福井大学リポジトリ
UNIVERSITY OF FUKUI
REPOSITORY

「ひらめき☆ときめきサイエンス」における算数・数学の実践：ボヤイ・ゲルヴィンの定理の教材開発を中心に

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2018-02-02 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 青木, 慎恵, 伊禮, 三之, 淺原, 雅浩 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/10351

福井大学初等教育研究　2017，第3号，pp.33－44

研究論文

「ひらめき☆ときめきサイエンス」における算数・数学の実践
― ボヤイ・ゲルヴィンの定理の教材開発を中心に ―

福井県立高志高等学校　青　木　慎　恵
琉球大学大学院教育学研究科　伊　禮　三　之
福井大学教育学部　淺　原　雅　浩

本研究は，平成28年度に福井大学主催で開催した「小中学生のためのサイエンスキャンプ～多角形･花･石や砂・理科の言葉～」（日本学術振興会支援事業「ひらめき☆ときめきサイエンス～ようこそ大学の研究室へ～」の1つ）において，実施4領域（算数・数学／生命／地球／言語活動）の中で，主に算数・数学に関する教材開発（ボヤイ・ゲルヴィンの定理）について，その実践の概要を報告する。さらに，その考察から，具体的な裁ち合わせ（等積変形）の試行錯誤とその操作活動を洗練させて数学的な表現へと昇華させていくことで，論証指導の恰好な教材になることの示唆を得たことから，これについても合わせて報告する。また，参加者及びその保護者に対するサイエンスキャンプ実施後のアンケート等から，今回の教科横断型かつアクティブラーニング型の最先端研究を体験できる全体プログラムは，高い評価を得た。

キーワード：ひらめき☆ときめきサイエンス，小・中学生，算数・数学，ボヤイ・ゲルヴィンの定理，観察・操作の数学的活動

1．はじめに―サイエンスキャンプの概要

日本学術振興会では，平成17年度から科学研究費助成事業（以下，科研費と略称）の一環として，研究成果の社会還元や普及推進を目的として，小学5・6年生，中学生，高校生を対象に，科研費により行われている最先端の学術研究の成果を基礎に，その中に含まれる科学の興味深さや面白さを,研究者自身が分かりやすく発信し，児童・生徒が直に見る，聞く，触れるような体験型プログラムの企画を募集し，実施機関に対する支援を行っている。そのプログラムが「ひらめき☆ときめきサイエンス～ようこそ大学の研究室へ～ KAKENHI」である。例年，実験・実習をできるプログラムに人気があり，参加する児童・生徒が，将来に向けて科学的好奇心を刺激して“ひらめき”，“ときめく”心の豊かさと知的創造性を育むとともに，その研究者自身の歩み（研究を志した動機等）や人柄に間近に触れることにより，学問の素晴らしさや楽しさを感じることができるところにその特徴がある。平成28年度は，全国の161機関で330件のプログラムが開催され，児童・生徒の他引率の保護者・学校教員等を含め9,500名弱の参加があった。平成17年度の事業開始以来，プログラムを開催した機関は，延べ1,315機関にのぼり，累計で約75,000名が参加している(1)。

福井大学では，このプログラム以前にも独立行政法人科学技術振興機構（JST）の支援による科学技術体験合宿「体験サイエンス・サマーキャンプ」を実施した経験があった(3・4)平成25年度から専門領域の融合型・学年横断型のプログラムとして応募し，毎年採択されてきた。過去の採択実績は，次の通りである。

① 平成25年度「数学と理科の活用力を育成するサイエンスキャンプ」（中高対象1泊2日型）
② 平成26年度「小中学生のための理科と算数・数学の言葉探検」（小中対象1日型）
③ 平成27年度「理科と数学の活用力を研くサイエンスキャンプ」（中高対象1泊2日型）

平成28年度は，教科横断型かつアクティブラーニング型の最先端研究を体験できるプログラムとして，小学校5年生から中学生を対象に1泊2日で企画した。平成26年度は1日型の実施であり窮屈な日程となったため，その経験を踏まえて，今回はスタッフが子どもたちとじっくりと向き合いつつ，子どもたち自身も十分な活動ができるような宿泊型プログラムとした。実施テーマは,「小中学生のためのサイエンスキャンプ～多角形・花・石や砂・理科の言葉～」として4領域（算数・数学／生命／地球／言語活動）を融合した内容で開催した(2)。

参加者は小学生16名，中学生11名の計27名であった。実施日時は，平成28年7月30日（土）～31日（日）の2日間。全体会及び実験実習，探究活動は，福井大学文京キャンパス総合研究棟Ⅰの13階会議室と7階理数教育演習室，9階多目的演習室，生物学大実験室，11階地学大実験室を使用し，宿泊と各グループによる探究活動の続きは，福井県立芦原青年の家を利用した。

当日の実施プログラムは，次の通りである。

（第1日目）7月30日(土)
09:40 ～ 10:00　受付
10:00 ～ 10:40　開講式（開会挨拶・科研費の説明・オリエンテーション）・集合写真撮影

10:40 ～ 11:00 【ミニ講義1】理科における言語活動
11:00 ～ 11:20 【ミニ講義2】算数・数学
11:20 ～ 11:30 休憩
11:30 ～ 11:50 【ミニ講義3】生命
11:50 ～ 12:10 【ミニ講義4】地球
12:10 ～ 13:00 昼食
13:00 ～ 13:30 理科言語活動・算数数学・生命・地球のグループ分け＆クッキータイム1
13:30 ～ 16:30 【実験実習1】4テーマに分かれてグループ活動
16:30 ～ 16:45 休憩・荷物まとめ
16:45 ～ 17:45 バス移動（福井大→芦原青年の家）
17:45 ～ 18:15 入所式とオリエンテーション
18:15 ～ 19:15 夕食・休憩
19:15 ～ 21:30 【実験実習2】4テーマに分かれてグループ活動と入浴
21:30 ～ 22:00 就寝準備
22:00 ～ 消灯・就寝

（第2日目）7月31日(日)

06:00 ～ 07:00 起床・洗面・荷物の整理・清掃・荷物の移動（06:45 ～部屋チェック）
07:00 ～ 07:55 朝食
07:55 ～ 08:10 退所式・退所
08:10 ～ 09:10 バス移動（芦原青年の家→福井大）
09:20 ～ 12:00 【実験実習3】4分野に分かれて成果の取りまとめ（ポスター等の作成）
12:00 ～ 12:50 昼食
12:50 ～ 13:30 【成果発表会1】（理科言語活動・算数数学）各20分
13:30 ～ 13:40 休憩
13:40 ～ 14:20 【成果発表会2】（生命・地球）各20分
14:20 ～ 14:40 休憩・アンケート記入
14:40 ～ 15:00 クッキータイム2
15:00 ～ 15:30 閉講式（未来博士号授与・閉会の挨拶等）終了後解散

（実験実習の講師とテーマ）

言語活動；淺原雅浩・大山利夫・松友一雄・大和真希子・三好雅也
　理科における言語活動：理科学習語彙検定の紹介
算数・数学；伊禮三之・青木慎恵
　ボヤイ・ゲルヴィンの定理
生物学；西沢　徹
　花のつくりから読み解く生物の多様性と共通性
地学；三好雅也・藤井純子
　地層が物語る福井県の土地の成り立ち

本稿では，福井大学におけるこの平成28年度に実施したプログラムの中で，主に算数・数学分野の実践の概要を紹介し，終了直後の参加者のアンケートや，後日回収した参加者・保護者アンケート結果を紹介し，今回のサイエンスキャンプ全体の反応と算数・数学領域に関する考察を報告する。

なお，算数･数学分野で取り上げた中心的な内容は，「ボヤイ・ゲルヴィンの定理」であり，ある多角形を，適当に切り分けてそれらを再度寄せ合わせて，別の多角形にするという裁ち合わせ（等積変形）に関するものである。活動全体を通してボヤイ・ゲルヴィンの定理の証明を目標においた。ただし，サイエンスキャンプでは，学習集団として校種・学年が混在した異年齢集団を構成するため，その証明は，論理的な整合性が取れていればよしとし，数学的表現については厳密性は求めないこととした。

2．ボヤイ・ゲルヴィンの定理とジグゾー法

(1) ボヤイ・ゲルヴィンの定理[5･6･7]

「タングラム（Tanglam)」は，正方形を7つのピースに切り分けたものを使って，いろいろな形を作り楽しむ裁ち合わせ（等積変形）のパズルである（図1)。逆にいうと，「お家」などの図形を，いくつかのピースに分解して並べ替えると1つの正方形にすることができることになる。

このように，2つの図形の面積が同じならば，どのような場合でもうまく並び替えてもう一方の図形にすることができるのだろうか。

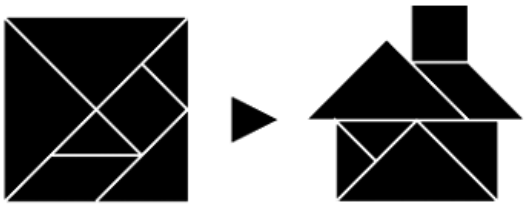


図１　　タングラムによる「お家」への変形

算数・数学教育には，こうした裁ち合わせを利用した教材がかなりある。中学3年生で学習するピタゴラスの定理（三平方の定理）の裁ち合わせによる教材化などはその典型である。こうした裁ち合わせ遊びの背景にあるのが「ボヤイ･ゲルヴィンの定理」である。すなわち，「2つの平面図形A，Bについて，面積が等しければ，AとBは分解合同である」。この定理のおかげで，正三角形を切って並べて正方形にすることができるし，切って並び替える方法によるピタゴラスの定理の証明もうまくいくのである。

一般的には，「平面図形Xはある正方形と分解合同である」（ボヤイ・ゲルヴィン）ことを示せばよい。その証明の概要は，三角形はある長方形と分解合同→面積が等しく1辺が等しい平行四辺形と長方形は分解合同→面積の等しい長方形は分解合同→長方形は同じ面積の正方形と分解合同→平面図形Xをいくつかの三角形に分割しそれぞれを分解合同な長方形にし，次にその各長方形を分解合同な正方形にし，2つの正方形を分割して組み直

し1つの正方形を作る。この正方形ともう1つの正方形を同様に分割して組み直して1つの正方形を作る。以下同様にしていけば，最後に全体が1つの正方形となってXと分解合同になることがわかる。

この最後の段階の証明には，ピタゴラスの定理の証明に用いた分割（裁ち合わせ）を使うため，まだその定理を学習していない小学生や中学生にはハードルが高い。そこで，ピタゴラスの定理を利用しなくてもよいように，「平面図形Xはある長方形と分解合同である」ことを目標とする。

（2）ジグゾー法について[8]

ジグゾー法とは，次の活動で構成される協調学習の1つである。すなわち，①設定された問いを解くのに必要な既知の知識のパーツを準備し，同じパーツを相互に解き合いグループでの理解を深める「エキスパート活動」と，②違うパーツを学習した者同士で新しいグループを構成し，エキスパート活動で理解した内容を互いに説明し合い，それぞれの知識を組み合わせ，最初の問いの解を作る「ジグゾー学習」，③その解に至った根拠も含めてクラス全体で発表し合う「クロストーク」，の3つである。ジグゾー法は，アクティブラーニング型授業の典型例でもある。

ボヤイ・ゲルヴィンの定理の証明の概要を見ると，最初の段階（三角形はある長方形と分解合同，面積が等しく1辺が等しい平行四辺形と長方形は分解合同）は，小学生でも解決可能な知識のパーツであるが，その証明の後半のパーツ（等積な2つの長方形は分解合同／予備定理の連鎖）は難易度が高い。通常エキスパート課題は難易度が同程度のものを準備することが普通だが，小学生・中学生の混在する学習集団であるため，今回のサイエンスキャンプでは，この証明の各段階をエキスパート課題として設定した。

3．算数・数学分野の実践の概要

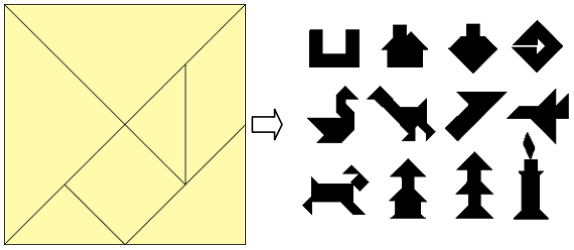
まず，サイエンスキャンプにおける算数・数学の構成と担当は，次の通りである。

【ミニ講義2】（20分）
タングラムで遊ぼう！／伊禮三之（講師）
【実験実習1】（180分）
ボヤイ・ゲルヴィンの定理／青木慎恵・伊禮（講師）
エキスパート活動／竹内俊力・土田恵里・藤田康介（大学院教育学研究科修士2年・TA）
【実験実習2】（135分）
ジグゾー学習・クロストーク／竹内・土田・藤田
【実験実習3】（140分）
ポスター作成／竹内・土田・藤田
【成果発表会1】（20分）

（1）タングラムで遊ぼう！－ミニ講義（全体会）

まず，数百年前に中国で生まれ，ヨーロッパへと広まったといわれている「タングラム」というパズルを，プリントにそって紹介する（図2）。

みなさんは，「タングラム（Tanglam）」というパズルをご存じでしょうか。タングラムは，子どもから大人まで世界中の人に楽しまれているパズルで，正方形を7つのピースに切り分けたものを使って，いろいろな形を作り楽しむシルエットパズルです。



タングラムの切り分け方　　問題のシルエット（１部）

今回は，このタングラムの背景にある数学（算数）を学習していきましょう。

図２　　プリント１－タングラムで遊ぼう！

全体会では，タングラムそのもののおもしろさを体験してもらった。市販の木製のタングラムを参加者全員に配布し，すべてのピースを使用する実物大の問題プリントを3題（直角二等辺三角形，ゾウの顔，恐竜）準備[9]し，そのシルエットの上に，7つのピースを重ねられるかトライするよう指示した（図3）。

図３　　直角二等辺三角形にトライ

説明後は，TAも加わってもらい机間巡視をしながらアドバイスを行った。どの子ももくもくと真剣に取り組んでいる様子がみられ，しばらくすると「できた～！」という歓声があちらこちらで聞こえてきた。なかにはかなり早い段階で3題とも解けた子どももいた。そうした子どもには別解にも挑戦するよう促した。

十分にタングラムを楽しむことができたといえるほどの時間ではなかったことと，自分で考える楽しみを継続してもらうため，3題の解答は示さずにおいた。午後のグループ活動では，タングラムの背景にある数学を学習していくことを予告してミニ講義を終了した。

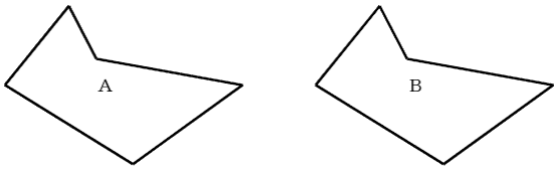
(2) ボヤイ・ゲルヴィンの定理－実験実習1（前半）

算数・数学分野は受講生7名（小学生は5年1名，6年1名の計2名，中学生は1年2名，2年3名の計5名）とTAの大学院生3名で編成され，エキスパート活動（探究）の前に，今回の課題となる「ボヤイ･ゲルヴィンの定理」に関する講義を，青木と伊禮が行った（図4）。

図４　　算数・数学分野の講義風景

タングラムは,「正方形」を7つのピースに切り分けて，それを並び替えていろいろな形を作り楽しむパズルである。逆の遊びも可能である。たとえば,「ゾウの顔」や「恐竜」の図形を,7つのピースを並べ替えて1つの「正方形」にする。このとき，「正方形」と「ゾウの顔」や「恐竜」の面積は等しい。これらの変形はたまたまうまくいったのか，それとも，どんな場合でも図形の面積さえ等しければ，このような並び替えは可能なのか，この問題を考えてみようと問題提起を行った（図5）。

下の図のように，2つの図形A，Bがまったく同じ形（ぴったりと重ねられる）をしていれば，2つの図形は，**合同**といいます。



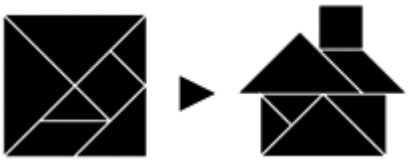
したがって，AとBが合同であれば，明らかにAとBの面積は等しくなります。

この逆,AとBの面積が等しければ,AとBは合同でしょうか？　これは成り立ちませんね。面積が等しくても形の違う図形はたくさんありますよね。

では，これを次のように一般化するとどうなるでしょうか。

定義　2つの平面図形AとBについて，Aをいくつかの部分に切断し，それを並び替えてBが作れるとき，AとBは**分解合同**であるといいます。

分解合同の意味は，タングラム遊びを考えればすぐわかりますね。たとえば…，



左の「正方形」は右のように並べ替えると「お家」になるので,「正方形」と「お家」は分解合同になります。

図５　　プリント２―分解合同の解説

AとBが合同（A≡Bと書く）であれば，明らかにAとBの面積は等しくなる。つまり，

①　A≡B ならば Aの面積＝Bの面積

が成り立つ。この逆，AとBの面積が等しければ，AとBは合同だろうか？

②　Aの面積＝Bの面積 ならば A≡B？

これが成り立たたないことは明らかで，3㎝×4㎝と2㎝×6㎝の長方形の面積を例にあげて示した。

そこで，プリント2のように，合同の概念を修正して,「2つの平面図形AとBについて，Aをいくつかの部分に切断し，それを並び替えてBを作ることができるとき，AとBは分解合同である」とした。この修正された分解合同について②の問題を考えてみる。つまり，

問題　2つの平面図形AとBの面積が等しければ，AとBは分解合同になるでしょうか？

AとBが分解合同ならば，明らかにAとBの面積は等しくなる。この逆の③ははたして成り立つだろうか。

③　Aの面積＝Bの面積ならばAとBは分解合同

もし,「面積が等しいなら，一方をうまく切って並べ替えるともう一方の図形を作ることができる」ならば，正三角形を切って並べ替えれば正方形にすることができるし，次の図形でも正方形にできるはずである（図6）。

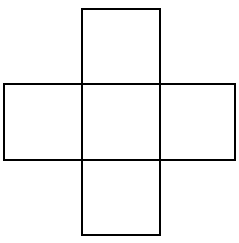


図６　　面積５の十字形

そこで，工作用紙とハサミ，のりを配布して，面積5の十字形をうまく切って，並べ替え，同じ面積の正方形にすることができるのかどうかトライしてもらった。

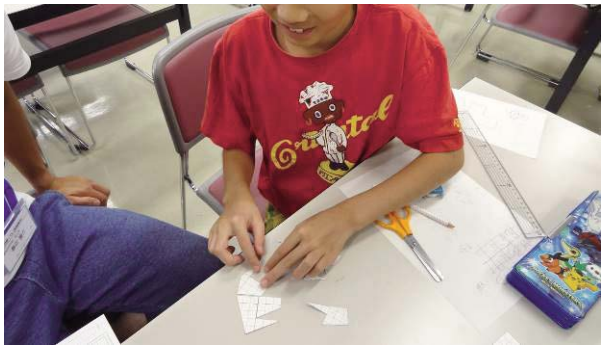


図７　　TAと共に十字形の正方形への変形の試み

ここから，TAの大学院生にも積極的に学習支援にはいってもらった（図7）。最終的には，3種類の解が得られ，それぞれ裁ち合わせの実演を交えて発表してもらった（図8）。

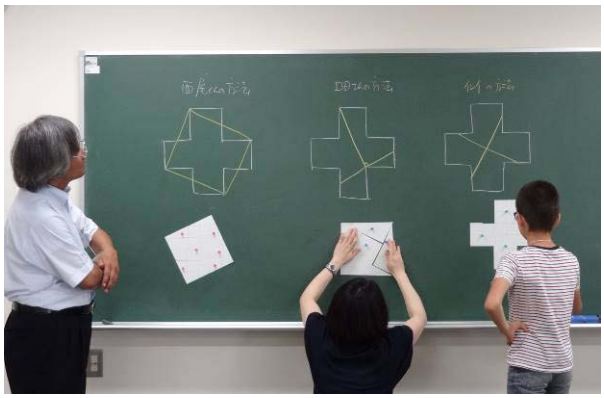


図８　　十字形の正方形への変形の解答

面積が等しいというだけで，分解合同になるというのは不思議な気がするが，実はこれは成立し，次の定理が知られていることを紹介した。

定理（ボヤイ・ゲルヴィン）
2つの平面図形A，Bについて，面積が等しければ，AとBは分解合同である。

この定理は1832年頃，ボヤイ･ファルカシュによって，また翌1833年にパウル・ゲルヴィンによって，それぞれ独立に証明された。そのため，2人の名前をとって「ボヤイ・ゲルヴィンの定理」と呼ばれていることを紹介した。この定理の探究（証明）の前に，次の問題を考えてもらった。

問題　十字の形から作った正方形を，今度は，それをうまく切って並べ替えて，同じ面積の長方形にして下さい。うまくできるでしょうか。

これは比較的簡単に解決した（図9）。

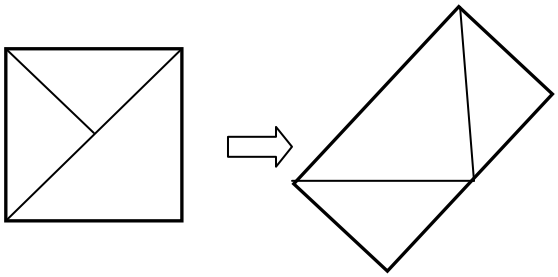


図９　　正方形から長方形への裁ち合わせ

十字形の裁ち合わせを辿ると，「十字形→正方形→長方形」となっている。ここまでの試行錯誤から，面積が同じ図形なら，うまく裁ち合わせることで，いつでも一方から他方の図形（それも長方形へ）に変換可能であることが予想できる。そこで，ボヤイ・ゲルヴィンの定理を，ピタゴラスの定理の利用をさけるため，次のようにいいかえる。

定理（ボヤイ・ゲルヴィン）
平面図形Aは，ある長方形と分解合同である。

今回は，この定理について，協調学習の一つである「ジグソー法」と呼ばれる方法で，みんなで知恵を出し合いながら探究することを予告し（芦原青年の家に移動し夜のグループ活動で），ジグソー法に関わるグループ編成を次のように行った（図10）。

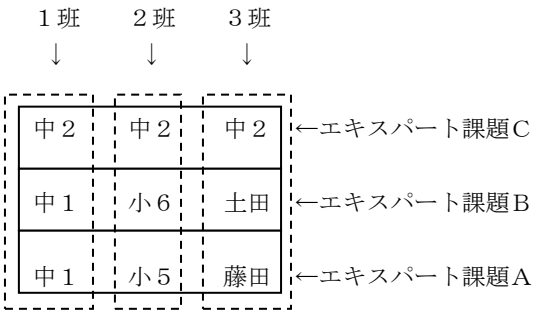


図10　　ジグソー法のグループ編成

なお，「等積ならば分解合同である」ことが主張可能なのは，「面積」に固有なことであり，「体積」では成立しない。例えば，球を有限個の部分に分割し，それらをうまく組み替えると，元の球と同じ半径の球を2つ作る

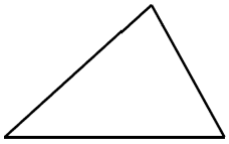
ことができる。直感に反する結果だが，「バナッハ・タルスキーの定理」という立派な数学の定理である。通常，常識に反するため，「バナッハ・タルスキーのパラドックス」と呼ばれていることも子どもたちに紹介した[7・10]。

(3) エキスパート活動－実験実習1（後半）

休憩のあと，「ボヤイ・ゲルヴィンの定理」の証明に必要な予備的な知識を3つのパーツ（エキスパート課題A～C）に分けて，それぞれの課題ごとに解き合い理解を深めるエキスパート活動に移った。

エキスパート課題A（図11）の解決は，「三角形はある長方形と分解合同である」（補助定理1）ことを証明していることになる。

＜エキスパート課題A＞
　三角形はある長方形と分解合同である。
（鋭角三角形，鈍角三角形について調べる）
①鋭角三角形の場合



②鈍角三角形の場合

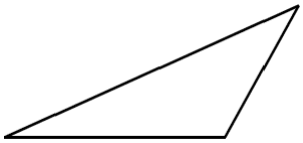


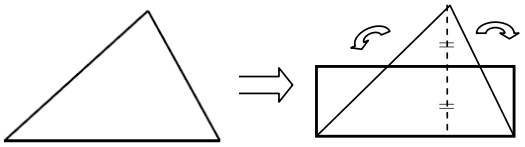
図11　　エキスパート課題Aのプリント

子どもたちは，TAのサポートを受けながら，工作用紙にハサミをいれ，所定の図形を切り出して，それをうまく切って，並べ替え，同じ面積の長方形にしようと，楽しそうに活動していた（図12）。

図12　　ＴＡとともにエキスパート課題Aに取り組む

エキスパート課題Aは，たとえば，次のように裁ち合わせればよい（図13）。

①鋭角三角形の場合



②鈍角三角形の場合

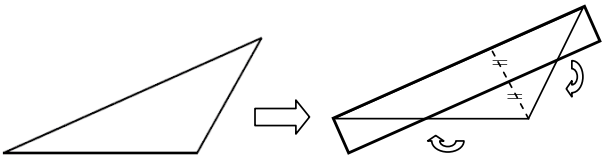
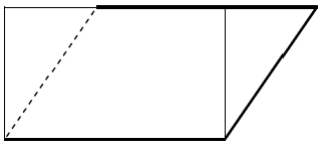


図13　　エキスパート課題Aの解答例

次のエキスパート課題B（図14）の解決は，「面積が等しく1辺が等しい平行四辺形と長方形は分解合同である」（補助定理2）ことの証明である。

＜エキスパート課題B＞
　面積が等しく1辺が等しい平行四辺形と長方形が分解合同である。
（上辺が重なる場合，上辺が離れる場合について調べる）

①上辺が重なる場合



②上辺が離れる場合

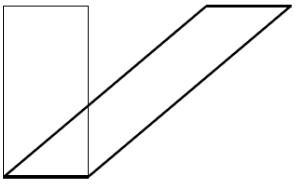


図14　　エキスパート課題Ｂのプリント

子どもたちは，熱心に課題に取り組んでいた。（図15）長方形と平行四辺形の等しい辺を重ねて底辺とすると，このとき高さは等しいので，上辺は底辺と平行になる。

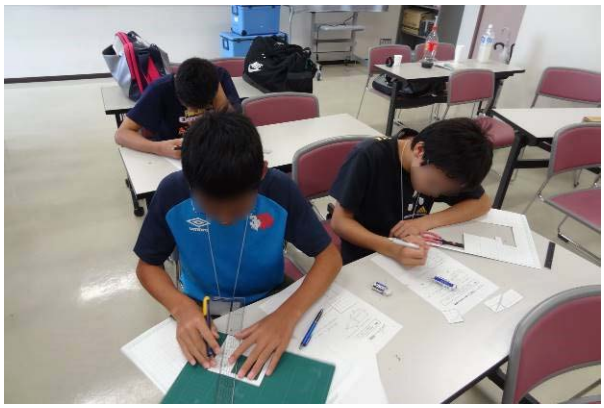
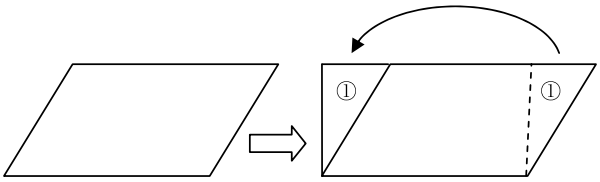


図15　エキスパート課題Bに取り組む様子

長方形と平行四辺形の上辺が重なるか（図14①図），離れるか（図14②図）によって，次のように裁ち合わせればよい（図16）。

①上辺が重なる場合



②上辺が離れる場合

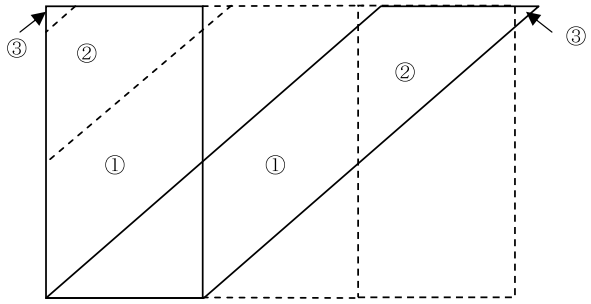
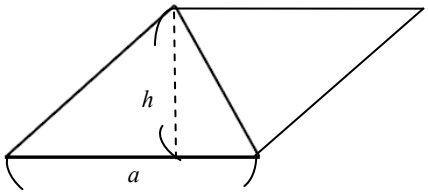


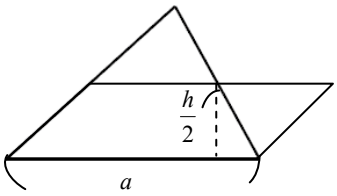
図16　エキスパート課題Ｂの解答例

なお，エキスパート課題A・Bの①の裁ち合わせは，算数科第5学年の「図形の面積」でも扱われている(11)。第4学年「面積」の単元での長方形，正方形の求積公式を既知とし，5年生では平行四辺形，三角形，台形，ひし形の面積を，長方形，正方形に帰着させて学習が展開されるのである。たとえば，三角形の面積は，÷2の解釈によって，次のように平行四辺形に帰着させることができる（図17）。また，エキスパート課題A・Bの②は，①の裁ち合わせを学習していたとしても，適度な難しさをもった課題になっているものと思われる。

① $S = \frac{ah}{2}$



② $S = a \cdot \frac{h}{2}$



③ $S = \frac{a}{2} \cdot h$

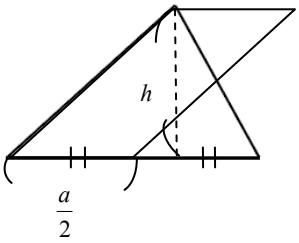
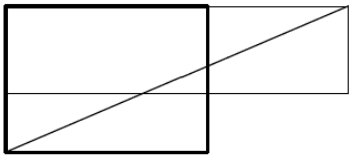


図17　三角形の面積の公式の裁ち合わせ

エキスパート課題C（図18）は，「面積が等しい長方形は分解合同である」（補助定理3）ことの証明である。

＜エキスパート課題C＞
面積が等しい長方形は分解合同である。
（対角線が中にある場合，対角線が外に出る場合について調べる）
①対角線が中にある場合



②対角線が外に出る場合

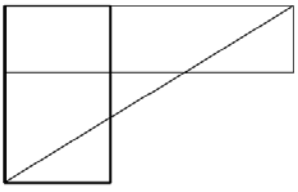
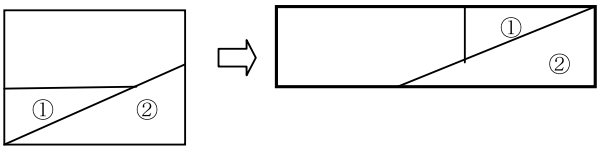


図18　エキスパート課題Ｃのプリント

①対角線が中にある場合



②対角線が外にある場合

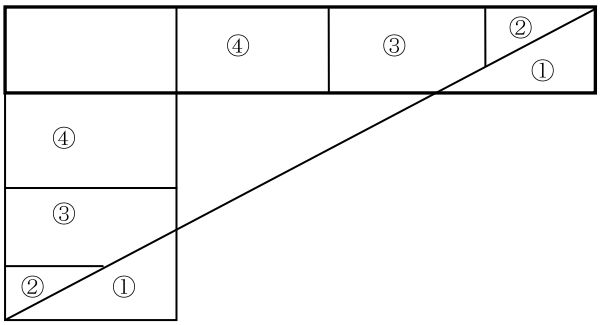


図19　　エキスパート課題Cの解答例

子どもたちは，いろいろと試行錯誤しながら活動し，解答例のように変形することができた（図19）

(4) ジグゾー学習とクロストークー実験実習2

福井大学から芦原青年の家に移動した後，ジグゾー学習に移る。各エキスパート課題を持ちよって，エキスパート活動でわかってきた内容を相互に説明し合い，聞き合う中で，自分が担当した課題との論理的な連関を考え理解を深めていく。理解が深まったところで，それぞれのパートの知識を組み合わせ，ボヤイ・ゲルヴィンの定理の証明に挑んでいった。(図20)

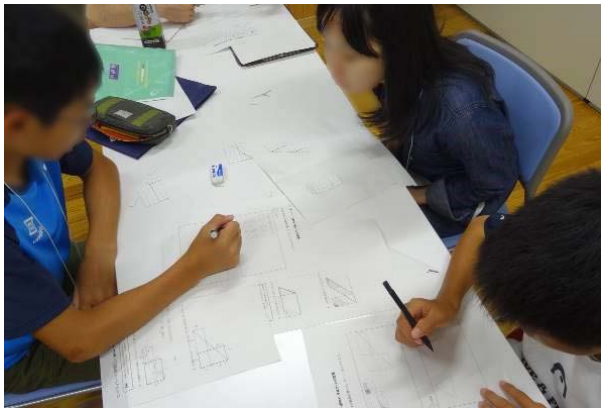
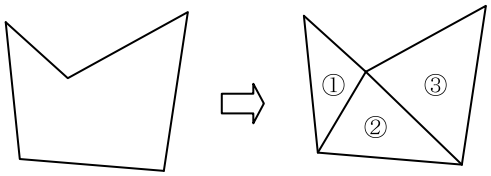


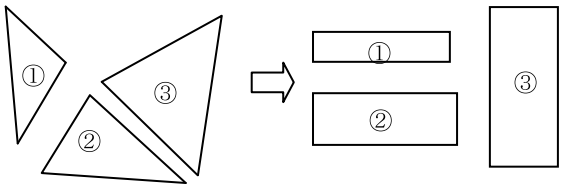
図20　　ジグゾー学習の様子

その後，クロストークによって，ボヤイ・ゲルヴィンの定理の証明の大きな流れを確認していった（図21)。

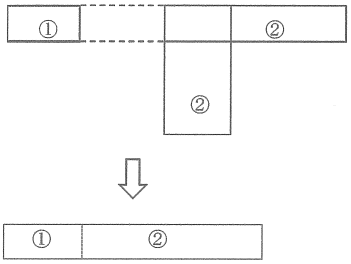
①　多角形を三角形に分割する



②　各三角形は長方形と分解合同



③　長方形はもう一つの長方形の1辺と同じ長さを持つ長方形と分解合同



④　同じ辺を結合して新しい長方形を作る。これをくり返して1つの長方形にする

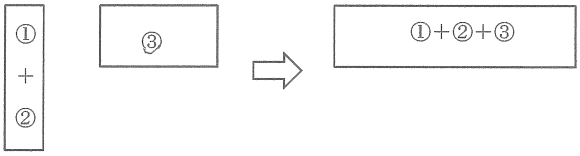


図21　　定理の証明のアウトライン

(5) 発表用ポスター作成ー実験実習3

全体で発表内容やその構成，分担を決めてグループに分かれて，発表用ポスターの作成に取りかかった（図22)。

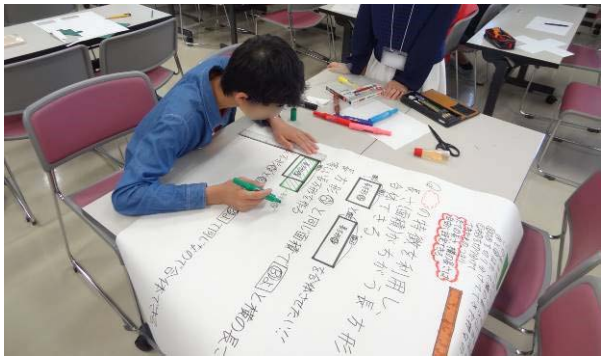


図22　　発表用ポスター作成

作成後発表練習に取り組んだ（図23）。

図23　　タングラムを三角形に変形する発表練習

（6）ポスター発表－成果発表会1

発表の構成は，「タングラムの三角形について」「十字形を正方形にする方法（3パターン）」「ボヤイ・ゲルヴィンの証明の大まかな流れ（三角形を長方形に→長方形2つを1つの長方形に→全体の証明）」として，分担を決めて発表した。練習の成果もあり，堂々とした発表で，タングラムの三角形を担当した小学生はいくつかの解法を手際よく紹介したし，三角形の長方形への等積変形（図24）やボヤイ・ゲルヴィンの証明の大まかな流れを論理的に説明することができた（図25・26）。

図24　　三角形を長方形に等積変形する発表

図25　　定理の証明のアウトラインの発表

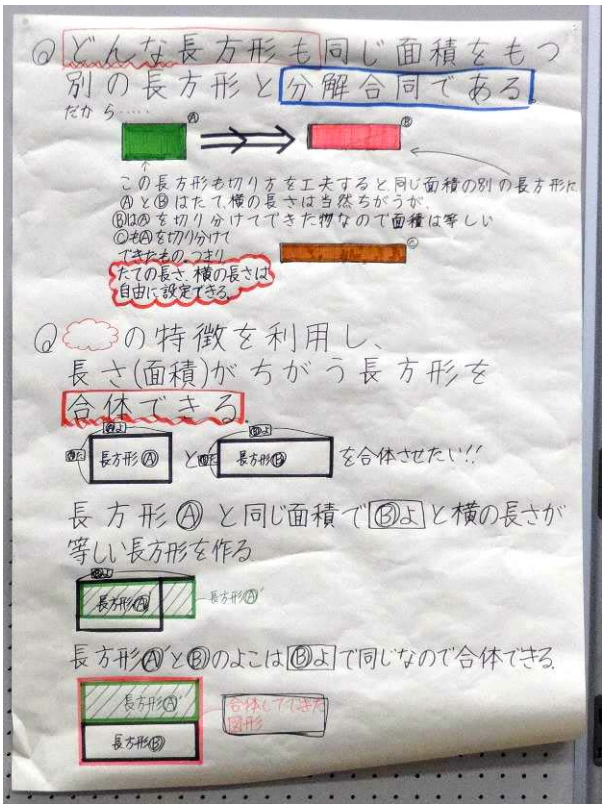


図26　　定理の証明の後半部分のポスター

発表を聴いていた保護者からは，後日次のような感想が寄せられた（表1）。

表１　算数・数学分野の保護者の感想

○　キャンプ最終での参加者の発表が，皆さんよく勉強され自分の言葉で説明されていた点が印象に残っています。年上の人と共同で活動できたことが今後の社会生活に活かされると考えます。幅広い分野の興味ある導入教育で，参加した孫にとって今後の進路の選択肢が広がると思います。
○　交流がもてて，楽しかったそうです。数学でもっと色々な定理が知りたかったそうです。なぜこうなのか，数学を掘り下げたかったみたいです。楽しい体験で，プレゼンが嫌いな子でしたが，必要性を感じ，新学期が始まりプレゼンの努力をするようになりました。ありがとうございました。

4．アンケートの評価結果と考察

今回のプログラムの算数・数学分野の考察の前に，サイエンスキャンプ全体の反応について，終了直後の参加者のアンケートや，後日回収した参加者･保護者アンケート結果を示しておく。

なお，こうしたプログラムに初めて参加した児童生徒が27名中23名（85.2%）と多数を占め，一方で5回以上の参加者も3名（11.1%）いた。

（1）プログラム全体に対する評価結果

おもしろさに関する強い肯定と弱い肯定を合わせた肯

定的評価は，小学生が93.8％（15名），中学生が100％（11名），全体で96.3％（26名）であった（図27）。

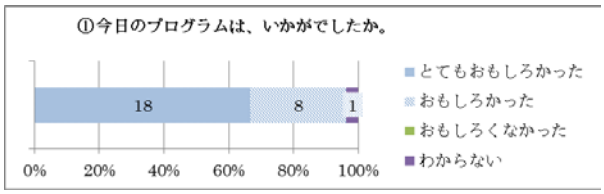


図27　　おもしろさに関する評価結果

「とってもおもしろかったです。」「実験をするのは，とても楽しかった。」などの感想からも，実施プログラムに関する全体的な評価は高かったことがわかる。

理解度についても，肯定的な評価は，小学生，中学生とも100％（それぞれ16名，11名），全体100％（27名）であった（図28）。

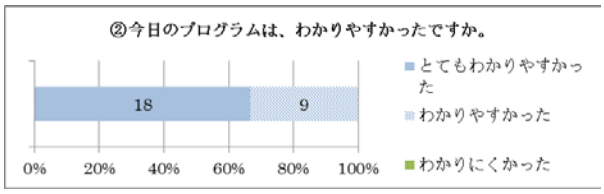


図28　　理解度に関する評価結果

「とてもたのしくて説明がわかりやすかったです。」「分からなかったところは，僕がわかるまで教えてくれたのでとてもうれしかったです。」などの感想に見られるように，それぞれの領域での担当講師やTAの説明の工夫や実験や実習など受講者の理解を促すような配慮のおかげであろう。

科学に関する興味・関心の喚起についての肯定的な評価は，小学生が93.8％（15名），中学生が100％（11名），全体で96.3％（26名）であった（図29）。

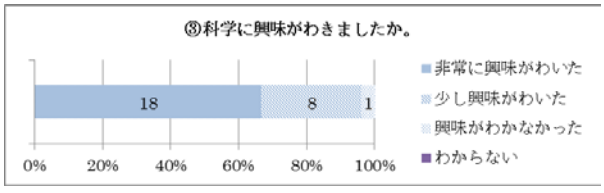


図29　　興味・関心に関する評価結果

小学生1名「興味がわかなかった」と残念な回答があったが，全体的には「科学には様々な秘密がまだまだあるんだな，と思った。」「研究ってこんなにおもしろいんだ!!」「同じ地球でも，いろいろな石や特徴があってびっくりしました。」「植物だけでなくていろいろなことについて意見交換したのでおもしろかった。」など興味や関心が高まっていることが伺える。こうした自由記述の簡単な感想からも科学に対するおもしろさや楽しさ，興味・関心を喚起したことなどこのプログラムのねらいが達成されていることを示しているだろう（表2）。

なお，「将来，自分も研究をしてみたい」と答えた児童生徒も81.5％（22名）いたことも記しておく。

表２　自由記述による感想

○　実験をするのは，とっても楽しかった。
○　科学には様々な秘密がまだまだあるんだな，と思った。
○　とてもたのしくて説明がとてもわかりやすかったです。
○　理科や数学のことについて学べてよかった。
○　とってもおもしろかったです。またしてほしいです。砂についても，調べていることが初めて知りました。もっと多くの分野でしてほしいです。
○　今度いつあるんですか。今日やってみて思ったんです。「研究ってこんなにおもしろいんだ!!」って。ぜひおしえて下さい。
○　同じ地球でも，いろいろな石や特徴があってびっくりしました。
○　分からなかったところは，僕が分かるまで教えてくれたのでとてもうれしかったです。来年も参加したいです。
○　分からなかった事についてきいたら，理解するまで教えてくれたのでうれしかったし，研究する時に科研費を出している所があるから可能性を信じているのですごいと思った。
○　植物だけでなくていろんなことについて意見交換したのでおもしろかった。いろんなことに興味がわいた。
○　とても楽しかったです。ありがとうございました。
○　とても楽しく，学生さんも優しかったので，ぜひまた行きたい。こういう機会は夏休みにあったほうがいいと思う。理科の自由研究や数学の自由研究に役立つからです。
○　今日参加して，クイズとかもしてとても楽しかったです。また，このようなイベントがあるならば参加したいです。
○　いつも楽しませていただいております。ありがとうございます。

その他にも「ひら☆ときにはよく行くけど，今回はなんとキャンプなので，今までと比べられないほど楽しかった。」「福井の子と仲良くなれたのでよかった。」「初めての参加であったが，とても楽しく二日間を過ごすことができた。数学だったが，他もとても楽しそうだった。機会があればまた参加したい。」などの感想もあった。こうした感想は，異年齢での学習活動や宿泊体験など本プログラムの活動を通して，講師やTA，子どもたち相互の交流を深めつつ，各教科領域での共通な課題や興味・関心を追求するなかで，望ましい人間関係や各個人の個性の伸長にもつながっていることが伺える。また，集団の一員として他者と協力しながらよりよい問題解決に取り組んだ経験は，今後の学校生活に活かされるであろう。

（2）算数・数学分野に関する考察

現行の中学校学習指導要領の数学科[12]「図形」領域の目標には，すべての学年で「観察，操作や実験などの活動を通して」という文言が入っている。たとえば，第1学年では，「平面図形や空間図形についての観察，操作や実験などの活動を通して，図形に対する直感的な見方や考え方を深めるとともに，論理的に考察し表現する能

力を培う。」となっている。第1学年までは，「図形に対する直感的な見方や考え方」（直感幾何）の指導が中心であり，本格的な図形での論証（論証幾何）は，第2学年の合同を待たねばならない。

これまで，小学校及び中1までの直感幾何と中2以降の論証幾何は対立的に捉えられていたきらいがある。直感と推論ははっきりと二分されるものではない。直感の中にも推論に近いものが潜んでいるし，推論の中にも直感が働いている。もともと図形に関する知識は，何か物を造るために使われるところにその本質がある。人間の行う物を造る試行錯誤の中には，さまざまな洞察や推論の要素が必ず埋め込まれている。そういった意味では，図形指導において，「観察，操作や実験などの活動」を積極的に取り上げ，図形の直感的な取り扱いとともに「論証」との相互浸透を図ることが重要であろう。

そこで，今回の中心的な題材である「ボヤイ・ゲルヴィンの定理」では，その証明を最終目標とし，「直感幾何」と「論証幾何」の相互の浸透を意識しながら全体の教材構成を次のように構想した。まず，動機づけとして，タングラムによる裁ち合わせでいつくかの図形作りを楽しんでその背景理論へ誘い，続いて，合同の直感的理解（ぴったりと重なる図形）から「分解合同」へと概念を修正し，分解合同の理解を図ることと定理の証明へ向けた前段階の活動として十字形を正方形へ等積変形するパズルを取り上げた。そして，ボヤイ・ゲルヴィンの定理の予備定理に相当する問題をエキスパート課題として設定し，ジグゾー法による探究活動を行い，最後に，探究活動で得られた成果（証明）を，「論理的に考察し表現する」ポスターにまとめ，成果発表会を，他者への説明を通して数学的コミュニケーション力を培う場とした。

以上の構想やサイエンスキャンプにおける算数・数学における実践が，妥当なものなのかを判断するアンケートや感想等直接収集した資料は，残念ながらない。ただ，少ないながら，プログラム全体に対する直後のアンケート（表3○印）や，後日送られてきた参加者・保護者のアンケートに算数・数学に関する感想（表3●印）が存在するのでそれを参考としてあげておく（表3）。

表３　算数・数学分野における感想

○　おもしろかった。でも数学に参加したが，かなりむずかしかった。

●　すごく実験したりしていた所があった。分からないことをとても分かりやすく教えてくれた。数学で図形などが好きになった。

●　グループ活動が数学のレポートを書くのにすごく役だった。

●　ボヤイ・ゲルビンの法則のことをパズルを使いながら説明してくれました。小学校2年生の妹にまでパズルを見せていました(笑)。とても楽しかったと言っていました。(保護者)

●　算数・数学は第一希望ではなかったが，クイズを作るのが楽しかったと。福井の地元の子たちと仲良くなれたと喜んでいました。(保護者)

これを見ると，「おもしろかった。でもむずかしかった。」「とても楽しく二日間を過ごすことができた。」「とても楽しかったと言っていました。」など，算数・数学の授業が肯定的に受けとめられていることが伺える。また，アンケート中の「キャンプに参加された結果を，現段階で総合評価すると何点（100点満点で）だと思いますか」という問いに対して，算数・数学分野の参加者は平均91.3点（全体は92.4%，回収率55.6%）で高い評価であった。

実践した側の実感としても今回取り上げた「ボヤイ・ゲルヴィンの定理」は，子どもたちに算数・数学の楽しさやおもしろさを十分に伝えられたと考えている。なぜなら，「ボヤイ・ゲルヴィンの定理」には，もともとその証明の過程に，「裁ち合わせ（等積変形）」という「観察，操作や実験などの活動」（数学的活動）にふさわしい内容が含まれており，子どもたちは，工作用紙等で対象となる多角形を作成し適当に切り分けて寄せ合わせたりする「裁ち合わせ」を実際に経験しながら―それも協調学習によって―その内容の理解を図り考察を進めているからである。さらに，成果発表会に向けたポスターの作成を通して，TAのサポートも受けつつ，再度その活動過程全体を子どもたち相互で振り返り辿ることによって，定理の内容やその証明を構成する内容（予備定理）などのさらなる理解の深化が図られ，証明の論理的な繋がり（構造）を捉えていったからだと考えている。成果発表会に向けたリハーサルや発表会における子どもたちの流れるようなパズルの解答や発表の論理的な構成や洗練された説明などの様子からも十分に伺えたことである。

５．まとめと今後の課題

今回の「ひらめき☆ときめきサイエンス～ようこそ大学の研究室へ～」の1つとして実施した「小中学生のためのサイエンスキャンプ～多角形・花・石や砂・理科の言葉～」は，ここ何年か継続して取り組んでいる教員養成系学部の中の異なる4研究領域を統合したものである。小・中学生という異校種・異年齢の参加者を対象に実施したプログラムであったが，講義だけでなく実験や実習をふんだんに盛り込むとともに，グループワークを積極的に導入することで，参加者の学習履歴を前提としない内容と満足度の高いプログラムを提供することができたと考えている。その効果は前項でのアンケート結果や感想等で確認した通りである。また内容面の構成だけではなく，その活動を遂行するための環境面の体制も重要である。それは，8名の講師，12名のTAと1つのプログラムとしては多くのスタッフが参加したことも，子どもたちと大学の研究者や学生との交流の機会を増やし，各教科領域への興味・関心をより一層高める要因となっていることは明らかであろう。

今回のような，科研費の研究成果還元によるサイエン

スキャンプ型の宿泊研修については，スタッフと参加者の確保，スタッフと宿泊先及び実施会場の日程の調整，更には，安全面の配慮と危機管理の検討など，通常の1日で実施するプログラムとは異なる課題がある。これらの課題を改善できれば，1回の実施で，多くの子どもたちに研究領域の広さを肌で感じてもらえると同時に，1つの領域に深く取り組んでもらうこと，更には，各領域におけるコミュニケーション力の向上にも繋げることが可能である。これまでの実施の経験から考えると，今回のような複数（内容・領域）科研費宿泊型のプログラムをもっと増やす検討も必要であろう。一方，スタッフを構成する教員養成系の学部生及び院生にとっては，学校教育と先端科学の関係や教師としての実践的な力量形成（教科内容構成学の視点や学びのファシリテーション等）に資することは間違いない。例えば，教育職員免許法上の必修科目（各教科の指導法に関する科目／算数･数学）などで,「ボヤイ･ゲルヴィンの定理」を取り上げれば, 小･中・高校における平面図形の面積に関する背景理論を理解することができる。このように，今後も教員養成の視点からも，この取り組みの意義を確認する必要がある。

なお,「望ましい集団活動を通して，心身の調和のとれた発達と個性の伸長を図り，集団の一員としてよりよい生活や人間関係を築こうとする自主的，実践的な態度を育てるとともに, 自己の生き方についての考えを深め, 自己を生かす能力を養う」[13] ことも目標とする特別活動の視点からサイエンスキャンプの意義を検討することも必要であろう。今後の課題としたい。

最後に，算数・数学教育の側面からは,「ボヤイ・ゲルヴィンの定理」の教材化への端緒を開くことができたと考えている。定理の証明の過程で扱われる予備定理の内容は，小学校5年生の面積の等積変形での指導に見通しを与えることであろうし，具体的な裁ち合わせ（等積変形）の操作活動を振り返り簡潔かつ的確な数学的表現へと洗練させていけば，中学2年生の論証指導の恰好の教材にもなるだろう。さらに，体験型の学習として位置づければ，中学2年だけではなく小学校高学年から中学生，ひいては高校生でも扱える内容である。今後の実践を待ちたい。

引用・参考文献

(1) 日本学術振興会，ひらめき☆ときめきサイエンス，http://www.jsps.go.jp/hirameki/，2017年8月31日閲覧
(2) 日本学術振興会，平成28年度ひらめき☆ときめきサイエンス～ようこそ大学の研究室へ～ KAKENHI（研究成果の社会還元・普及事業）実施報告書，http://www.jsps.go.jp/hirameki/ht28000_jisshi/ht28155jissi.pdf，2017年8月31日閲覧
(3) 淺原雅浩他著（2007），科学技術体験合宿「体験サイエンス・サマーキャンプ」の実施と考察，福井大学教育実践研究第32号p.17-26
(4) 淺原雅浩他著（2008），第2回体験サイエンス・サマーキャンプの実践と評価，福井大学教育実践研究第33号p.23-24
(5) ボルチャンスキー他著（1994），面積と体積，東京図書
(6) 瀬山士郎（2007），幾何物語，ちくま学芸文庫
(7) 瀬山士郎（1996），数学者シャーロックホームズ，日本評論社
(8) 三宅なほみ・東京大学CoREF・河合塾（2016），協調学習とは―対話を通して理解を深めるアクティブラーニング型授業―，北大路書房
(9) タングラムパズル／子供向け問題プリント／無料ダウンロード・印刷，http://happylilac.net/tanglam.html，2017年8月31日閲覧
(10) 砂田利一，新版 バナッハ・タルスキーのパラドックス（2009），岩波書店
(11) 文部科学省（2008），小学校学習指導要領解説　算数編，東洋館出版社
(12) 文部科学省（2008），中学校学習指導要領解説　数学編，教育出版
(13) 文部科学省（2008），小学校学習指導要領解説　特別活動編，東洋館出版社

Class practice of mathematics in Hirameki☆Tokimeki Science
- Focusing on development of teaching materials of Bolyai–Gerwien theorem-

Norie AOKI, Mitsuyuki IREI, Masahiro ASAHARA

Key words：Hirameki☆Tokimeki Science, elementary school student・junior high school student, elementary mathematics・mathematics, Bolyai–Gerwien theorem, mathematical activity of observation and operation