福井大学リポジトリ
UNIVERSITY OF FUKUI REPOSITORY

スケールフリー構造をもつ結合発振器ネットワークに見られるカオス現象

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2015-09-29 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 北村, 拓也, 茂呂, 征一郎 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/8860

= 2015 by IEICE

一般社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
NLP2014-121 (2015-01)

スケールフリー構造をもつ結合発振器ネットワークに見られるカオス現象

北村 拓也† 茂呂 征一郎‡

福井大学大学院工学研究科 〒910-8507 福井県福井市文京 3-9-1
E-mail: †tak412381@gmail.com, ‡moro@u-fukui.ac.jp

あらまし 近年、結合発振器の様々な同期現象や振動現象がさかんに調査されている。その中で、同じ固有振動数を持つN個の発振器を 1 つの抵抗に結合した星形結合系では、結合抵抗に流れる電流を最小にしようとするため、各発振器の電圧の位相が互いにずれて打ち消しあい、様々な同期現象がみられることが報告されてきた。それに伴い、このような発振器の結合系を様々な分野に応用することが考えられている。本論文では、この星形結合系をスケールフリーネットワーク状に結合し、その結合発振器ネットワークが行う振動現象について調査する。その結果、スケールフリーネットワーク結合された発振器ネットワークの振動現象において間欠性カオスがみられることを示す。

キーワード 結合発振器, スケールフリーネットワーク, カオス

Chaos in Scale-Free Networks of Coupled Oscillators

Takuya KITAMURA† and Seiichiro MORO‡

University of Fukui 3-9-1 Bunkyo, Fukui 910-8507, Japan
E-mail: †tak412381@gmail.com, ‡moro@u-fukui.ac.jp

Abstract In recent years, various oscillation and synchronization phenomena have been investigated for coupled oscillators. In star-coupled oscillators which N oscillators are coupled by one resister, N-phase synchronization phenomena can be observed, because the current through the coupling resister should be reduced to a minimum. It is considered that this coupled oscillator can be used in various fields, because a variety of synchronization phenomena are exhibited. For example, it is studied to use network which is constructed by coupled oscillators. In this paper, we study oscillation in coupled oscillators networks with scale-free network structure. We have confirmed intermittency chaos in coupled network with ten oscillators.

Keywords Coupled Oscillator, Scale-free Network, Chaos

1. はじめに

近年、結合発振器の様々な同期現象や振動現象がさかんに調査されている[1]-[4]。その中で、同じ固有振動数を持つN個の発振器を 1 つの抵抗で結合した星形結合系がある。星形結合系では、結合抵抗に流れる電流が最小になろうとするため、各発振器の電圧の位相が互いにずれて打ち消しあい、N相同期現象など様々な同期現象がみられることが発表されてきた[1]。それに伴い、このような発振器の結合系を様々な分野に応用することが考えられている。例えば、この星形結合系を格子状や蜂の巣状に配置したネットワークを、セルラーニューラルネットワークに応用することが考えられている[2]。

一方で、ネットワークには格子状や蜂の巣状のような規則的なものばかりでなく、スモールワールドネットワークやスケールフリーネットワークのような複雑なつながりを持って構成されるものがある[3]-[5]。このうち、本論文ではスケールフリーネットワークに着目する。

スケールフリーネットワークの特徴は、ほとんどのノードが非常に少数の接続しか持たないが、少数の特定のノードは多くの接続を持つことである。この特徴からスケールフリーネットワークは、少数の接続しか持っていないノードがいくつか除去されたとしても、ネットワークの全体的な接続は維持される。しかし、多くの接続を持った一部の特定のノードが除去された場合、ネットワークは簡単に分断されてしまう。つまり、スケールフリーネットワークはランダムな除去に対しては堅牢だが、多くの接続を持っている一部のノードを狙って除去されることに対しては脆い性質を持つ。

このようなスケールフリー性は、現実の世の中においても、インターネットの情報伝達や口コミの広がり

This article is a technical report without peer review, and its polished and/or extended version may be published elsewhere.
Copyright © 2015 by IEICE

方から、代謝ネットワークの働きのような生物学的分野にいたるまで幅広い、多くのネットワークにおいてみることができる。つまり、この性質を持つネットワークを調べることは、このような現実のネットワークの解析に利用できる可能性がある。

本研究では、スケールフリーネットワーク結合された結合発振器ネットワークがどのような振動現象をおこなうのかについて調査した。バラバシ=アルバートモデルによってスケールフリーネットワークモデルを作成し、それに基づいた発振器ネットワークの振動現象についてルンゲクッタ法を用いて数値計算を行った。また、数値計算の結果が妥当なものであるか確認するために、実際の素子を使って結合発振器ネットワークを作成し、オシロスコープで波形の変化を調べた。その結果、スケールフリーネットワーク結合された発振器ネットワークの振動現象において間欠性カオスがみられた。

2. LC 発振器の結合系

N個のLC発振器を1つの抵抗によって結合した場合、結合抵抗に流れる電流を最小にしようとするため、各発振器の電圧の位相が互いにずれて打ち消しあい、N相同期の振動を行う同期現象がみられる。図1は2個の発振器を結合した回路である。

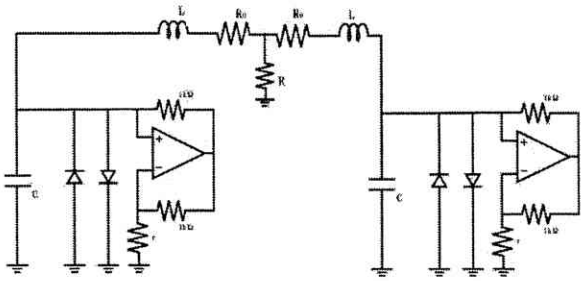


図 1. 2 個の発振器を結合した回路

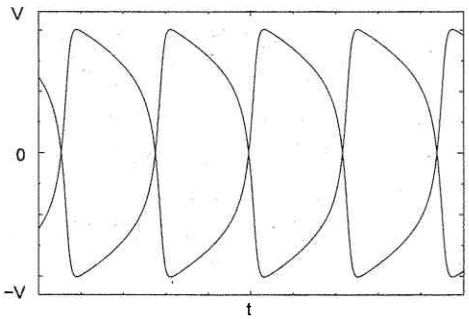


図 2. 2 個の発振器を結合した回路の振動現象

図1のLC発振器がそれぞれ強い非線形性を持っているとき、2つの発振器のみを1つの抵抗で結合した回路においては、図2のような安定した逆相同期の振動現象が見られる。今回作成する回路は、2つのLC発振器の間の接続はこのように1つの抵抗によって結合し、ネットワークを構成している。

3. バラバシ=アルバートモデル

バラバシ=アルバートモデルは Barabasi と Albert が提案したスケールフリーネットワークのモデルである[6,7]。このモデルは、m_0個のノードからなる初期ネットワークに、1ステップ毎にn本のリンクをもった新しいノードが追加されていく成長型のネットワークである。ネットワークのノードiが新たなリンクの接続先に選ばれる確率Π_iは次式によって決定され、リンクを多くもつノードであるほど高い。

$$\Pi_i = \frac{N_i}{\sum_j N_j}$$

iはネットワークのノードの数、N_iは各ノードがもつリンクの数である。

4. 回路モデル

$m_0 = 2$、$n = 2$としてバラバシ=アルバートモデルを用いて、プログラムによってスケールフリーネットワークを作成する。作成したスケールフリーネットワークを図3に示す。また、このネットワークを基に作成した結合発振器ネットワークの回路図を図4に示す。

このネットワークではとなりあう2つの発振器が1つの抵抗によって結合されている。

作成したネットワークの回路方程式は次のようになる。

$$C\frac{dv_k}{dt} = -\sum_l i_{kl} - i_r(v_k)$$

$$L\frac{di_{kl}}{dt} = v_k - R_0 i_{kl} - R(i_{kl} + i_{lk})$$

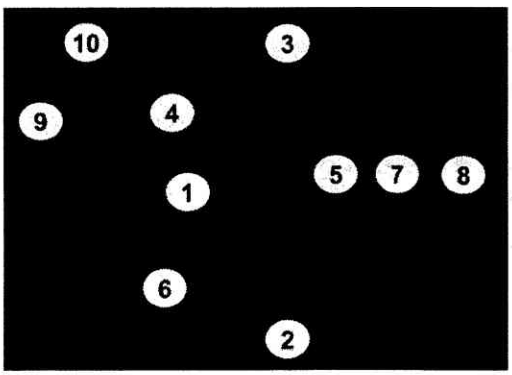
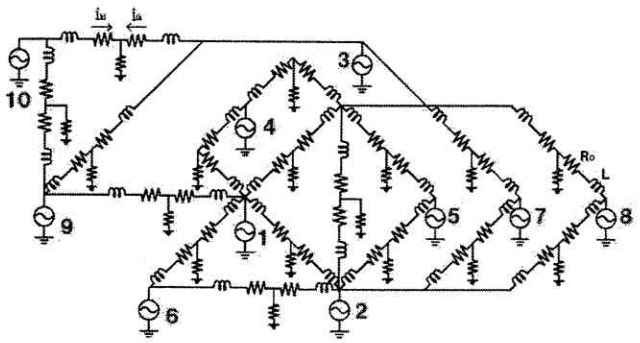
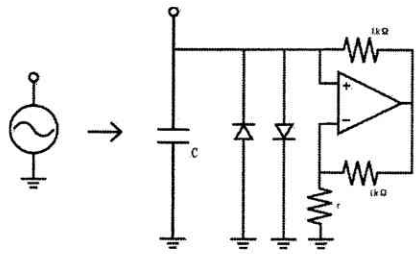


図 3. 作成したスケールフリーネットワーク 1



(a)



(b)

図 4. (a)ネットワーク 1 の回路図 (b)発振器のモデル

表 1. ネットワーク 1 の各発振器のリンク数

発振器	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
リンク	5	6	8	2	2	2	2	2	3	2

上記の回路方程式を以下の

$$t = \sqrt{LC}\tau,$$

$$v_k = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}}x_k, \quad i_k = \sqrt{\frac{Cg_1}{3Lg_3}}y_k,$$

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}}, \qquad \beta = R_0\sqrt{\frac{C}{L}}, \qquad \varepsilon = g_1\sqrt{\frac{L}{C}}$$

を使って正規化すると、

$$\dot{x}_k = -\sum_l y_{kl} + \varepsilon\left(x_k - \frac{x_k^3}{3}\right)$$

$$\dot{y}_{kl} = x_k - \beta y_{kl} - \alpha(y_{kl} + y_{lk})$$

となる。ここで、$\dot{x} = dx/d\tau$ 。α、βは結合の要素、εは非線形性の強さである。

5. 数値計算

作成したスケールフリーネットワークの動作を、(1)式から 4 次ルンゲクッタ法により数値計算する。

各変数の値は

$L = 10\text{mH}$、$C = 0.068\mu\text{F}$、$R = 300\Omega$、$R_0 = 10\Omega$、$\varepsilon = 3$

として計算した。

数値計算によって求めた、ネットワーク 1 における各発振器の波形を図 5 に示す。また、発振器 9 におけるアトラクタ及び$x_1 = 0$ の場合の各振動のポアンカレ写像を、図 6 に示す。

図 5 において、8 つのリンクを持つ発振器 3 と 2 つのリンクを持つ発振器 9 を比較した場合、多くのリンクを持つ発振器 3 は、発振器 9 よりも周波数が大きくなっていることが確認できる。これは、ネットワークにおいてインダクタが並列に接続されていることにより、リンク数が多いものほどインダクタンスが低下するためであると考えられる。

また、図 6 のアトラクタやポアンカレ写像から、発振器の振動に間欠性カオスがみられることが確認できる。間欠性カオスは、規則的で静かな状態が続いた後、乱雑で激しく変化する状態が短時間続き、それらを非周期的に繰りかえす現象である。この間欠性は格子状ネットワークなどの規則的なネットワークでは見られない現象であり、興味深い結果となった。

6. 回路実験

計算結果が妥当なものであるか確かめるために、実際の回路を用いて波形の測定を行った。その結果を図 7 に示す。図 7 ではリンク数の多いものほど周波数が高くなっている。また、振動が周期的ではなく乱雑に変化していることが観察できる。この結果から、今回行った数値計算の結果は妥当なものがあることが確認できた。

7. ネットワークのリンク数の分散の違いによる振動現象の変化

今回作成したスケールフリーネットワーク 1 とリンク数の平均は等しいが、分散が小さくスケールフリー性の低いネットワークを作成し、数値計算を行いその振動の特徴を比較する。

m個の発振器からなるネットワークの各発振器が持つリンクの数をP_iとすると、ネットワークのリンク数の平均は

$$\bar{P} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P_i$$

となり、分散は

$$\sigma^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(P_i - \bar{P})^2$$

となる。

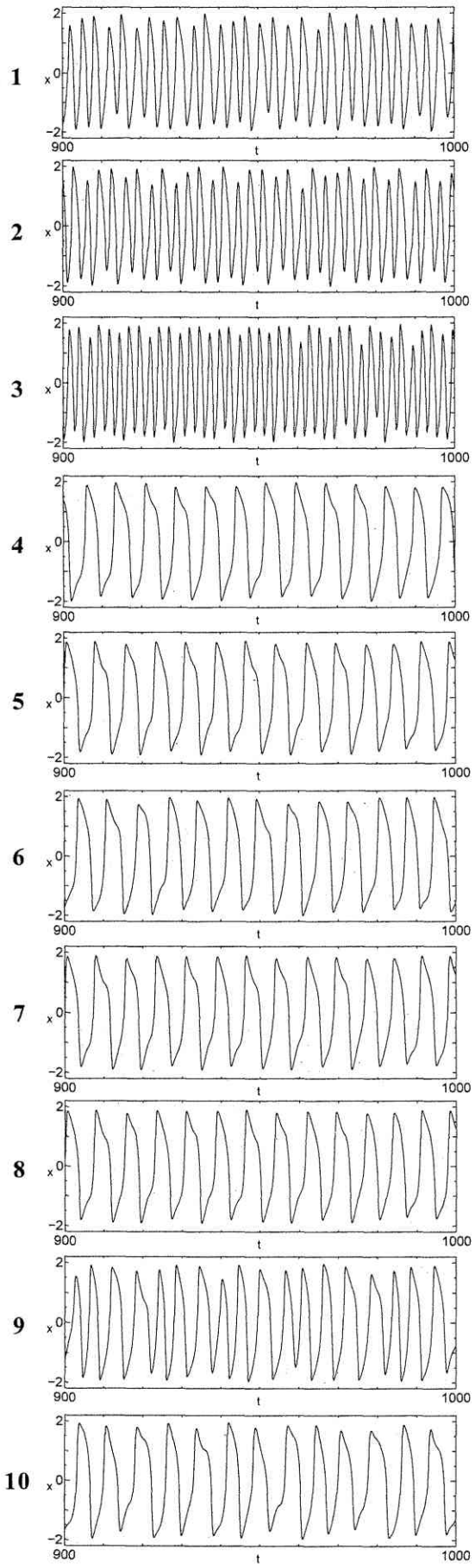


図 5. ネットワーク 1 の数値計算による波形

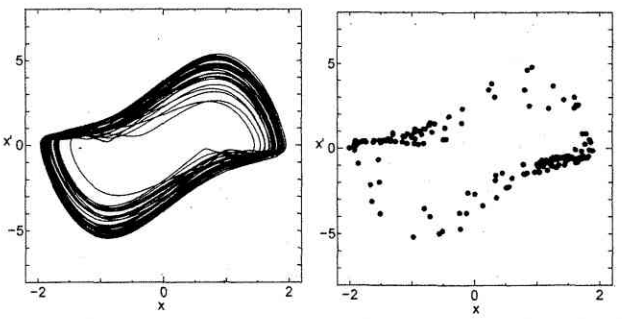


図 6. ネットワーク 1 の発振器 9 のアトラクタとポアンカレ写像

図 8,9 は作成したネットワークの模式図である。第 4 節で示したネットワーク 1 の分散は 4.24、ネットワーク 2 のリンク数の分散は 1.24、ネットワーク 3 のリンク数の分散は 0.24、また、各ネットワークの発振器 1 つあたりのリンク数の平均はいずれも 3.4 である。

これらのネットワーク 2、3 について、ネットワーク 1 と同様に 4 次ルンゲクッタ法を用いて数値計算を行った。それぞれのアトラクタとポアンカレ写像の一部を図 10,11 に示す。

図 6 で示したネットワーク 1 のアトラクタでは、分散の小さい他のネットワークのアトラクタに比べて大きな軌道の乱れが確認できる。また、ネットワーク 2 のポアンカレ写像は 3 のものよりもやや散らばっている。これらの結果から、結合発振器ネットワーク振動現象では分散が大きくなるほどカオス性が強くなることが確認できる。このことから、スケールフリー結合のリンクの数の偏りがネットワークのカオス性に影響を与えていることが分かる。

8. まとめ

本研究では、スケールフリーネットワーク結合した発振器の振動現象について調査を行った。

スケールフリーネットワーク結合された発振器ネットワークでは、発振器の振動に間欠性カオスがみられることが確認できた。また、この間欠性カオスは発振器の分散が強いほど大きくなることが分かった

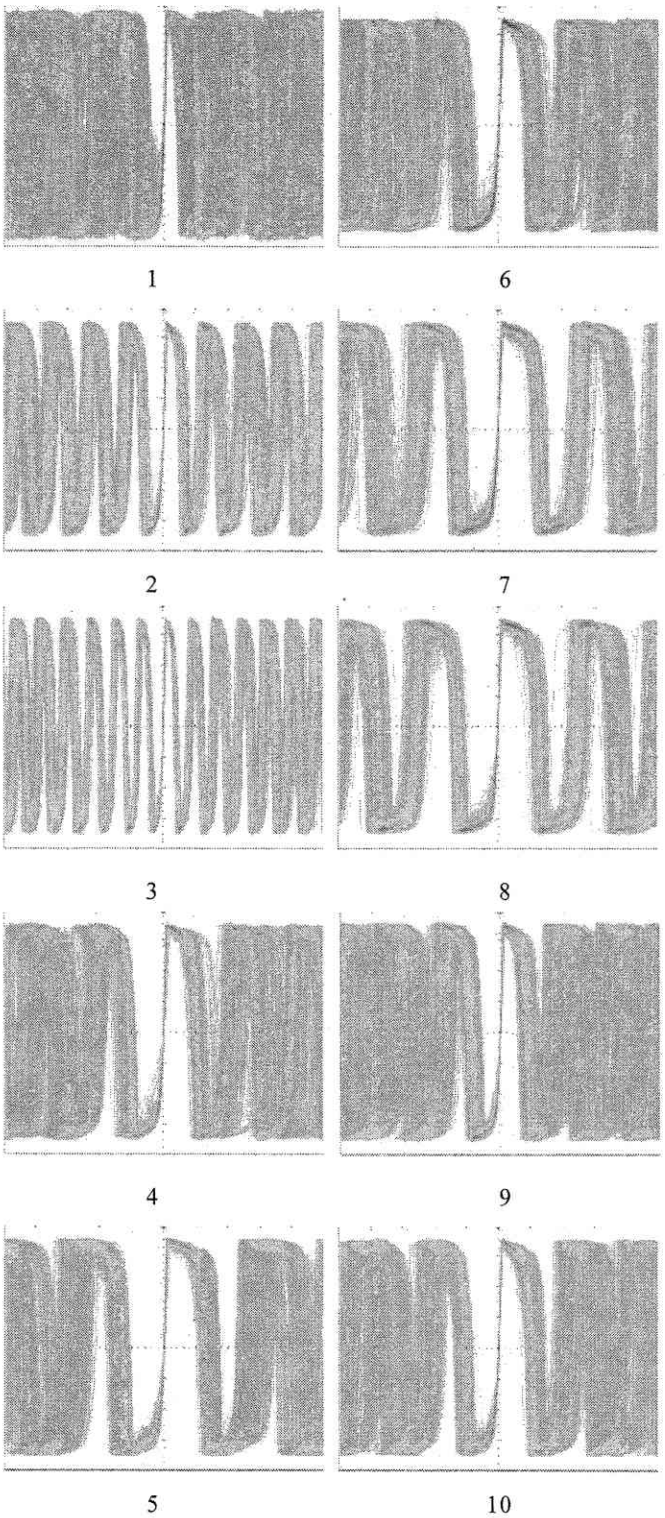


図 7. ネットワーク 1 の数値計算による波形

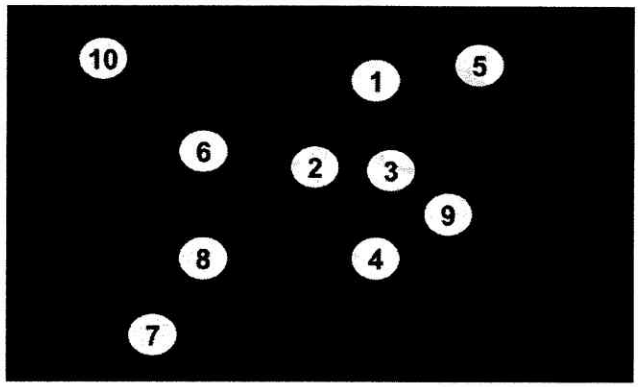


図 8.ネットワーク 2（$\sigma^2 = 1.24$）

表 2.ネットワーク 2 の各発振器のリンク数

発振器	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
リンク	4	4	3	6	2	4	3	3	2	3

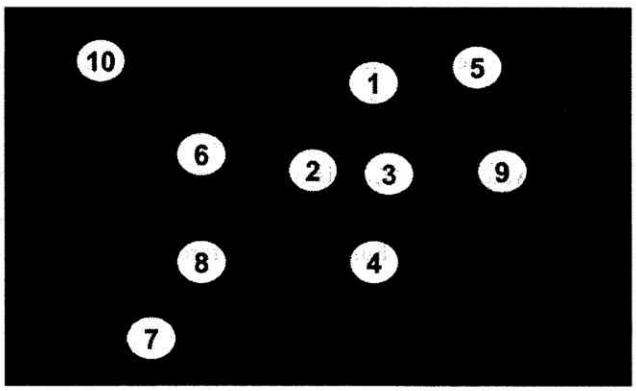


図 9.ネットワーク 3（$\sigma^2 = 0.24$）

表 3. ネットワーク 3 の各発振器のリンク数

発振器	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
リンク	4	4	3	4	3	4	3	3	3	3

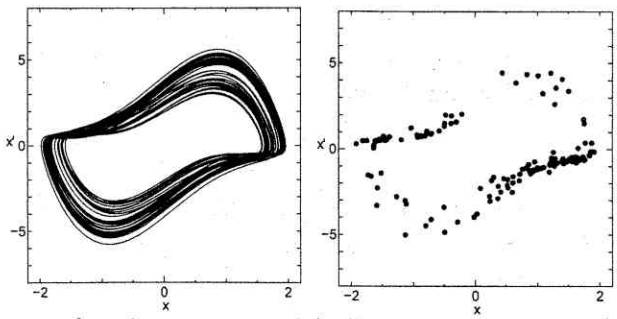


図 10. ネットワーク 2 の発振器 3 のアトラクタとポアンカレ写像

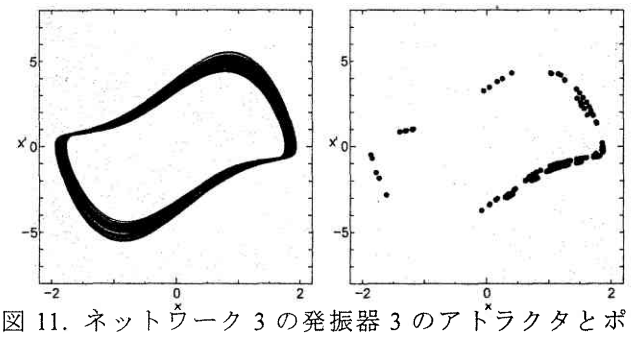


図 11. ネットワーク 3 の発振器 3 のアトラクタとポアンカレ写像

文　献

[1] S.Moro, Y.Nishio, and S.Mori, "Synchronization phenomena in oscillators coupled by one resistor," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E78-A, no.2, pp.244–253, Feb. 1995.

[2] S.Moro, Y.Nishio, and S.Mori, "On coupled oscillators networks for cellular neural networks," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E80-A, no.1, pp.214–222, Jan 1997.

[3] Y. Uwate and Y. Nishio, "Synchronization and frustration in coupled large-scale polygonal oscillatory networks," Proc. of European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD2011), pp.766–769, Sept. 2011.

[4] X. Liao, Q. Xia, Y. Qian, L. Zhang, G. Hu, and Y. Mi, "Pattern formation in oscillatory complex networks consisting of excitable nodes," Phys. Rev. E, vol.83, 056204, 2011.

[5] D.J. Watts and S.H. Strogatz, "Collective dynamics of 'small-world' networks," Nature, vol.393, pp.440–442, June 1998.

[6] A.-L. Barabási and R. Albert, "Emergence of scaling in random networks," Science, vol.286, pp.509–512, Oct. 1999.

[7] A.-L. Barabási, R. Albert and H. Jeong "Mean-field theory for scale-free random networks" Physica A, vol.272, pp.173–187, 1999.