

Amplitude switching phenomena in coupled networks of hard type oscillators

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2015-09-29 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 平野, 亮太, 北村, 拓也, 茂呂, 征一郎 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/8859

硬い発振器の結合ネットワークに見られる振幅切り替り現象

平野 亮太[†] 北村 拓也[†] 茂呂征一郎[†]

[†] 福井大学工学部 〒910-8507 福井市文京 3-9-1

E-mail: ††moro@u-fukui.ac.jp

あらまし 本研究では、非線形特性が5次多項式で表されるいわゆる硬い発振器を結合したランダムネットワークに見られる振動現象を調べている。我々は既に軟らかい発振器で構成される同様なネットワークにおいてカオス的な現象が見られることを報告してきた。本報告では、硬い発振器を用いたネットワークにおいて結合係数を変化させることにより、トーラスや、振幅が時間的にランダムに切り替わるような現象など、従来よりも多様な現象が見られることを数値計算によって確認する。

キーワード 結合発振器, 硬い発振器, 間欠性カオス, トーラス, ランダムネットワーク

Amplitude Switching Phenomena in Coupled Networks of Hard Type Oscillators

Ryota HIRANO[†], Takuya KITAMURA[†], and Seiichiro MORO[†]

[†] Faculty of Engineering, University of Fukui 3-9-1 Bunkyo, Fukui, 910-8507 Japan

E-mail: ††moro@u-fukui.ac.jp

Abstract In this study, we investigate the oscillation phenomena in a random-coupled network of hard-type oscillators whose nonlinear characteristics are represented by fifth-power polynomials. Recently, we have shown that the chaotic phenomena are seen in the network with soft oscillators whose nonlinear characteristics are represented by third-power polynomials. In this report, we show not only chaotic phenomena but also torus and random switching phenomena of amplitudes which are not shown in the networks with soft type oscillators by changing the coupling coefficients.

Key words coupled oscillators, hard type oscillators, intermittency chaos, torus, random networks

1. はじめに

近年、結合発振器の様々な同期現象や振動現象が盛んに報告されている [1]~[8]。その中で、我々は同じ固有振動数を持つ N 個の van der Pol 発振器を1つの抵抗で結合した星形結合系では、結合抵抗に流れる電流が最小になろうとするため、各発振器の電圧の位相が互いにずれて打ち消しあい、 N 相同期現象など様々な同期現象がみられること報告した [1]。それに伴い、このような発振器の結合系を様々な分野に応用することが考えられている。例えば、この星形結合系を格子状や蜂の巣状に配置したネットワークを、セルラーニューラルネットワークとして応用することなどが報告されている [2]。

一方で、ネットワークには格子状や蜂の巣状のような規則的なものばかりでなく、スモールワールドネットワークやスケールフリーネットワークのような複雑なつながりを持って構成されるものがある [9]~[11]。このうち、スケールフリーネットワークの特徴は、ほとんどのノードが非常に少数の接続しか持

たないが、少数の特定のノードは多くの接続を持つことである。この特徴からスケールフリーネットワークは、少数の接続しか持っていないノードがいくつか除去されたとしても、ネットワークの全体的な接続は維持される。しかし、多くの接続を持った一部の特定のノードが除去された場合、ネットワークは簡単に分断されてしまう。つまり、スケールフリーネットワークはランダムな除去に対しては堅牢だが、多くの接続を持っている一部のノードを狙って除去されることに対しては脆い性質を持つ。このようなスケールフリー性は、現実の世の中においても、インターネットの情報伝達や口コミの広がり方から、代謝ネットワークの働きのような生物学的分野にいたるまで幅広い、多くのネットワークにおいてみることができる。つまり、この性質を持つネットワークモデルのダイナミクスを調べることは、このような現実のネットワークの解析に利用できる可能性がある。

そこでこのような観点から、我々はこれまでにスケールフリーネットワーク結合された結合発振器ネットワークがどのような振

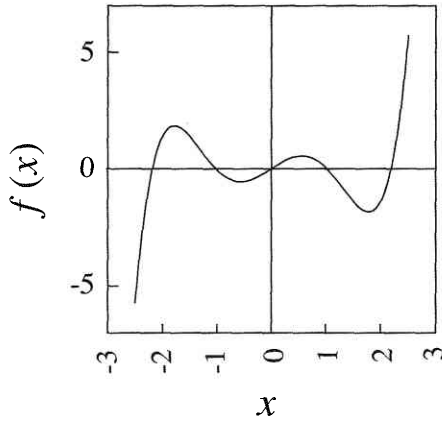


図1 5次多項式で表現される非線形特性.

Fig. 1 Nonlinear characteristics represented by fifth power polynomial.

動現象をおこなうのかについて報告した [8]. Barabási-Albert モデル [10], [11] によってスケールフリーネットワークモデルを作成し, それに基づいた発振器ネットワークの振動現象について調べた結果, スケールフリーネットワーク結合された発振器ネットワークの振動現象において間欠性カオスが見られるなど興味深い現象が得られた.

本研究では, この Barabási-Albert モデルに基づいた結合発振器ネットワークを, 非線形特性が5次多項式で表されるような硬い発振器 [12] を用いて構成し, そこに見られる現象を数値解析によって調べる. 硬い発振器の結合系は, 初期値によらず必ず発振する軟らかい発振器とは異なり, 発振するか否かは初期値に依存する. そのため, 硬い発振器の結合系ではより多様な現象が見られることが報告されている [5]~[7]. 本報告では, 硬い発振器を用いたネットワークにおいて結合係数を変化させることにより, トーラスや, 振幅が時間的にランダムに切り替わるような現象など, 軟らかい発振器の結合系では見られない多様な現象が見られることを確認する.

2. 硬い発振器とその結合系

硬い発振器 [12] は LC 共振回路と図1で示される5次多項式で表現されるような電圧-電流特性を持つ非線形負性抵抗によって構成される. 通常の van der Pol 発振器は非線形特性が3次多項式で表され, 状態空間では原点が不安定平衡点となり, 更に安定なリミットサイクルを持つ. したがって, 原点を除く全ての初期値からスタートした解は, 定常状態においてリミットサイクルに収束する. 即ち, 初期値によらず発振することになる. このような発振器は軟らかい発振器と呼ばれる. 一方, 硬い発振器は図1の原点付近の正の傾きにより, 状態空間では原点が安定平衡点となる. したがって, 原点付近を初期値とする解は原点に収束することとなり, 発振しない. 原点から離れた領域では, 電圧-電流特性は軟らかい発振器と同様となっているので, やはり安定なリミットサイクルも存在する. よって, 原点から離れた点を初期値とする解はリミットサイクルに収束する. 以上より, 図1のような非線形特性を持つ発振器において

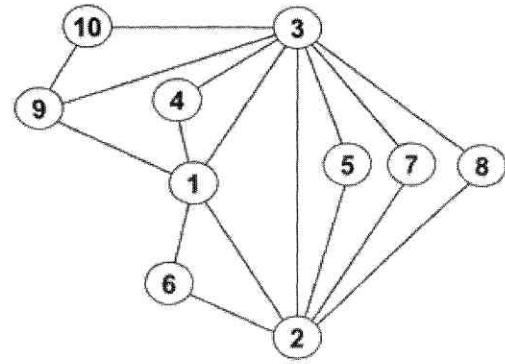


図2 Barabási-Albert モデルによるネットワークモデル.

Fig. 2 Network model with Barabási-Albert model.

表1 ネットワークの各発振器のリンク数.

Table 1 Number of links of each oscillator in the network.

node k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
number of links	5	6	8	2	2	2	2	2	3	2

は, 初期値を変化させることにより, 発振するかしないかを選択することができる. このような発振器は硬い発振器と呼ばれる. このような硬い発振器の結合系においては, 軟らかい発振器の結合系では見られないような多様な現象が見られることがこれまでに多く報告されている [1], [2], [5]~[7].

3. Barabási-Albert モデル

Barabási-Albert モデルは Barabási と Albert が提案したスケールフリーネットワークのモデルである [10], [11]. このモデルは, m_0 個のノードからなる初期ネットワークに, 1 ステップ毎に n 本のリンクをもった新しいノードが追加されていく成長型のネットワークである. ネットワークのノード i が新たなリンクの接続先には選ばれる確率 Π_i は次式によって決定され, リンクを多くもつノードであるほど高い.

$$\Pi_i = \frac{N_i}{\sum_j N_j} \quad (1)$$

ここで, i はネットワークのノードの番号, N_i は各ノードがもつリンクの数である.

4. 回路モデル

$m_0 = 2, n = 2$ として Barabási-Albert モデルを用いてネットワークを作成する. 作成したネットワークを図2に示す. このネットワークモデルから構成した発振器ネットワークを図3に示す. このとき, 各発振器の持つリンク数は表1のようになる.

ネットワークの回路方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} C \frac{dv_k}{dt} &= - \sum_l i_{kl} - i_r(v_k) \\ L \frac{di_{kl}}{dt} &= v_k - R_0 i_{kl} - R(i_{kl} + i_{lk}) \\ i_r(v_k) &= g_1 v_k - g_3 v_k^3 + g_5 v_k^5 \\ (k &= 1, 2, \dots, 10, \quad l = 1, 2, \dots, 10) \end{aligned} \quad (2)$$

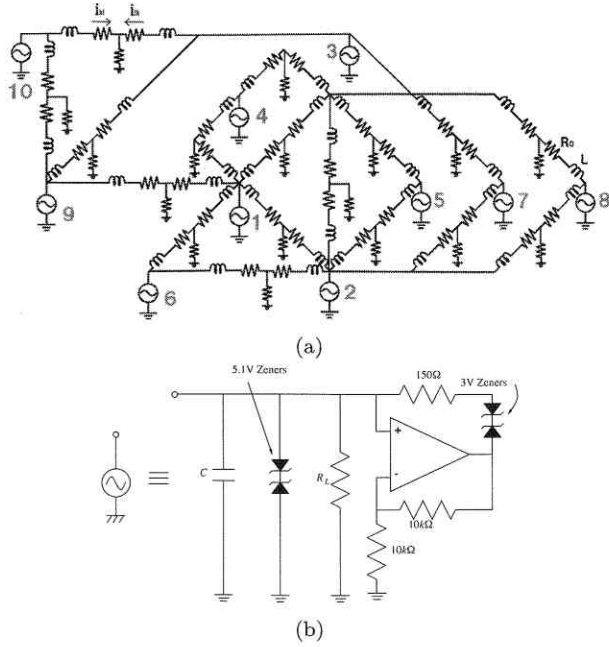


図3 (a) 結合発振器ネットワーク. (b) 硬い発振器の構成.
Fig.3 (a) Coupled oscillators network. (b) Construction of a hard type oscillator.

ただし、 k は各ノードの番号、 l はノード k とつながっているノードの番号である。この式は

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt{LC}\tau, \\
 v_k &= \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} x_k, \quad i_k = \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} y_k, \\
 \alpha &= R\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \beta = \frac{3g_3}{g_1} \sqrt{\frac{g_1}{5g_5}}, \\
 \gamma &= R_0\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \varepsilon = g_1\sqrt{\frac{L}{C}}
 \end{aligned}$$

なる変数変換により、

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_k &= -\sum_l y_{kl} - \varepsilon \left(x_k - \frac{1}{3}x_k^3 + \frac{1}{5}x_k^5 \right) \\
 \dot{y}_{kl} &= x_k - \gamma y_{kl} - \alpha(y_{kl} + y_{lk}) \\
 (k &= 1, 2, \dots, 10, \quad l = 1, 2, \dots, 10)
 \end{aligned} \tag{3}$$

と正規化される。ここで、 α は結合の強さ、 ε は非線形性の強さ、 β は振幅の大きさ、 γ はインダクタの内部抵抗の大きさを表すパラメータである。

次節において式 (3) の数値解析により、本提案ネットワークに見られる現象を調べる。

5. 数値解析結果

本節では、硬い発振器によるランダムネットワークにおける振動現象を、式 (3) の4次ルンゲ・クッタ法による数値解析によって調べる。ここで、各パラメータは $\beta = 4.5$, $\varepsilon = 0.5$, $\gamma = 0.026$ と固定し、結合係数 α を $\alpha = 0.5, 1.0, 3.0, 5.0$ 変化させた場合の現象について調べる。

まず、図4~7にそれぞれの α に対する時間波形を示す。いずれの図においても非周期的な波形が見られていることがわか

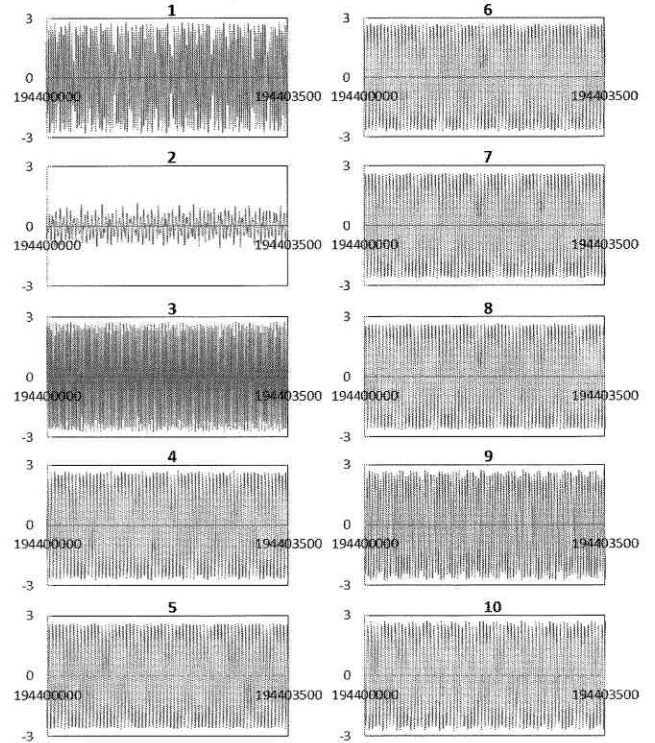


図4 $\alpha = 0.5$ における時間波形.
Fig.4 Time waveform for $\alpha = 0.5$.

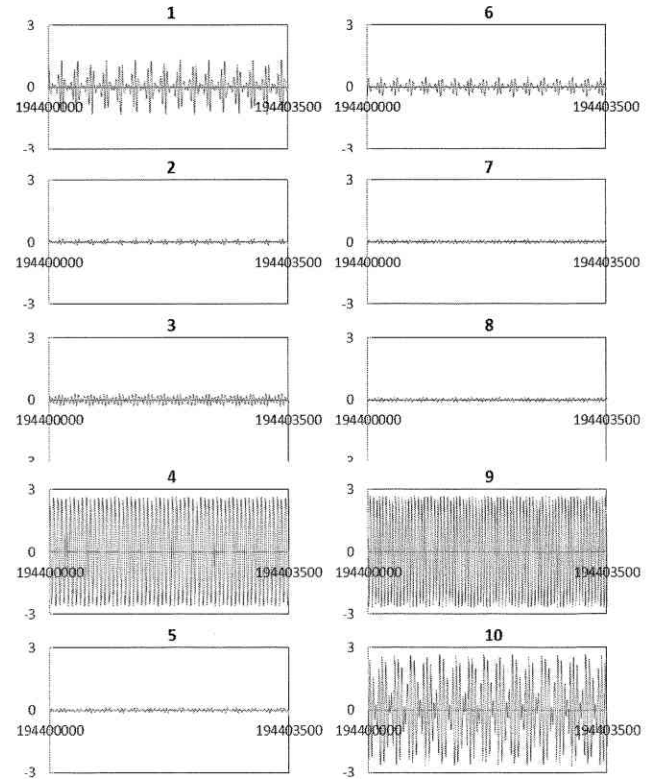


図5 $\alpha = 1.0$ における時間波形.
Fig.5 Time waveform for $\alpha = 1.0$.

る。文献[8]で示される軟らかい発振器の結合系では、どの発振器もほぼ同じ振幅で振動していたのに対し、本システムでは、図4~6までに見られるように、大きな振幅で振動する発振器

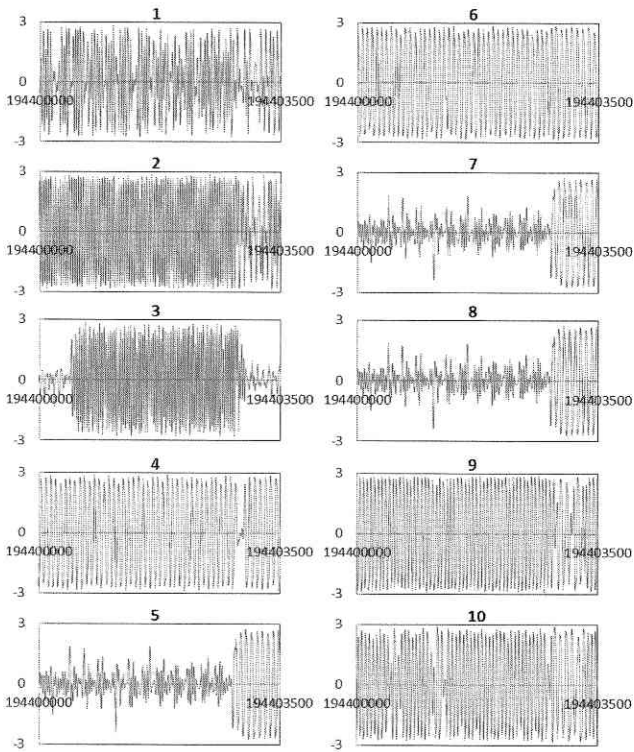


図 6 $\alpha = 3.0$ における時間波形.
Fig. 6 Time waveform for $\alpha = 3.0$.

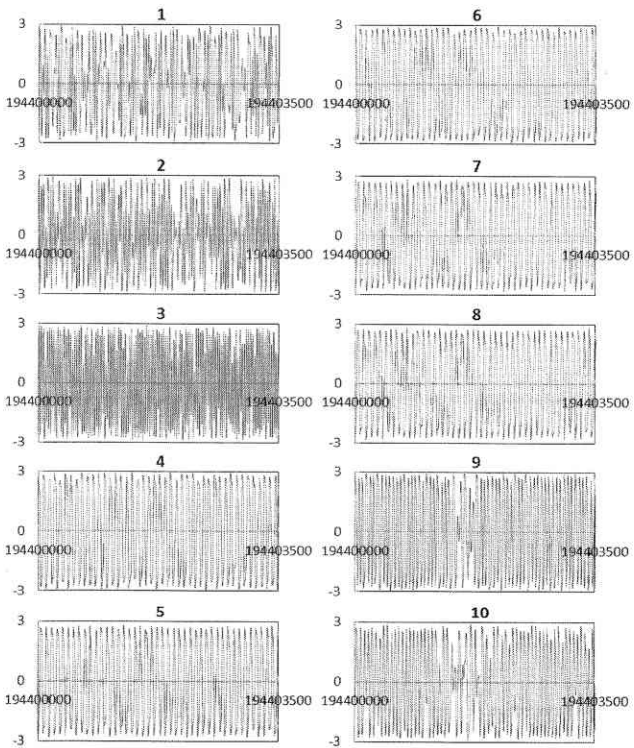


図 7 $\alpha = 5.0$ における時間波形.
Fig. 7 Time waveform for $\alpha = 5.0$.

と小さな振幅で振動する発振器が混在するようになる。更に特徴的な点として、 $\alpha = 0.5$ あるいは 1.0 の、結合係数が比較的小さい場合には、大振幅のものは大振幅のまま、小振幅のものは小振幅のまま振動し続けるのに対し、図 6 に示されよう

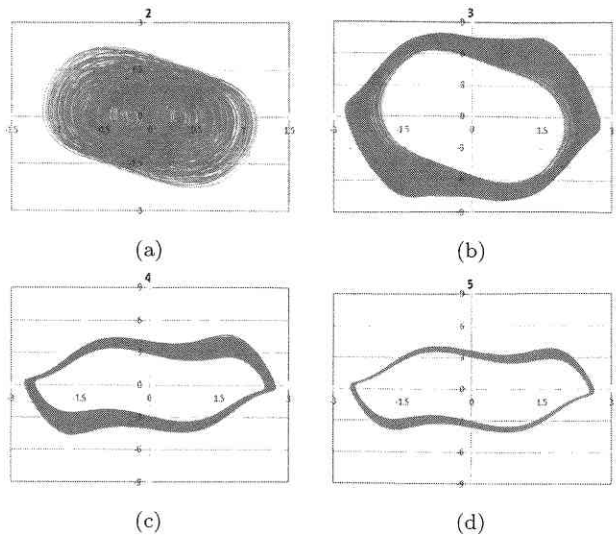


図 8 $\alpha = 0.5$ におけるアトラクタ. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .
Fig. 8 Attractor for $\alpha = 0.5$. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

$\alpha = 3.0$ と大きくすると、発振器の振幅が大振幅と小振幅で断続的に切り替わるような現象が見られる。この振幅の切り替りはランダムなタイミングで起こるため、このパラメータにおいては時空カオスの現象が起きていると考えられる。さらに α を大きくすると、この振幅切り替り現象は起こらなくなり、大振幅のみの振動現象となる (図 7 参照)。

更に現象を詳細に調べるため、各発振器のアトラクタとポアンカレ写像を示す。図 8~11 はそれぞれの α に対する $x_2 \sim x_5$ のアトラクタを示しており、図 12~15 はそれぞれの α に対する $x_2 \sim x_5$ の、断面 $x_1 = 0, x_1 > 0$ に対するポアンカレ写像を示している。これらの結果、 $\alpha = 0.1, 3.0, 5.0$ の場合にはカオス的な振る舞いが見られるのに対し、 $\alpha = 3.0$ ではトーラスが見られることがわかる。トーラス現象は軟らかい発振器の結合系では見られなかった現象であり、硬い発振器による結合系を用いることで現象が多様化することが確認できた。

以上より、硬い発振器をランダム結合したシステムでは、軟らかい発振器の結合系で見られた間欠性カオスだけではなく、振幅の切り替りによる時空カオスの現象やトーラス現象など、興味深い現象が見られた。軟らかい発振器を用いた場合に比べ、多様な現象が見られることが確認できたことはたいへん興味深いことであると考えられる。

6. むすび

本報告では、Barabási-Albert モデルに基づいた結合発振器ネットワークを、非線形特性が 5 次多項式で表されるような硬い発振器を用いて構成し、そこに見られる現象を調べた。本システムでは軟らかい発振器の結合系で見られた間欠性カオスだけではなく、振幅の切り替りによる時空カオスの現象やトーラス現象など、興味深い現象が見られることがわかった。我々の知るかぎり、硬い発振器をランダム結合したネットワークに関する研究はあまり行われておらず、本研究で得られた結果は今後の結合発振器ネットワークの研究に重要な役割を果たすもの

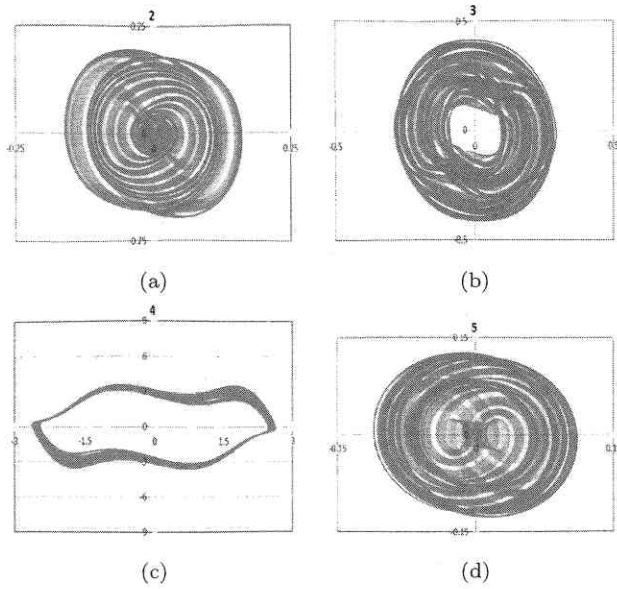


図9 $\alpha = 1.0$ におけるアトラクタ. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .
Fig. 9 Attractor for $\alpha = 1.0$. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

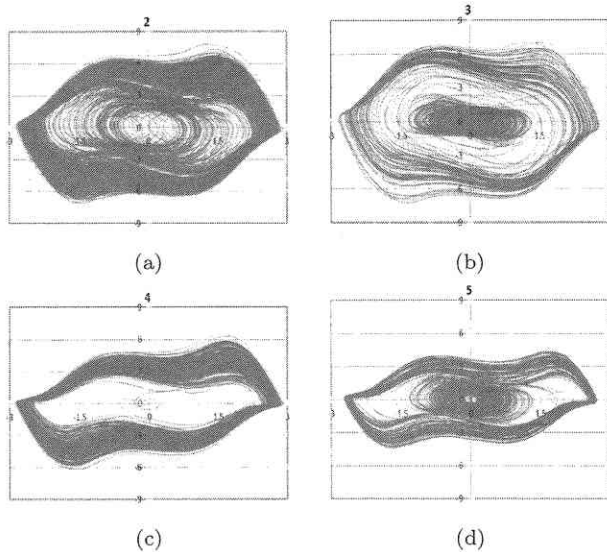


図10 $\alpha = 3.0$ におけるアトラクタ. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .
Fig. 10 Attractor for $\alpha = 3.0$. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

と確信している。

今後の課題として、ネットワークの形状による現象の依存性や、 α 以外のパラメータに対する現象の変化の解析が必要であると考えられる。

文 献

- [1] S. Moro, Y. Nishio, and S. Mori, "Synchronization phenomena in oscillators coupled by one resistor," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E78-A, no.2, pp.244–253, Feb. 1995.
- [2] S. Moro, Y. Nishio, and S. Mori, "On coupled oscillators networks for cellular neural networks," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E80-A, no.1, pp.214–222, Jan. 1997.
- [3] Y. Uwate and Y. Nishio, "Synchronization and frustration in coupled large-scale polygonal oscillatory networks," *Proc. of European Conference on Circuit Theory and Design (ECTD2011)*, pp.766–769, Sept. 2011.
- [4] X. Liao, Q. Xia, Y. Qian, L. Zhang, G. Hu, and Y. Mi, "Pattern formation in oscillatory complex networks consisting of

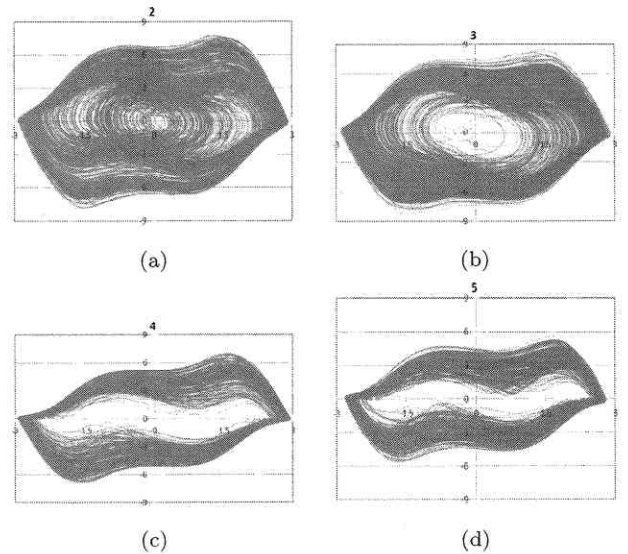


図11 $\alpha = 5.0$ におけるアトラクタ. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .
Fig. 11 Attractor for $\alpha = 5.0$. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

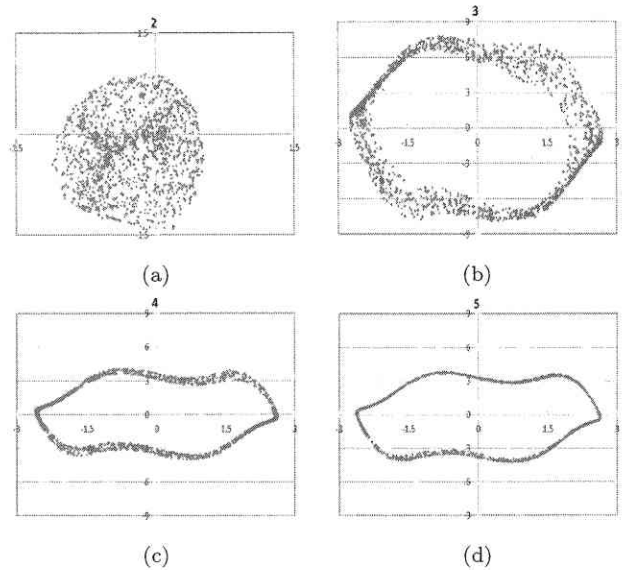


図12 $\alpha = 0.5$ におけるポアンカレ写像. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .
Fig. 12 Poincaré map for $\alpha = 0.5$. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

excitable nodes," *Phys. Rev. E*, vol.83, 056204, 2011.

- [5] S.P. Datardina and D.A. Linkens, "Multimode oscillations in mutually coupled van der Pol type oscillators with fifth-power nonlinear characteristics," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.CAS-25, no.5, pp.308–315, May 1978.
- [6] 茂呂征一郎, 森真作, 笹瀬巖, "硬い発振器の結合ネットワークに見られる準周期振動," *信学論 (A)*, vol.J81-A, no.6, pp.999–1002, June 1998.
- [7] K. Kamiyama, M. Komuro, and T. Endo, "Bifurcation of quasi-periodic oscillations in mutually coupled hard-type oscillators: Demonstration of unstable quasi-periodic orbits," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol.22, no.6, pp.1230022–1–1230022–13, 2012.
- [8] T. Kitamura and S. Moro, "Chaotic oscillations in coupled oscillators networks with scale-free property," *Proc. of International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2014)*, pp.373–376, Sept. 2014.
- [9] D.J. Watts and S.H. Strogatz, "Collective dynamics of

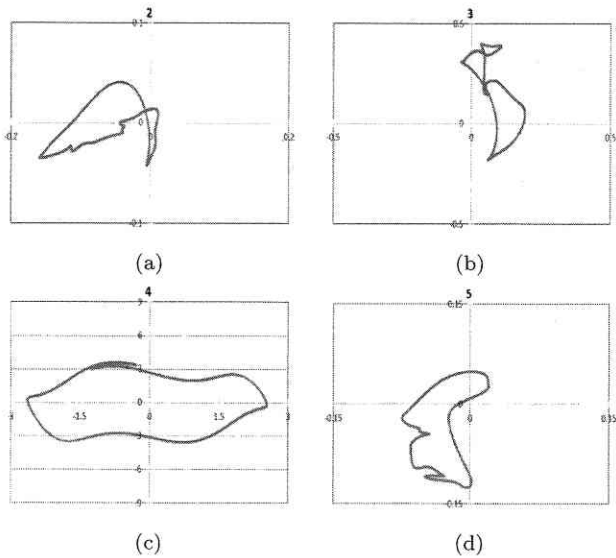


図 13 $\alpha = 1.0$ におけるポアンカレ写像. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

Fig. 13 Poincaré map for $\alpha = 1.0$. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

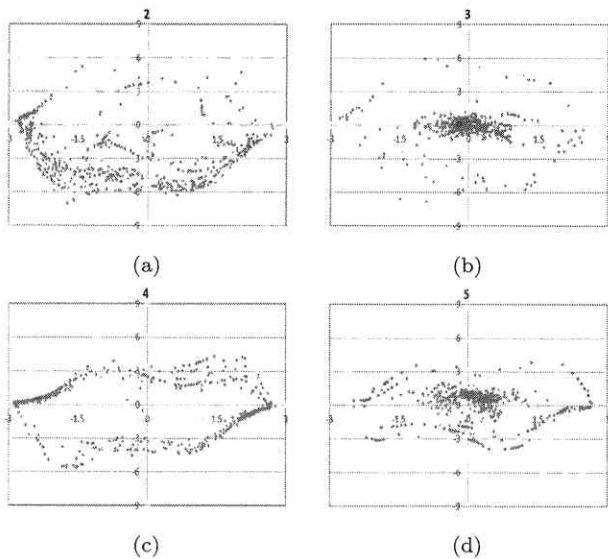


図 14 $\alpha = 3.0$ におけるポアンカレ写像. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

Fig. 14 Poincaré map for $\alpha = 3.0$. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

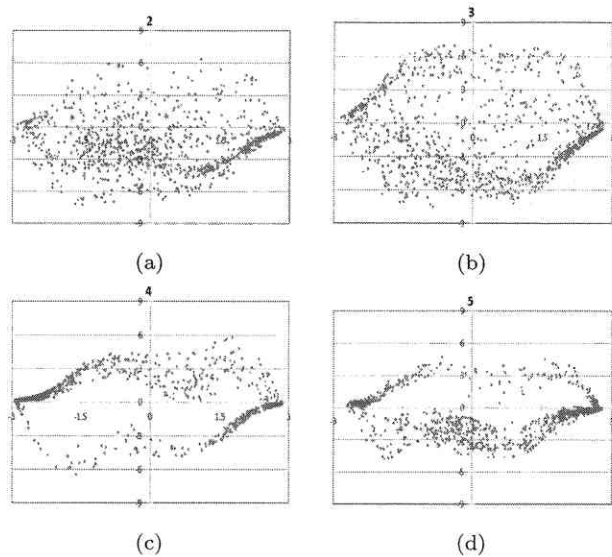


図 15 $\alpha = 5.0$ におけるポアンカレ写像. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

Fig. 15 Poincaré map for $\alpha = 5.0$. (a) x_2 , (b) x_3 , (c) x_4 , (d) x_4 .

‘small-world’ networks,” Nature, vol.393, pp.440–442, June 1998.

- [10] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” Science, vol.286, pp.509–512, Oct. 1999.
- [11] A.-L. Barabási, R. Albert and H. Jeong, “Mean-field theory for scale-free random networks,” Physica A, vol.272, pp.173–187, 1999.
- [12] 志村正道, 非線形回路理論, 昭晃堂, 1969.