が多く見受けられた。

3.1.2.1　1限目

1限目では，PPDAC サイクルの Problem，Plan，Data の3つの過程について生徒と一緒に取り組んだ。

まず Problem の段階では，4月には入学式があり，校庭の桜がちょうど入学式の日に咲いているかどうか調べたいということから，次の課題を提示した。

【課題】2016 年の桜の開花日を予想しよう

次に，Plan の段階では，「桜の開花日を予想するためには何がわかると良さそうですか」という発問から，桜の開花日，気温（最高気温，最低気温，平均気温）や降水量，日照時間，湿度といった気象要素の 2016 年までのデータがあると予想できると生徒とともに考えた。また，集めるデータについては，3月の福井で，2007 年～2016 年までの 10 年間のデータを集めるといいのではないかと生徒と相談しながら，合意形成を行った。

Data では，グループごとにパソコンを使い，インターネットを利用してデータの収集をさせたかったが，時間の関係上行うことができなかった。そのため，スライドを使いながら教師の方で演示しながら，データの収集を行った（図5）。

図５．データの収集

3.1.2.2　2限目

2限目は，1限目の続きで，残りの PPDAC サイクルの過程である Analysis，Conclusion を各グループに分かれて行った。

Analysis では，まず前時に生徒と決めたについて振り返ったあと，教師の方で収集した桜の開花日と5つデータ（平均気温，最高気温，最低気温，降水量，日照時間，湿度）を 20 年分表にまとめて配布した。生徒は，その表の中から桜の開花日と5つの気象要素から関係しそうな気象要素を4つ絞り，各グループで手分けして4つの散布図の作成を行った（図6）。

図６．話し合いの様子

その後，得られた散布図からどの気象要素が一番桜の開花に関係するのかについて分析を行った。散布図の相関関係はまだ学習していないため，教師がグラフ上の点の集まり方に着目し，直線に集まっているグラフが関係性の強いグラフであり，点が散らばっているグラフが関係性の弱いグラフになることを伝えた。この関係性からグループごとに関係性の強い気象要素は開花日と平均気温であると判断し，教室全体で点の集まりを一次関数とみなすこととした（図7）。

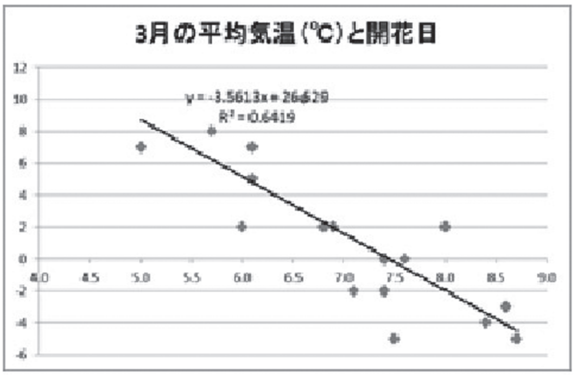

図７．桜の開花日と平均気温の散布図

Conclusion では，時間の関係上最後まで行うことはできなかったが，開花日と平均気温との関係式を求め，求めた式に 2016 年の3月の平均気温（8.4℃）を代入することで，開花日を予想することができる。また，2016 年は去年の開花日であるため，実際の開花日と比較し，予想した値と実際の値では少々のズレが生じることも確認した。そのズレは直線の引き方を大体点の集まりの真ん中になるように引いたため，その分の誤差があると説明した。最後に，求めた関係式を用いることで「2017 年の桜の開花日を予想する」という新たな課題を提示して授業を終えた。

3.1.3　考察

今回の実践研究では，以下の観点で教材研究を行ったため，その観点から考察を行う。

（1）定式化の過程に着目した問題解決活動を行うことができたか （2）数学的プロセスを生徒の中に顕在化させることができたか

（1）に関しては，今回の実践では生徒にとって定式化を意識することができてはいなかったと思われる。この授業において，生徒は既習事項をもとに手探りではあったが，解決策を考えていた。だが，生徒が示した解決策のほとんどは「これまでの開花日を調べる」，「開花日の平均を取る」「桜の開花に適した温度を調べる」といったものであった。実践前に理論をもとに考えていた「仮定の設定」に関しては，行うことはできていたように思えるが，生徒にとっては，これが仮定の設定を行っているという意識は全くなかった。

生徒が意識できていなかったことの理由の1つとして，統計的問題解決において，仮定の設定がわかりにくいからではないかと考えられる。仮定の設定は，たとえば，単純化やモデル化する場合の例では「道を長方形とみなす」，「道の凸凹は考えない」などがあり，現実の世界の事象を仮定して考えていることがよくわかる。一方，本実践における「さまざまな事柄の中から桜の開花に関係しそうな要因を取り出す」という仮定の設定は，これまで行ってきたものと異なっており，意識しづらいという点があった。

この授業においての「定式化」をもう一度考察すると，「複数の要素から一番関係するものは平均気温である」という情報の抽出を行うことで仮定の設定を行い，「散布図を直線とみて，線を引く」という形式化を行うことで数学的モデルを形成している。すなわち，授業実践前に考えていた定式化の過程（図3）は，図8のように修正される。

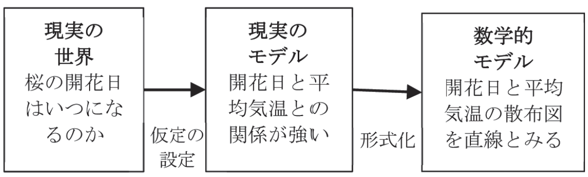

図８．本実践における「定式化」（改訂）

（2）に関しては，実践において統計的問題解決活動を行ったため，問題の解決後に，数学的プロセスの図（図1）ではなくPPDACサイクルの図（図4）を示すことにより，数学的プロセスを生徒の意識に顕在化させることを試みた。

生徒の授業後のアンケートの自由記述では，「数学で学んだことを使えば，いろんなことを予想できると思った」といった数学を活用することへの意識の変化は見られた一方で，自由記述や授業の様子から，数学的プロセスの顕在化はできていないと考えられる。時間の都合上すべての過程を行うことができなかったということもあるが，本実践では生徒が主体的に問題解決に関与しているとは言い難かったという面もある。理由として，次の問題解決のプロセスが教師の頭の中にしかなく，生徒は「教師が言ったからやってみよう」という程度しか考えていなかったのではないだろうか。また，生徒たちはこれまで，データに基づく統計的問題解決を行ったことはなく，先が不透明なまま問題解決を行っていくしかなかった。本実践では，先に問題解決の過程を説明することが適していたと考えられ，生徒も次のプロセスを意識した問題解決が必要であった。

この問題を解決するためには，PPDACサイクルの流れに沿った統計的問題解決活動を何度も経験することが必要である。中学校3年間を通した統計教育を考え，中学校1年生の資料の活用の時間に少なくとも1回はこのような活動を経験することが必要であると思われる。

3.2　街灯の設置場所を決めよう（南）

3.2.1　授業構成

3.2.1.1　本実践における定式化とその価値

本実践における問題は次のとおりである。

> 【問題】
> 中学校の先生たちは会議で町の安全について話し合っていました。町には街灯が一本もない三角の公園があります。暗くなると危険なので街灯を設置することにしました。街灯は予算の都合上，一本しか設置できません。街灯はどこに設置すれば良いでしょうか。

この問題における定式化の過程を，図2で捉えた定式化の過程の分類から整理すると，図9のように捉えることができる。

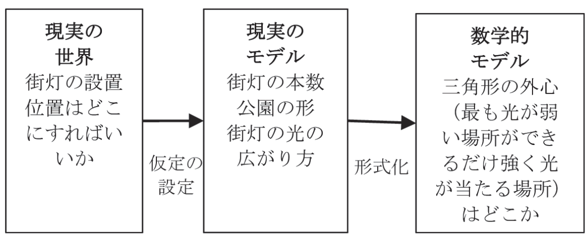

図９．本実践での「定式化」の過程

問題集のように数学の問題が先にできあがっているということは本来であればあり得ないことである。現実には，問題意識が生まれ，その問題を解決するために徐々に条件を特定したり仮定したりするなど定式化することで初めて数学の問題ができあがる。本実践においては，実践を行った学校の周辺で街灯が設置されていない道を写真で見せ，危険であることを指摘し，街灯を設置し安全に通行できるようにすることを意識させた。街灯をどこに設置するのが一番良いのか。それを決めるためにはどのような条件が必要なのか。街灯の本数は何本で，公園の形はどのような三角形なのかといった仮定の設定を行い，一番良い場所を数学的に定義した上で，その「一番良い場所」を，数学用語である外心（最も暗いところを最も明るくするため一番良い）などを用いて表すというような形式化を行うことによって初めて数学の問題ができあがり，数学を用いて解決することができる。

教科書や問題集を用いた授業では，できあがった問題を解くことで問題を解く速さや正確さばかりが重視され，現実の問題場面に出会ったときに数学を用いた問題解決ができるかどうかを問われることがない。数学を用いるためには数学を用いることができる形にしなければならないということを定式化の過程を体験することで知り，定式化の必然性を理解することができる。

3.2.1.2　数学的プロセスに沿った問題解決

本実践における問題は PISA2003 年調査の問題をもとに作成している。元の問題は次のとおりである。

> 問題例1：街灯
> 町議会は，小さな三角形の形をした公園に一本の街灯を設置することを決定しました。その街灯は公園全体を照らすものとします。街灯はどこに設置したらよいでしょうか。
> （国立教育政策研究所（2004）p.19 より）

この問題を数学者が問題解決した時の過程の一例は，次のように挙げられる。

> ①現実に存在する問題から出発すること。街灯を公園のどこに設置するか。
> ②数学的な概念によってその問題を構成すること。公園の形を三角形と表現することができる。また，街灯についている1個の電灯の明かりは円で表現することができるので，街灯は円の中心にあることがわかる。
> ③問題のどの主要点が重要であるかを仮定したり，一般化したり，定式化したりするなどの過程を通じて，徐々に現実の形を整えていくこと。この問題は外接する円の中心を求める問題に変換される。
> ④数学的な問題を解くこと。三角形に外接する円の中心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点であるという事実を使うために，三角形の二辺の垂直二等分線を引く。二つの二等分線が交わった点が円の中心である。
> ⑤現実の状況に即した形で数学的解答を解釈する過程。発見したことを，現実の公園に関係づけてみる。そして，この解答について熟考し，例えば，公園の角の一つが鈍角である場合，街灯の位置は公園の外になるので，この解答は妥当ではないことを認識する。公園の中にある樹木の位置や大きさが，数学的解答の有用性に影響するほかの要因であることを認識する。

①，②にあるように，PISA の問題においても定式化に着目していることがわかる。しかし，PISA は紙面調査であるため，①は出題者が決め，②もどのような要素が必要でどのような値をとるのかが出題時に決められている点で本来の過程とは離れている。④は従来の授業でも意識されていた過程ではあるが，③，⑤は非定型的問題（CUN）を扱った経験がないと難しい。なぜなら，すでに過不足なく定式化された数学の問題を解くときには，数学的な答えを得ることが求められているからである。定型的な問題においては，現実の評価を求められる場面はせいぜい方程式の解の吟味程度である。一方，非定型的問題（CUN）であれば，問題に対し自分で仮定を立て数学的な問題にする必要があり，数学的な問題にする過程で現実とのずれが起こるため，数学の問題として問題を解いた後に現実的な問題と解答を突き合わせる評価が必要となってくるのである。従来の定型的な問題では④の過程だけが重視されるのに対して，非定型的問題（CUN）では①から⑤の問題解決の過程の全てが重要となってくる。

その一方で，これまで定式化をあまり行ったことない生徒にとっていきなり定式化を行うことは困難であると考えられる。そこで，授業実践では，公園の定式化を行う前に，生徒に定式化とはどういったものなのか経験させるために，道を長方形とみるという定式化を行う問題を1限目に取り上げ，2限目では「道でなく公園であったら」と条件変更を行い，公園を三角形と定式化を行う問題を取り上げることとした。

3.2.2　授業実践

本実践は 2017 年3月 13 日, 16 日の2コマ（1コマ 50 分）にわたり坂井市立丸岡南中学校第一学年の 32 名を対象に，特別授業を行ったものである。

生徒は本実践のテーマである定式化はほとんど行ったことがない状況であった。そのため，教師が先導して問題を設定させ，その活動を振り返り，その後生徒が主導して問題を設定し，解くという流れを取った。

結果として，現実の問題を数学で解くことや生活の役に立つ，問題の設定の仕方がわかったという肯定的な意見が出た一方で，今回の活動で何をしているのかわかっていない生徒や重要性を理解できなかった生徒もいた。

3.2.2.1　1限目

1限目では，PISA の数学的プロセスを教師が先導しながら体験させ，その体験をパワーポイントのスライドで振り返った。

まずは学校周辺の夜の写真を見せ，真っ暗な道があることを示した（図 10）。

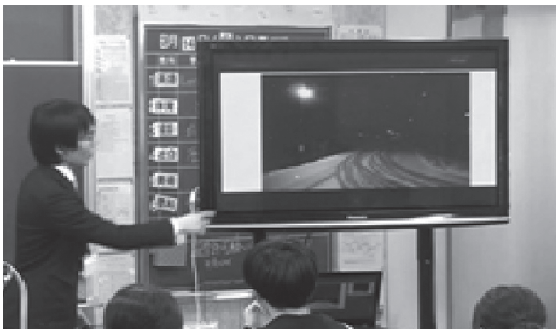

図10. 問題場面の提示

その写真の場所は生徒たちの通学路でもあり，街灯がないのは危険なことであると共有し，次の問題を提示した。

> 中学校の先生たちは会議で町の安全について話し合っていました。町には街灯が一本もない道があります。暗くなると危険なので街灯を設置することにしました。

この問題は現実世界の問題としてあるだけで，何を求めるのかどのような条件があるのかが明記されていない問題である。

この不完全な問題を数学の問題にするために，「何を求めなければならないか」，「それを求めるためにはどのような条件が必要か」と発問し，「街灯の設置場所」という求めるものが生徒から出され，それを求めるための条件としては道の形，光の照らし方が出てきた。そこで，道の写真と光を照らしたときの形を見せ，道は長方形とし，光を照らしたときの形は円で外に行くほどだんだん暗くなると定めた。ここで授業者は問題を解くための条件として街灯の本数も出てくると予想していた。本実践では街灯の本数は出てこなかったが，定式化の必要性を認識させるため，本数を全体で共有せずに問題を解かせた。

それぞれの生徒が自分で決めた街灯の本数を決め，考えさせた後に2名の考え方を発表させ，全体に共有させた。1人は「街灯を3本設置すると」と仮定し，もう1人は「街灯を8本設置すると」と仮定しており，街灯の設置本数によって問題が変わってしまうことを確認した。そこで街灯は一本だとどうなるだろうかと提案し最終的に次の問題に定式化された。

> 中学校の先生たちは会議で町の安全について話し合っていました。町には街灯が一本もない長方形の道があります。暗くなると危険なので街灯を設置することにしました。街灯は予算の都合上一本しか設置できません。街灯はどこに設置すればいいでしょうか。

この問題を考えさせた後，2人の考えを発表させて，全体に共有させた。1人は道の中央に置いた生徒，もう1人は道の端の中心に置いた生徒である。この2人の生徒の考えのそれぞれ価値を認めた上で，現実場面に解釈し評価するとどうなるのかを問うことで，車が通る場所なら道の中央は難しいが，歩行者だけの道ならば中央がいいと結論付けた。

3.2.2.2　2限目

2限目は，1限目の教師先導の数学的プロセスに対し，生徒主導の数学的プロセスに切り替えた。まず，現実の世界の問題としては1限目と同じ状況を用い，数学的なモデルも同じものを用いた。ただし，数学的なモデルの一条件（道の形，街灯の本数）を生徒たちなりに変える活動を取り入れた。ここでは形が長方形ではなく，もしも三角形なら，五角形なら，L 字の形をしていたらといった変更を行った。街灯の本数は一本ではなく，もしも二本なら，三本なら，といった変更を行った。ここで，形の変更に着目し，多角形において特殊な形である三角形の問題に着目して問題を解いた。また，三角形の道は現実ではないと考えられるため，道ではなく公園ということにした。最終的な問題は次のとおりである。

> 中学校の先生たちは会議で町の安全について話し合っていました。町には街灯が一本もない三角形の公園があります。暗くなると危険なので街灯を設置することにしました。街灯は予算の都合上一本しか設置できません。街灯はどこに設置すれば良いでしょうか。

この問題に対してほとんどの生徒が鋭角三角形の公園を考え，街灯の位置として三角形の外心を数学的な解答としていた（図 11 左）。一人の生徒が鈍角三角形の場合どうすればいいのか困っていたので，この疑問を全体で共有させた（図 11 中）。鈍角三角形の外心は三角形の外に出てしまうためどのような解決方法があるのかという課題を全体で共有したところで授業は終了した。なお，鈍角三角形の場合は，最も長い辺の中点が数学的な解となる（図 11 右）。

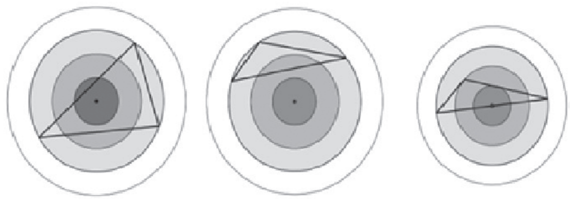

図11．三角形の外心

3.2.3　考察

今回の実践研究では，以下の観点で教材研究を行ったため，その観点から考察を行う。

> （1）定式化の過程に着目した問題解決活動を行うことができたか
> （2）数学的プロセスを生徒の中に顕在化させることができたか

（1）に関しては，定式化の過程に着目した問題解決活動の場面は主に三点あったと考える。一点目は，1限目の，条件が足りていない状況での問題解決活動によって自ら問題を定め，そして問題の定め方によって問題の答えが違うことを共有できたこと。二点目は，2限目の条件を変更して問題作成をする場面で，いろいろな条件からひとつを選ぶことにより，条件に幅があることを確認できたこと。三点目は，2限目の三角形を自分で決め

る場面である。ある生徒は直角三角形，ある生徒は鈍角三角形といろいろな条件を自ら決め問題解決に取り組むことができていた。

（2）に関しては，問題の解決後に実際に数学的プロセスの図（図1）をスライドで提示し，問題解決の流れを振り返ることで生徒の意識に数学的プロセスを顕在化することを試みた。その上で，そのあと何度か，数学的プロセスを図で示し，生徒たちの問題解決活動と対応させ，振り返った。

しかしながら，生徒の授業後のアンケートの記述や授業中の様子から，顕在化はできていないと考えられる。その原因として，授業の構成に一要因があると考える。今回の構成は教師が数学的プロセスや定式化に対する理解を深め，段階を踏ませながら生徒に体験させるという構成であった。この構成では，生徒は数学的プロセスによる問題解決の中だけで考えることになり，普段の授業で生徒たちが行ってきている問題解決の過程と比較することがない。新しく学んだことをはっきりと理解するためには，何かと比較するという方法をとることがしばしば行われる。たとえば，金子他（2002）であるように，比例に対して反比例，三角形と四角形のように比較することで理解が深まるのである。今回の実践では数学的プロセスのみを取り上げ，普段の授業の解決過程と何が違うのかは取り上げていなかった。そのため，改善案としては，定式化が必要な今回の問題を定式化がすでになされている普段の問題（教科書にある幾何的な問題など）と比較させることで，今回の授業の新しい点が引き出されるのではないかと考える。

4．終わりに

三輪（1983）が述べるように，定式化が重要かつ困難であることに着目し，現在の教科書等に載っている問題では定式化を行う力が生徒には育まれないのではないかという疑問から今回の実践を行った。

定式化の過程に着目した問題解決活動を行わせることと，数学的プロセスを生徒の中に顕在化させることを核として教材を開発・実践を行ったが，そのことで見えてきた課題を二点挙げる。

1. 生徒は，統計的問題解決や数学的プロセスに沿った活動を行うことはできるが，メタ認知的に活動を見取ることは難しい。
2. 統計的問題解決や数学的プロセスに沿って生成された問題が，作った生徒の学年や学力で解ける範囲とは限らない。

1.に関して，田嶋は学年をまたいだリテラシーの育成を，南は比較を用いた数学的プロセスと普段の授業の問題解決のプロセスの捉えなおしを提案する。

2.に関しては，必ずしも悪いこととは限らないが課題として挙げる。3.1節の田嶋の実践では問題を解決するための表の書き方や点を取り方などに困難が見られた。一方で，新しいグラフの書き方や，植物という理科と関連付けた問題の定式化といった成果もみられた。3.2節の南の実践でも公園の形が五角形など，中学生には解けないであろうと思われる問題が出てきた。一方で，問題へ生徒が関与することで問題の条件の構造や範囲について触れることができた。

参考・引用文献

文部科学省（2016），「幼稚園，小学校，中学校，高等学校および特別支援学校の学習指導要領等の改善および必要な方策等について（答申）（中教審大 197 号）」<http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/news/20080117.pdf>

神林信之（2011），「教材構成の力を鍛える」，晃洋書房

前川友樹，石田亜子，桑原佑輔，西村保三，櫻本篤司（2015），「数学的リテラシーを育む教材開発―数学教育の現状と課題を捉え直して―」，福井大学教育実践研究 40，pp.93-104

国立教育政策研究所（2013），「生きるための知識と技能：OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）2012 年調査国際結果報告書」，明石出版

小寺隆幸（2007），「市民のリテラシーとしての数学 現実世界を読み解くひらかれた数学教育」，小寺隆幸・清水美憲，「世界をひらく数学的リテラシー」，明石書店，pp.12-37

佐藤学（2003），「リテラシーの概念とその再定義」，日本教育学会，教育学研究 70（3），p.292

林秀和（2012），『「仮定の設定」を重視した数学的モデル化教材の必要条件』，日本数学教育学会，第 44 回数学教育論文発表会（上越教育大学），pp.243-248

三輪辰郎（1983），「数学教育におけるモデル化についての一考察」，筑波数学教育研究，第2号，pp.117-125

清野辰彦（2007），「学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する研究―『仮定の設定』に焦点をあてて―」，日本数学教育学会誌臨時増刊　数学教育学論究 87，pp.5-11

OECD 教育研究革新センター（2015），「メタ認知の教育学　生きる力を育む創造的数学力」，明石出版

渡辺美智子，椿広計編著；安藤之裕他（2012）　問題解決学としての統計学：すべての人に統計リテラシーを，日科技連出版社

ポラック，H.O.（三輪辰郎・川越一夫訳）（1980），「数学と他の学科との相互作用」，数学教育国際委員会編（数学教育新動向研究会訳），世界の数学教育 その新しい動向，pp.299-320，共立出版株式会社

文部科学省（2008），「中学校学習指導要領解説数学編」，文部科学省

風間寛司他（2012），「教えたくなる数学学びたくなる数学～思考力・判断力・表現力を育成する教材解釈・

構成～」，考古堂，pp.136-137
礒田正美（2015），「算数・数学教育における数学的活動による学習過程の構成：数学科原理と表現の世界，微積への数量関係・関数領域の指導」，共立出版
南後とも子，田村みどり（2009），「現象を関数とみなす活動を通して数学を活用する力を育てる学習指導の研究」，鳥取大学数学教育研究　第12巻　No.5，
国立教育政策研究所（2004），PISA2003年調査　評価の枠組み　OECD生徒の学習到達度調査，明石書店
金子忠雄他（2002），「学びの数学と数学の学び―参加・協同と「生きる力」の実現を求めて―」，明治図書，p.32-33

Development of Teaching Materials for Nurturing Student's Mathematical Literacy,
—Focusing on the formulation—

Shota TAJIMA, Yoshikuni MINAMI, Yasuzo NISHIMURA, Atsushi SAKURAMOTO, Chieko MATSUMOTO, Hiroshi KAZAMA

Keywords：mathematics education, mathematical literacy, mathematical process, formulation