数学探求コンテストにおける情報機器の活用事例：ふくい理数グランプリ(高校・数学)の実践より

福井大学教育実践研究　2017，第42号，pp.1－8

実践論文

数学探求コンテストにおける情報機器の活用事例
― ふくい理数グランプリ（高校・数学）の実践より ―

福井大学教育学部　西　村　保　三

近年，学校教育において情報機器（ICT）の有効な活用が検討されている。特に数学科においては，問題解決を支援する道具としてICTを数学的活動に用いることが重要視されているが，多くの学校現場では，演示的なICT利用に留まっており，生徒自らが主体的にICTを活用して，数学の探求活動を行うような実践は少ないのが現状である。本稿では，福井県教育委員会が開催している中高生を対象とする理数系科目の競技大会「ふくい理数グランプリ」におけるICTを活用した数学の探求活動の事例を紹介する。

キーワード：ICT教育，数学的活動，暗号，円板被覆問題

1．はじめに

近年，学校教育で情報機器（ICT）の有効な活用が検討されている。これまでICT教育は，情報機器に詳しい一部の教員による先進的取り組みとして進められてきた側面が大きく，一般の教室に十分普及したと言える状況にはなっていない。今日でも，学校教育で標準的な情報機器の活用形態は，パソコンとプロジェクタあるいは書画カメラによる演示的な利用のレベルに留まっている。これに対して，特に数学科では，問題解決の道具としての情報機器の活用が重視されており，日本学術会議(2016)においても，ICTを算数・数学の探求ツールとして利用することを念頭においた教育課程の編成が提言されている。そこではICTを，数学的に考え，判断する際のツールとして位置づけ，試行錯誤を行ったり，グラフに表し数値を読み取ったりする等の活動を重視すべきだと指摘されている。ICTをツールとして利用した数学的活動については，グラフ電卓，作図ソフト，グラフ描画ソフト，表計算ソフトなどを用いた授業の研究が1990年頃から行われているが，ICTを有効に活用した，生徒の探求活動に適した題材を設定することが難しく，今日においても特殊な取り組みの域を出ていない感がある。

本稿では，生徒自らが主体的にICTを活用して，数学の課題を探求する活動を，競技大会として行った事例を紹介する。取り上げる事例は，福井県教育委員会が主催する中高生を対象とする競技大会「ふくい理数グランプリ（高校・数学部門）」である。この大会は，「理数好きの裾野を広げ，トップを伸ばす」のスローガンの下で平成20年から開催されており，中高生を対象に，実生活に関連した理数の課題に取り組むことによって，数学・理科や科学技術に対する興味や関心を喚起するとともに，科学的な思考力・判断力・表現力などを育成することを目的としている（石井他2009, 西村他2014）。著者は，本グランプリの実行委員の一員として，アドバイザーを務めており，課題の設定を中心に，グランプリの運営に深く関わっている。グランプリ本選では，筆記問題で選抜された3人1組のチームで探求的な数学の課題に取り組んで，プレゼンを行い，その優劣を競う。

平成27・28年度のふくい理数グランプリ（高校・数学部門）本選では，それぞれ「暗号」「円板被覆問題」をテーマに掲げ，各チームにはノートパソコンを1台与えて，課題探求のツールとして使用させた。本稿では，ふくい理数グランプリの実践報告に沿ってICT活用事例を紹介する。

2．Excelを用いた暗号の解読－H27年度の取り組み－

H27年度のふくい理数グランプリ（高校）本選は，2015年9月22日に福井県立武生高等学校で開催され，数学部門は予選の上位10チーム30名が参加した。数学部門本選のタイムスケジュールを表1に示す。なお開会式と閉会式は，物理・化学・生物・地学部門と合同で行われている。

表1．グランプリ本選

時間	内　容
9:00 ～ 9:20	受付
9:20 ～ 9:40	開会式・移動
10:00 ～ 12:00	本選（2h）
12:00 ～ 13:00	昼食・休憩
13:00 ～ 13:30	発表準備
13:30 ～ 15:00	発表
15:00 ～ 16:00	休憩・講評・移動
16:00 ～ 16:40	表彰式・閉会式

2.1. 課題・解答

始めに，数学グランプリ・アドバイザーである著者が前に出て，20分ほどで暗号の数理とパソコンの使い方を簡単に説明した。本グランプリでは，半角文字のうち，

表2に示す47文字のみを使用し，それらに0～46の数値を対応させた符号を「理数GPコード」として用いることを約束した。理数GPコードの文字は，ASCIIコードの2C～5A（16進数）に対応する文字を抜き出したものである。16進数の2Cは十進数表記では44であるから，

（理数GPコード）＝（ASCIIコード）－44

で対応することに注意する。

表２．理数ＧＰコード

,	-	.	/	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
@	A	B	C	D	E	F	G	H	I
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
T	U	V	W	X	Y	Z			
40	41	42	43	44	45	46			

文字列xを暗号規則eで変換した暗号文をy=e(x)と表す。暗号化関数eは,1対1の対応でなければならない。このとき，逆関数dは復号化関数と呼ばれ，x=d(y)と表せる。例えば,表2の47文字を10文字後にずらす暗号は,表3のように行われる。

表３．シーザー暗号

平文	M	A	T	H	E	M	A	T	I	C	S
符号x	33	21	40	28	25	33	21	40	29	23	39
x+10	43	31	3	38	35	43	31	3	39	33	2
暗号文	W	K	/	R	O	W	K	/	S	M	.

ここで，暗号化関数はy=x+10であるが，yが46を超えた場合は，47=0，48=1，49=2，…と解釈する。すなわち，yはx+10を47で割った余りであり，剰余記号modを使うと次式で表される。

$$y = e(x) = x+10 \bmod 47$$

このとき,復号化関数は,x = d(y) = y－10 mod 47である。これは，シーザー暗号と呼ばれる最も古い暗号方式の一つである。一般にアルファベットをk文字ずらすシーザー暗号は，e(x) = x+k mod 47で表され，暗号化の鍵kは，$0<k<47$ の46通りである。

シーザー暗号は，単純で鍵の総数も少なく簡単に見破られてしまうので，本グランプリでは「アフィン暗号」を採用する。アフィン暗号とは，暗号化関数が次のような1次関数で表される暗号である。

$$y = e(x) = ax+b \bmod 47$$

ここで，整数a,bの組K=(a,b)が暗号化の鍵になる。特に，a=1の場合がシーザー暗号である。この関数が1対1の対応になっているためには，aは47と互いに素でなくてはならないが，47は素数なので，1≦a＜47の任意の値を取ることができる。従って，鍵の総数は，46×47－1＝2161通りで，シーザー暗号に比べると，かなり安全になる。例えば，(a,b)=(3,2)で「MATHEMATICS」を暗号化すると，「3>HSJ3>HVDE」になる（表4）。

表４．アフィン暗号

平文	M	A	T	H	E	M	A	T	I	C	S
符号x	33	21	40	28	25	33	21	40	29	23	39
3x+2	7	18	28	39	30	7	18	28	42	24	25
暗号文	3	>	H	S	J	3	>	H	V	D	E

Excelで暗号計算を行う方法を説明する。Excel上で,文字xのASCIIコードは,関数「CODE(x)」で求められる。逆に,ASCIIコードyを文字に直すには,関数「CHAR(y)」で求められる。また,x mod yを意味するExcelの関数は,「MOD(x,y)」である。以上より，表4をExcelで作成するには，次のように行えばよい。

①１行目に平文の文字を各セルに1文字ずつ入力する。
②２行目：セルA2に「=CODE(A1)−44」と入力する。
③３行目:セルA3に「=MOD(3*A2+2,47)」と入力する。
④４行目：セルA4に「=CHAR(A3+44)」と入力する。
⑤A列2～4行を選択して，B列以降に数式の設定をコピーする。

暗号解読には，文字の頻度分析が参考になる。表5は，様々な小説や雑誌などから統計を取って得られた，英文におけるアルファベット26文字の出現頻度（百分率）である。

表５．アルファベットの出現頻度

A	B	C	D	E	F	G	H	I
8.2	1.5	2.8	4.3	12.7	2.2	2.0	6.1	7.0
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
0.2	0.8	4.0	2.4	6.7	7.5	1.9	0.1	6.0
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
6.3	9.1	2.8	1.0	2.3	0.1	2.0	0.1	

以上の解説の後，次の本選課題①②③を提示した（大森，2016）。課題①の提出期限は11：20とし，答案用紙に答のみを記入して提出させ，解答が早いチームから順位点を付ける。課題②③の提出期限は14：00で，プレゼン資料と合わせて提出し，その後は各チーム5分間で資料に基づいてプレゼンを行う。発表の順番は，予選と課題①による順位点の低いチームから順番とする。課題②③は，暗号文を入力したExcelのファイルを保存したUSBメモリを各チームに配布して，解答欄に入力したExcelファイルを提出する。採点は，Excelファイルを読み込んで，何文字正解したかを機械的に採点した。これにプレゼンの評価を加えて，最終的な得点とする。

課題１．①以下の文は，アフィン暗号y=28x+21 mod 47によって暗号化されている。平文を解読せよ。

XUWUN　L3N<M3<　E0YMO　V0NK

②次は，アフィン暗号で暗号化された英文である。この文章の最初の3文字は,「LET」であることはわかっている。全文を解読せよ。

0FZ @ BF ZJF 8FI,5<F 9,MFR BQ 5,M,5,R9 R1Z<810 R<ABF8 1 BQ BD ZJF 98F1ZFIZ S4AA4R 5,M,I48 4W 1 1R5 B ,I FV<10 Z4 ZJ1Z 4W B 1R5 @7

③アフィン暗号で暗号化された英文を解読せよ。

H-2 EX2:X, E;?-2, ;: 1R2 1@ H-2 2X,6;2:H WR1CR XRS :;D?62:H E;?-2,:9 ;H ;: X H0?2 1@ :V7:H;HVH;1R E;?-2, ;R C-;E- 2XE- 62HH2, ;R H-2 ?6X;RH2QH ;: :-;@H2S X E2,HX;R RVD72, 1@ ?6XE2: S1CR H-2 X6?-X72H9 H-2 D2H-1S ;: RXD2S X@H2, IV6;V: EX2:X, A79E94UU<Z79E9//.L C-1 X??X,2RH60 V:2S ;H9

解答.

① FUKUI SCIENCE GRAND PRIX

y=28x+21 mod 47 より，$28x \equiv y-21 \pmod{47}$ … (A)

ここで，ユークリッドの互除法により，

$$47=28\times 2-9$$

$$28=9\times 3+1$$

最後の余り 1 は，28 と 47 の最大公約数を表している。上の計算を逆にたどる。

$$\begin{aligned}1&=28-9\times 3\\&=28-(28\times 2-47)\times 3\\&=28\times(-5)+47\times 3\end{aligned}$$

すなわち，$28\times(-5)=1-47\times 3\equiv 1 \pmod{47}$ が成り立つので，法 47 における 28 の逆元は，$-5\equiv 42 \pmod{47}$ である。(A) の両辺に 42 を掛けて，$x\equiv 42(y-21)$ mod 47 すなわち，

$$x=42y+11 \bmod 47$$

これが復号化関数 x=d(y) となる。

② Let x be the residue given by dividing natural number a by b, the greatest common divisor of a and b is equal to that of b and x.〔自然数 a を b で割った余りを x とすると，a と b の最大公約数は，b と x のそれに等しい。〕

暗号文の最初の3文字 0, F, Z の符号はそれぞれ，4, 26, 46 であり，これらの元の文字 L, E, T の符号は，32, 25, 40 である。y=e(x)=ax+b mod 47 の変換で，e(32)=4, e(25)=26, e(40)=46 であるから，連立方程式

$$32a+b\equiv 4 \pmod{47} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(B)}$$

$$25a+b\equiv 26 \pmod{47} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(C)}$$

$$40a+b\equiv 46 \pmod{47} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(D)}$$

を得る。(B) − (C) から，$7a\equiv 25 \pmod{47}$，ここで，$7\times 27=189\equiv 1 \pmod{47}$ より，両辺に 27 を掛けて，$a=25\times 27 \bmod 47=17$ が得られる。さらに (B) より $b=4-32\times 17 \bmod 47=-540 \bmod 47=24$ より，暗号化関数は $y=17x+24 \bmod 47$ である。$17\times 36=612\equiv 1 \pmod{47}$ より，復号化関数は，

$$x=36(y-24) \bmod 47=36y+29 \bmod 47$$

で与えられ，この関数で暗号文を変換して平文が得られる。なお，解読した文章は，ユークリッドの互除法の説明であり，今回の課題で，法 47 における整数の逆元を求めるヒントになっている。

③ The Caesar cipher is one of the earliest known and simplest ciphers. It is a type of substitution cipher in which each letter in the plaintext is shifted a certain number of places down the alphabet. The method is named after Julius Caesar <B.C.100?-B.C.44>, who apparently used it.

〔シーザー暗号は，最も早くから知られた，最も簡単な暗号文の一つである。それは，平文の各文字が一定の数だけ後ろのアルファベットにずらされた換字式暗号である。この方法は，それを使ったと言われる，ジュリアス・シーザー（B.C.100? ～ B.C.44）に因んで名づけられている。〕

暗号文に使われている文字を数えると，頻度の高い順に，2 (29), H(23), ;(19), X(18), -(16), :(16), R(13) となる。英文で最も頻度の高いアルファベットは e なので，「2=e」と予想される。以下，t, a, o, i, n, s, h, r の順に頻度が高いので，H,;,X の中に t や a がある可能性が高い。暗号文で3文字単語の「H-2」は5回繰り返されており，「-」も頻度が高いので，これは「the」と予想できる。また「X」のみの1文字単語が複数あることから，「X=a」と思われる。このようにして，アルファベット部分は全て解読できるが，この暗号はアフィン暗号とわかっているので，2～3文字の見当が付いた時点で，課題②と同様の方法で，一気に全文が解読できる。例えば，「H-2=the」の見当を付けた時点で，暗号化関数を y=ax+b mod 47 とすると，2=e, H=t より連立方程式

$$25a+b=6 \bmod 47,\ 40a+b=28 \bmod 47$$

を得る。上式から b を消去して，15a=22 mod 47，ここで $15\times 22\equiv 1 \pmod{47}$ より，両辺に 22 を掛けて，

$$a=22\times 22 \bmod 47=14,\ b=6-25\times 22 \bmod 47=32$$

従って，暗号化関数は y=14x+32 mod 47 であり，$47\times 37\equiv 1 \pmod{47}$ より，復号化関数は，$x=37(y-32) \bmod 47=37y+38 \bmod 47$ である。最初の十数文字をこの関数で変換すると，The Caesar cipher is one of the earliest …と意味の通る文章になっているので，この解読で合っていることが確認できる。

2.2. 活動の様子

課題①については，全チームが解読に成功した。ほとんどのチームは，暗号化関数 y=28x+21 mod 47 によって，どの文字がどの文字に変換されるかという対応表を作成して，その表を見て解読を行っていた。課題②も，ほぼ全チームが完答できていた。多くのチームは，連立方程式を立てて，整数解を導くことで暗号化関数を求めて，対応表を作成して1文字ずつ解読を行っていたが，復号化関数を求めて，Excel で一括変換していたチームや，

復号化関数の候補を Excel で試行錯誤して変換を試みるという使い方をしていたチームもあった（図1)。法 47 における整数の逆元は，電卓を使ったり，ユークリッドの互除法を使ったチームもあった。課題③は，計算を使わずに試行錯誤の当てはめだけで部分的に解読したチームや, 無答のチームもあり, 完答できたのは約半数のチームであった。課題②の x や課題③の記号と数字は，当てはめだけでは推理できないので，その部分が解読できるかでも差がついた。

図１．Excelによる探求活動

発表は，課題終了時に提出した紙の資料に基づいて，書画カメラを使って行わせた（図2)。資料の分かりやすさも評価の観点であるが，1枚の資料に小さな字で多くの文章を書きこむチームが多く，見やすい資料を作成したチームは少なかった。多くのチームが，予想以上に課題ができていたこともあり，口頭発表は全体的にしっかり発表できていた。

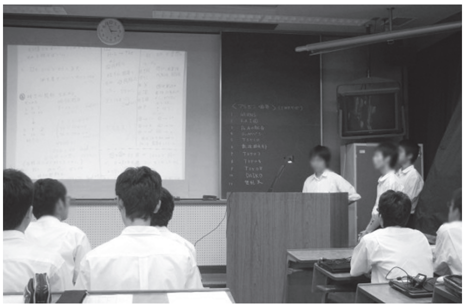

図２．発表の様子

課題①～③の得点に，プレゼンの評価と，予選の筆記問題の得点を加えた総合点で，入賞チームを決定した（表6)。入賞した4チームは，課題①～③が全て完答だったので，プレゼンの評価と予選の得点によって順位が決まった形になった。これらの結果は，翌日の新聞に写真入りで報道された（福井新聞 , 2015)。

表６．入賞チーム

賞	高校	チーム	氏　名
最優秀	藤島	世紀末	近藤淳史，小角亮佑，石田智樹
優秀	大野	DAIKO	松田恭岳，高野透也，廣瀬孝平
優秀	武生	T2508	高橋慧至，田中淳聖，野坂尚輝
奨励	高志	数理探究部	中野崇人，清水啓吾，中村　響

2.3. 考察・発展

本グランプリでは，Excel を数学探求のツールとして使って，暗号解読を競わせた。暗号の数理は，RSA 暗号が注目されがちだが，高度すぎて高校生の課題としては使いづらいため，アフィン暗号を扱った（西村他 , 2014)。課題探求中は，多くのチームが Excel や電卓を有効に使って暗号解読を試みており，適切な課題だったと考える。高校生なので，使用言語が英語だったことで課題に障害を感じた生徒はいない様子だった。反省点として，理数グランプリの本選課題としてはやや簡単すぎて，多くのチームが完答してしまい，上位グループでは差が付かなかったことが挙げられる。実際，本課題は単文字換字暗号のため，頻度分析のみでほとんどの部分が解読できる（Stinson, 1996)。事前打ち合わせでは，次に示すブロック暗号の課題④⑤も準備していたのだが，今回は出題を見送り，興味を持った参加者のために，講評・解説時に発展問題として配布するに留めた。

課題④（ヒル暗号）

文章を2文字ずつのブロックに区切って，x_1y_1 x_2y_2 x_3y_3…とし，各ブロック (x,y) を (ax+by mod 47, cx+dy mod 47) に変換する。下は，この方式で暗号化された英文である。最後の「A/W 1」は「new.」であることはわかっている。全文を解読せよ。

R@J4A/ FU= K0Y A/J90 −8=0 3 ;6−..1U V0Y A/ J9U P/HTB R@WMGSY9 A/W1

課題⑤（ビジュネル暗号）

文章を 4 文字ずつのブロックに区切って ,$x_1y_1z_1w_1$ $x_2y_2z_2w_2$…とし，各ブロック (x,y,z,w) を (x+a, y+b, z+c, w+d) mod 47 に変換する。a=b=c=d のときは，シーザー暗号である。下は, この方式で暗号化された英文である。全文を解読せよ。

0FH 71 BU3 −9 ,6R 9P@1G W@N6,7P4S >35S7POR37 6YG.GVA7F,3ZF H<Q <Z EV7L:7 HZ3Q 9V@ 18JC08 K/24 ,@NAZ;VFZ7−A5 7, F−1U 4 J@7C,=1LZBR@3 BU8 L<PE1>2<V< X81 71 C−0Y<J /,7 K7S9L@1 9Y=Z GO3 Q8J@7C,7−A R37 JO7P; PA X8WB 18J@RG5 7, EZ/9 GO71 4ZGZ@LB0L PA O4Z3Q BU BU8 W@N6,7P4S 2V9M7PHSB7 BM 4N6,=0<U5 2;L >0BKCPG V4 2JV :NEN3 .EP;R A−;O8YA;

課題④⑤は，K=(a,b,c,d) が暗号化の鍵となり，鍵の総数は 400 万通り以上ある。課題④は，課題②と似ており，2次整数行列の逆行列を求める計算になる。暗号化の鍵は，K=(7,12,13, 5) である。課題⑤では，4文字を1ブロックとするブロック暗号のため，文章をやや長めにしてヒントが得られやすいようにしてある。4文字ずつ分けて，1, 5, 9, 13,…字目の文字で頻度分析をすればよい。また，4の倍数離れた箇所にある同じ文字の並びは同じ単語を表すという性質も利用できる。例えば，「BU 8」が 100 文字離れて2箇所あるので，これは同じ

3文字単語の「the」ではないかと予想が立つ。これで鍵の3つがわかり，残り1つの鍵は 47 通りなので総当たりでも求められる。暗号化の鍵は，K=(13,34,7,29) である。

3．Grapesを用いた円板被覆問題ーH28年度の取り組みー

H28 年度ふくい理数グランプリ（高校）本選は，2016 年9月 19 日，福井県立武生高等学校で開催された。数学部門のタイムスケジュールは昨年度（表1）と同じである。H28 年度は，図形領域の課題を設定し，道具として Grapes を使ってもよいこととした。Grapes は，大阪教育大学附属高等学校の友田勝久教諭が開発したグラフ描画ソフトである（友田・堀部 , 2005）。日本の学校教育で広く使われており，Grapes を使った授業の事例研究も盛んに行われている。ツール系ソフトによる図形の探求活動は，専用ツールの開発や，作図ソフト Geometric Constructor を使った授業実践などが，飯島（2010）らによって研究されており，ICT を活用した数学的活動として特に重要視されている。

3.1. 課題・解答

始めに，数学グランプリ･アドバイザーである著者が，本選課題の内容及び Grapes の使い方について 10 分ほどで説明を行った（大森 , 2017）。本選課題は3つあり，課題①②は，12：00 を提出期限とし，課題③の答案と発表資料を，14：00 までに提出する。14：00 からは資料に基づいて，書画カメラを使って5分間の発表を行い，プレゼンの評価点に，課題の順位点と予選の筆記問題の得点を加えた総合点で評価する。各チームには，ノートパソコンを1台貸し出して，Grapes と電卓を自由に使ってよいものとした。

課題２.

①1辺1の正方形を3つの同じ大きさの円で覆うとき

②1辺1の正三角形を4つの同じ大きさの円で覆うとき

それぞれの場合について，なるべく小さな円の半径とその時の中心の座標を求めよ（図3)。

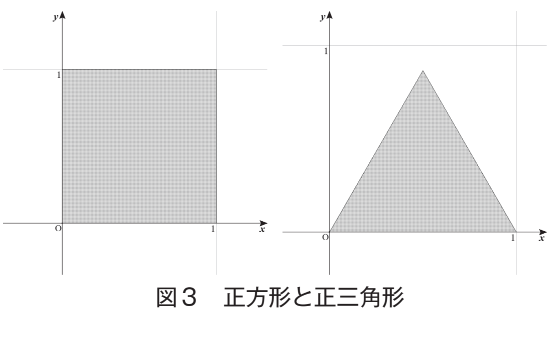

図３　正方形と正三角形

③福井県内に数箇所，電波基地局を設置して，県全体に電波が届くようにしたい。1つの基地局から届く電波の範囲は，その基地局を中心とする円の内部とし，山などの障害物は無視する。どの基地局も電波の到達距離は同じであるが，電波の出力量は最小限にしたい。どこに基地局を設置すべきかを考えてほしい。図4のように座標を入れ，福井県を図に示す多角形に近似して考える。この多角形を，3個ないし7個の同じ半径の円で覆うとき，それらの円の各座標と半径を小数第4位まで求めよ。

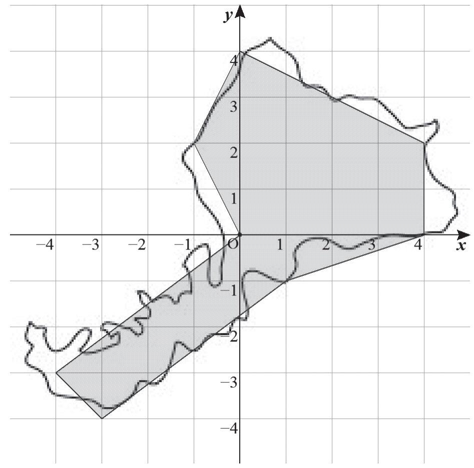

図４　福井県を模した多角形

今回の課題は，与えられた図形を同じ半径の円で被覆する場合の最適配置を求める問題で，円板被覆問題と呼ばれる。正方形を3つの円で被覆する問題および正三角形を4つの円で被覆する問題は，自明でない最も簡単なケースであり，計算によって厳密な答えを求めることもできるが，福井県を模した多角形は不規則な図形なので，厳密解を求めることは難しい。試行錯誤で，なるべく小さな解を求めるしかないが，そのためのツールとして，Grapes を使うことを想定している。採点は，Grapes に円のデータを入力後，きちんと被覆されているか拡大機能を使って確かめ，覆えていない部分がある答案は，「ファール」とみなし，その課題の順位点は0点とする。ただしオンラインはセーフとする。

解答例.

①単位正方形を同じ大きさの3つの円で覆う場合の最小の半径は，$\sqrt{65}/16=0.503891\cdots$ である（図5左)。

②正三角形を同じ半径の4つの円で覆う場合の最小の半径は，$2-\sqrt{3}=0.267949\cdots$ である（図5右)。

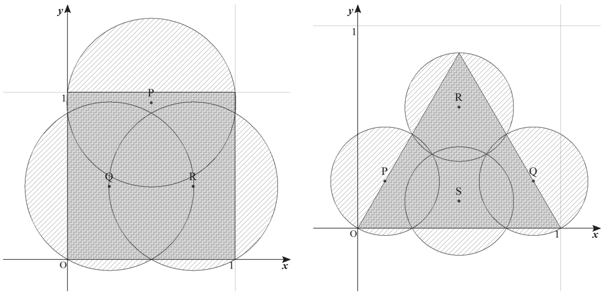

図５．課題①②の最適解

課題①②における円の中心の座標と証明は省略する。この問題は Melissen(1997) によって注目され，深く研究されたが，問題自体は 1940 ～ 60 年代から知られているらしい。円板被覆問題は，円の個数を増やした場合や，n 重に被覆する場合，図形を替えた場合，一般の図形の被覆問題を解くアルゴリズムなど，様々な問題が研究されている（Szabó&Specht，2007）。

③ Grapes 上に7つの点を挿入し，それらを中心とする半径 a の円を描く。それらの円が多角形全体を覆うように，点の位置を移動させ，変数 a を調節して，なるべく円の半径 a を小さくなるように配置する（図6）。際どい箇所は，拡大表示して，もれなく覆われているかをチェックする。また必要に応じて3点の外接円を計算するなど，部分的に最適な配置を計算で求めることも有効である。

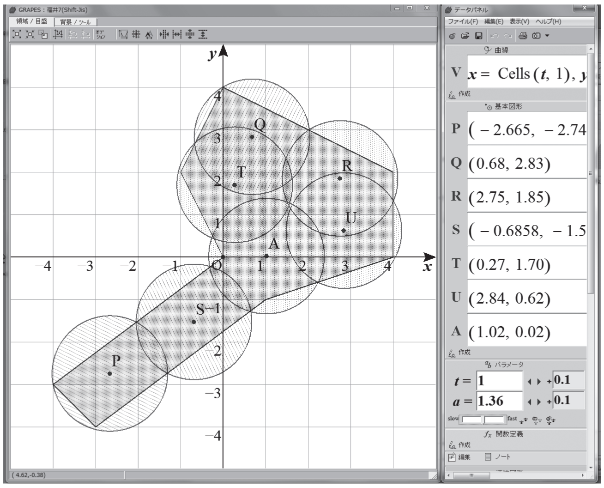

図６．Grapesの画面（円７つの場合）

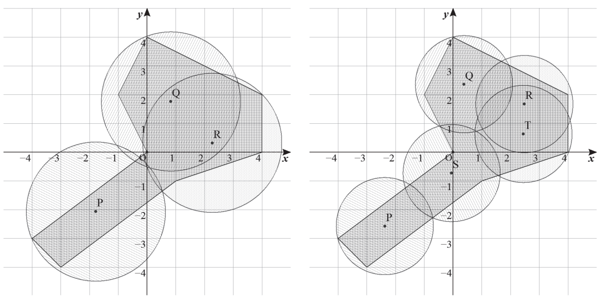
図７．円３つと５つの場合

図6・7と表7は，この方法で運営側が事前に準備していた解答例であるが，円の半径を小数2桁にして大雑把に調べたものなので，もっとよい解答が出てくることも想定される。なお，課題③では，円が2～7個の全ての場合の解答例を事前に準備していたが，今回の本選では，円の個数は3つと7つのみを出題した。表7と図7では参考までに円が5つの場合も記した。

表７．課題③の解答例

個数	3つ	5つ	7つ
半径	2.42	1.69	1.36
1	(−1.78,−2.07)	(−2.375,−2.575)	(−2.665,−2.745)
2	(0.83,1.76)	(0.38,2.36)	(0.68,2.83)
3	(2.27,0.32)	(2.48,1.67)	(2.75,1.85)
4		(−0.05,−0.73)	(−0.6858,−1.53)
5		(2.45,0.63)	(0.27,1.7)
6			(2.84,0.62)
7			(1.02,0.02)

3.2. 活動の様子

今回本選に出場したのは，村人 ABC（高志），ボルボックス（武生），サイクロイド（大野），敦賀気比数学同好会（敦賀気比），ナカパーと愉快な仲間達（若狭），真南（藤島），濃硫酸（武生），帰ってきた中島みゆき（藤島），電車通学（藤島），ゼウス（福井）の7校 10 チーム 30 名である（括弧内は高校名）。

午前中は，課題①②を中心に考えるチームが多かった。パソコンを全く使わずに，図形の問題として計算で厳密解を求めようとするチームもあったが，多くのチームは Grapes を早い段階から使用して，試行錯誤で正方形や三角形を円で被覆する方法を考えており，パソコンを囲んでグループで探求活動を行っている様子が見られた（図8）。Grapes を使うのは初めての生徒がほとんどであったが，限定された使用法であることと，初めの簡単な説明があったことで，支障はなかったようである。課題提示時に「Grapes の使い方」をまとめたマニュアルを配布していたこともあり，パソコンの使い方を質問してくる生徒はほとんどいなかった。発表準備を始める段階で，パソコン内の PowerPoint を起動してファイルを作成し始めたチームもあったが，今回は，紙の資料を書画カメラで投影する方式に統一して，PowerPoint の使用は認めなかった。


図８．Grapesによる探求活動

プレゼンは，紙にまとめた資料を書画カメラに写して行わせた（図9）。どのチームも，図面を工夫してうまく発表していたが，考えた過程をいきなり述べて，肝心の結論を述べないチームが多数あった。このため，各チームの結果には不明瞭な部分もあるが，課題①では，濃硫酸とナカパーが，厳密解 $\sqrt{65}/16$ に言及しており，中島

みゆきとサイクロイドも小数値ではあるが，おそらく厳密解にたどり着いていたと思われる。課題②では，ボルボックスと村人 ABC は厳密解 $2-\sqrt{3}$ を求めており，サイクロイドと濃硫酸も，ほぼ厳密解に近い配置を答えていた。一方，ナカパー，敦賀気比，ゼウスは3つの円しか使わない配置を提案し，電車通学，中島みゆき，真南は正三角形を4つの正三角形に分割して，それぞれの外接円による被覆を考えた。

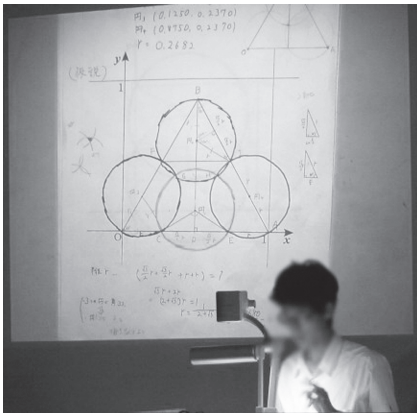

図９．発表の様子

課題③の発表でも，図形を三角形に分割して外接円を考えるなど，ユニークな発想もあったが，多くのチームは結果のみの簡単な発表であった。課題の結果を表8に示す。ただし，見せ消ちの値はファールで，——は無答を意味する。太字は，運営側が用意した解答例に肉薄した解答である。サイクロイドは，どの問題も円を限界まで小さくして攻めてきたが，2つの課題で図形を覆いきれずにファールとなった。課題①では，プレゼンでは濃硫酸とナカパーが厳密解 $\sqrt{65}/16$ を発表していたが，12：00の時間制限内には間に合わなかったらしく，提出した答案は厳密解からは遠いものだった。また，ゼウスと電車通学は，無答のまま提出した課題があった。わからなくても，適当に大きな値を書いておけば，ファールになるチームが他にあることである程度の順位点が付いたはずだが，厳密解を論理的に求められない場合に，諦めて無答になってしまう生徒がいる様子が観察される。

表８．課題の結果

チーム名	①	②	③3つ	③7つ
村人ABC	0.6000	**0.2700**	2.5060	2.0000
ボルボックス	0.5270	**0.2680**	2.5000	**1.4143**
サイクロイド	**0.5050**	~~0.2682~~	**2.4200**	~~1.3800~~
敦賀気比	~~0.5270~~	0.2887	2.5000	~~1.5207~~
ナカパー	0.5300	0.2890	**2.4300**	**1.3900**
真南	0.5266	0.2887	2.5000	**1.4000**
濃硫酸	~~0.6009~~	0.2730	**2.4240**	**1.3970**
中島みゆき	**0.5090**	0.2888	2.6926	2.0140
電車通学	~~0.5774~~	0.2887	2.5000	——
ゼウス	——	~~0.2888~~	——	——
（解答例）	0.5039	0.2680	2.4200	1.3600

配点は非公表のため，本稿では細かい得点を示すことはできないが，本選課題の得点順位は，上からボルボックス・真南・ナカパー・濃硫酸・村人 ABC となり，プレゼンの得点では，サイクロイド・村人 ABC・ボルボックス・ナカパー・中島みゆきとなった。課題とプレゼンを合わせた本選のみの得点順位では，ボルボックス・ナカパー・村人 ABC・サイクロイド・濃硫酸の順となり，これに予選の得点を加えた総合得点で，入賞チームが選ばれた（表9）。これらの結果は，翌日の新聞に写真入りで報道された（福井新聞 , 2016）。

表９．入賞チーム

賞	高校	チーム	氏名
最優秀	武生	ボルボックス	山本　凪, 幸明秀征, 伊藤七海
優秀	高志	村人ABC	胡麻光希, 重永健輔, 坪田大成
優秀	若狭	ナカパー	中村駿斗, 常籐　亘, 村松和久
奨励	大野	サイクロイド	高野透也, 廣瀬孝平, 松田恭岳

3.3. アンケート結果と考察

本選のアンケート結果（自由記述）に書かれていた主な意見を抜粋する。

・僕たちのチームでは役割分担をして，午前中は課題①を解く人，課題②を解く人，Grapes に打ち込んで確認する人に分かれました。良い感じにチームで協力して取り組めたと思います。

・パソコンを数学に利用する事は初めてでした。他のチームのプレゼンを見るとパソコンを有効活用しているなと思い，パソコンを使って数学を解くことも覚えなくてはいけないと思いました。

・パソコンのソフトや電卓を用いて難問に挑むことで数学者のような気分を味わえてすごく新鮮で楽しかったです。また問題を解くことだけに気をとられてしまいましたが，プレゼンを通して解法を他の人に伝える重要性を学べました。

・Grapes の便利さと使用方法を知ることができた。本選でこんな面白い物を知ることができてとても喜ばしいです。

・Grapes がとても役に立ち，普段の「紙とペン」の数学とは違った楽しみがありました。

・今まで見たことがないような問題を3人で協力して解いて面白かったです。論理立てて最小の値を求めることはできなかったけど, 試行錯誤して色々な道具を使って自分たちなりの答えを出せたので良かったです。

・プレゼンは思ったより緊張して自分の考えが言えなかったです。他のチームの発表は納得することが多く，とても勉強になりました。SSH で数学をやっているので，面白い研究材料が知れてよかったです。

以上のアンケート結果から，グラフ描画ソフト Grapes を使って，グループで数学の探求課題に取り組み，書画カメラを使って発表を行うという本グランプリ

の全ての部分において，参加した高校生は，新鮮味と面白さ, ICT を活用する重要性を感じている様子が伺える。Grapes は学校の授業でもしばしば使われているが，教員単独による演示的な利用に留まっていることが多い。今回の課題では，生徒自らが Grapes を使って数学の探求活動を行うもので，ICT を有効利用した実践事例といえると思う。

4．まとめ

本稿では，ふくい理数グランプリにおいて，生徒が主体的に ICT を活用して数学の探求活動を行う事例を2つ紹介した。1つは，Excel を用いた暗号の解読で，もう1つは Grapes を用いた円板被覆問題である。Excel を使った探求活動を伴う授業実践では，高校の数学Ｉ「データの分析」におけるヒストグラムや散布図の作成など，統計処理における活用はよく行われている。今回の実践事例は，Excel の表計算機能を文章の暗号化に利用するもので，数学の内容としては，数学 A「整数の性質」に属する。整数の授業で，RSA 暗号を取り上げる実践事例は多いが，フェルマーの小定理の応用として，原理を説明するのが精一杯である。本実践では，アフィン暗号を題材にすることで，数学 A で学んだユークリッドの互除法や一次不定方程式，合同算術を応用して，実際に Excel を使って文章の暗号化・復号化の計算を体験させる実践になっている。文章を英文としたのは, ASCII コードが使える半角文字とし，使用する文字を限定させるためと，単語の区切りがわかりやすくなるようにしたためである。英文の読解は必要でなく，また対象が高校生なので，原文が英文だったことの不都合はなかったと考える。なお，日本語のローマ字表記だと，母音の a, i, u, e, o が容易に特定されてしまうので好ましくないだろう。

2つ目の Grapes を使った実践事例では，福井県に電波基地局を設置するという現実の問題を起点として，多角形を円板で被覆する問題へ数学的モデル化を行っている。そして定式化された数学の問題を，ICT を活用して探求する数学的活動が行われている。数学と人間との関わりや数学の社会的有用性について認識を高めることの重要性は，中学校の新学習指導要領解説（文部科学省 , 2017）においても，数学科の教育内容の改善・充実に掲げられており, 米国等で推進されている STEM（Science, Technology, Engineering and Mathematics） 教育にもつながる実践といえる。図形領域において ICT を利用した探求活動を伴う授業実践については，Geometric Constructor や Cinderella などの作図ソフトの活用や，Grapes によるグラフ描画の事例がこれまでに報告されている。円板被覆問題は，主に数学Ⅱ「軌跡と領域」に属する内容であるが，よりよい配置を試行錯誤して探す必要があり，Grapes を使った探求活動を行う題材として適していたと考えられる。

引用文献

日本学術会議（2016），初等中等教育における算数・数学教育の改善についての提言，http://www.scj.go.jp/ja/info/kohyo/pdf/ kohyo-23-t228-4.pdf

石井恭子，油谷泉，小島敏弘，葛生伸 (2009), 科学的探究を競う中高生のイベント「ふくい理数グランプリ」，応用物理教育 33(2), pp.75-80.

西村保三，入羽弘之，牧田進一，塚崎覚，杉本直人，朝倉正顕 (2014), 高校生を対象とした数学探求コンテストー H25 ふくい理数グランプリ（高校・数学）の実践報告ー , 福井大学教育実践研究 39, pp.1-9.

西村保三，大久保裕介，佐分利豊，坪川武弘，福田浩之，松本智恵子，山下敏明（2014），暗号を題材にした数学の教材開発ー H25 体験ふむふむ数学クラブ「暗号のすうり」の実践報告ー，福井大学教育実践研究 39，pp.11-19.

大森弘仁（2016），理数グランプリ，福井県高等学校教育研究会数学部会会誌 51，pp.97-110.

福井新聞（2015）, 理数GP藤島4冠, 平成 27 年9月 23 日.

D.R.Stinson 著，櫻井幸一訳（1996），暗号理論の基礎，共立出版.

友田勝久，堀部和経（2005），パソコンらくらく高校数学 図形と方程式，講談社.

飯島康之（2010），コンピュータ活用,『数学教育学研究ハンドブック』，日本数学教育学会編，東洋館出版社，pp.282-291.

大森弘仁（2017），理数グランプリ，福井県高等学校教育研究会数学部会会誌 52，pp.71-87.

H. Melissen (1997), Packing and covering with circles, Ph.D thesis, Universitit Utrecht.

P.G. Szabó, E. Specht（2007），Packing up to 200 equal circles in a square, Models and Algorisms for Global Optimization 4, pp.141-156.

福井新聞(2016), 理数GP若狭, 初の1位, 平成 28 年9月 20 日.

文部科学省（2017），中学校学習指導要領解説 数学編，平成 29 年7月.

Application examples of information technology in investigation contest of mathematics
—From“The Fukui Science Grand Prix (High school, Mathematics)”—

Yasuzo NISHIMURA

Keywords：ICT education, mathematical activity, cipher, disc covering problem