特異要素を用いた有限要素解析による応力拡大係数誤差評価指標

日本機械学会論文集(A編)
66巻652号(2000-12)

論文 No. 00-0704

特異要素を用いた有限要素解析による応力拡大係数誤差評価指標*

飯 井 俊 行*1, 渡 邊 勝 彦*2

Error Index for Stress Intensity Factor Evaluation by Finite Element Analysis with Singular Elements

Toshiyuki MESHII*3 and Katsuhiko WATANABE

*3 Fukui University, Dept. of Mechanical Engineering,
Bunkyo 3-9-1, Fukui, Fukui, 910-8507 Japan

Error index for stress intensity factor (SIF) obtained from the results of finite element analysis (FEA) using singular elements was developed by taking advantage of the facts that the functional shape of displacement solution around a crack tip is known and that the SIF can be evaluated only by the displacements. The error index has a dimension of SIF and converges to zero when the actual error of SIF by displacement correlation technique converges to zero. Finite element analyses were carried out for some typical crack problems, including a mixed mode crack, whose analytical solutions are known and the validity of the index was concretely demonstrated through the comparison between the variations of error and index with the sizes of singular element. The degree of error seems to be justly estimated through the value of index.

Key Words: Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Finite Element Method, Error Index, Singular Element

1. 緒　　言

任意の荷重を受ける構造物中のき裂の健全性評価を行うために有限要素解析を行い，その結果をもとに応力拡大係数（K値）を評価することが広く行われている．これはK値の解が存在しない場合に特に有効な手法となるが，その実用にあたっては得られたK値解の精度判定が重要な課題となる．

有限要素解析にてき裂を含む構造を扱う場合，き裂先端における応力の特異性を表現・評価するために多くの手法が考案されている．この中で有力なものの一つがBarsoum[1]とHenshell, Shaw[2]が独立に提案した特異要素を用いて特異性を表し，Tracey[3]の式によりK値を評価する手法（変位法：Displacement Correlation Technique, 以下DCT）である．この手法の特徴は比較的粗い要素分割で実用的に十分な精度のK値を得ることが期待できる点にあり，過去において多くの研究者がこの特異要素を用いたK値評価において，K値精度を確保するための特異要素寸法選定に関する研究を行ってきた．しかしながら，現在においては要素寸法のみならず，荷重条件もK値に影響を及ぼすことが指摘され，あらゆる条件を満足する特異要素の最適寸法は存在しないとの見解に至っている[4]．

一般に有限要素解析によるK値の解は要素数を増加させることによりその精度は向上する．しかし工学問題である以上（特に特異要素を用いるメリットを最大限生かすためにも）少ない要素数で十分な精度の解が得られることが望ましく，その実現のためには一度の解析を通じてK値の解と共にその誤差の程度を見積もることができ，それを踏まえた補正や得られた解の実用的観点からの適否を判断することができれば都合がよい．一般に弾性問題における有限要素解の誤差評価においてはZienkiewicz, Zhuら[5]が提案したエネルギノルムを用いての誤差指標の考え方を適用することが考えられる[6]．しかしこの誤差指標はK値の次元を持たないため，この指標が小さくなる場合にK値の誤差も小さくなることは期待できても，そのK値の誤差の程度を知ることはできない．そこで本研究ではき裂先端変位場の関数形が既知であり，特異要素についてはこの変位の関数形を一部表現しうること，またK値

* 原稿受付　2000年6月1日．
*1 正員，福井大学工学部(〒910-8507 福井市文京3-9-1)．
*2 正員，東京大学生産技術研究所(〒153-8505 東京都目黒区駒場4-6-1)．
E-mail：meshii@mech.fukui-u.ac.jp

をき裂先端要素の変位のみから評価しうることに着目し，K値の次元を有する誤差指標を開発した．

以下開発した誤差指標の考え方をまず述べ，続いて解析解が存在する二次元弾性問題への適用例を通しその有用性を示す．

2. DCE (Displacement Correlation Error) Index の提案

き裂先端を原点，き裂の上下面を各々$\theta=\pm\pi$とする極座標系（r, θ）を考える（図1）．このとき，x, y方向各々の変位u, vの一般解は，

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{r^{n/2}}{2G}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ A_{\mathrm{I}n}\begin{bmatrix} f_{\mathrm{I}un}(\theta) \\ f_{\mathrm{I}vn}(\theta) \end{bmatrix} - A_{\mathrm{II}n}\begin{bmatrix} f_{\mathrm{II}un}(\theta) \\ f_{\mathrm{II}vn}(\theta) \end{bmatrix} \right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

として与えられる．ここにGはせん断弾性係数，関数$f_{\mathrm{I}un}$, $f_{\mathrm{I}vn}$, $f_{\mathrm{II}un}$, $f_{\mathrm{II}vn}$は次式により与えられ，添字のI, IIは各々モードI, IIに，そしてu, vは各々x, y方向の変位に対応することを表す．κはνをポアッソン比として平面ひずみ場にて$(3\text{-}4\nu)$，平面応力場に対し$(3\text{-}\nu)/(1+\nu)$となる量である．

$$\begin{bmatrix} f_{\mathrm{I}un}(\theta) \\ f_{\mathrm{I}vn}(\theta) \\ f_{\mathrm{II}un}(\theta) \\ f_{\mathrm{II}vn}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{2}\cos\left(\dfrac{n}{2}-2\right)\theta + \left(\kappa+\dfrac{n}{2}+(-1)^n\right)\cos\dfrac{n\theta}{2} \\ \dfrac{n}{2}\sin\left(\dfrac{n}{2}-2\right)\theta - \left(-\kappa+\dfrac{n}{2}+(-1)^n\right)\sin\dfrac{n\theta}{2} \\ -\dfrac{n}{2}\sin\left(\dfrac{n}{2}-2\right)\theta + \left(\kappa+\dfrac{n}{2}-(-1)^n\right)\sin\dfrac{n\theta}{2} \\ -\dfrac{n}{2}\cos\left(\dfrac{n}{2}-2\right)\theta - \left(\kappa-\dfrac{n}{2}+(-1)^n\right)\cos\dfrac{n\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots(2)$$

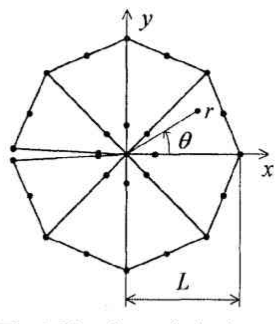

Fig. 1 Singular crack tip elements

ここで$f_{\mathrm{I}vn}$, $f_{\mathrm{II}un}$が奇関数，$f_{\mathrm{I}un}$, $f_{\mathrm{II}vn}$が偶関数であることより，x軸をはさんで上下対称点の相対変位を考えるとそれらは単一のモードで表わされる（モード分離）[7]．

$$\begin{bmatrix} u^*(r,\theta) \\ v^*(r,\theta) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u(r,\theta)-u(r,-\theta) \\ v(r,\theta)-v(r,-\theta) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{\frac{n}{2}}}{G}\begin{bmatrix} -A_{\mathrm{II}n}f_{\mathrm{II}un}(\theta) \\ A_{\mathrm{I}n}f_{\mathrm{I}vn}(\theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

一方，特異要素を用いる有限要素解析では，特異要素の一辺上の変位$(U(r,\theta), V(r,\theta))$を解析の結果得られたその辺上のquarter point, end pointの節点変位を用いることにより次式として表す．

$$\begin{bmatrix} U(r,\theta) \\ V(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(0,\theta) \\ V(0,\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3U(0,\theta)+4U(L/4,\theta)-U(L,\theta) \\ -3V(0,\theta)+4V(L/4,\theta)-V(L,\theta) \end{bmatrix}\sqrt{\frac{r}{L}} + \begin{bmatrix} 2U(0,\theta)-4U(L/4,\theta)+2U(L,\theta) \\ 2V(0,\theta)-4V(L/4,\theta)+2V(L,\theta) \end{bmatrix}\frac{r}{L}$$

$$\cdots\cdots(4)$$

特異要素についても$U^*(r,\theta)\equiv U(r,\theta)-U(r,-\theta)$, $V^*(r,\theta)\equiv V(r,\theta)-V(r,-\theta)$を導入することにより式(3)にならったモード分離を行い次式を得る．

$$\begin{bmatrix} U^*(r,\theta) \\ V^*(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4U^*(L/4,\theta)-U^*(L,\theta) \\ 4V^*(L/4,\theta)-V^*(L,\theta) \end{bmatrix}\sqrt{\frac{r}{L}} + \begin{bmatrix} -4U^*(L/4,\theta)+2U^*(L,\theta) \\ -4V^*(L/4,\theta)+2V^*(L,\theta) \end{bmatrix}\frac{r}{L} \quad \cdots\cdots(5)$$

この特異要素を用いた計算結果よりK値を評価する手法は種々あるが，よく用いられるものの一つにTraceyの評価式[3]がある．このK値評価式ではき裂面上（$\theta=\pi$）で式(5)と変位の一般解式(3)にて級数の第2項までをとる場合と対応づけることによりK値K_{DCT}を評価している．具体的には，$f_{\mathrm{I}v1}(\pi)=f_{\mathrm{II}u1}(\pi)=\kappa+1$, $A_{\mathrm{I}1}=K_{\mathrm{I\,DCT}}/(2\pi)^{1/2}$, $A_{\mathrm{II}1}=-K_{\mathrm{II\,DCT}}/(2\pi)^{1/2}$, $G'\equiv(2\pi/L)^{1/2}G/(1+\kappa)$とおくことにより，

$$\begin{bmatrix} K_{\mathrm{II\,DCT}} \\ K_{\mathrm{I\,DCT}} \end{bmatrix} = G'\begin{bmatrix} 4U^*(L/4,\pi)-U^*(L,\pi) \\ 4V^*(L/4,\pi)-V^*(L,\pi) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(6)$$

このときK_{DCT}では$\theta=\pi$に対しK値を評価しているが，特異要素は変位の解析解が示すべきθ特性が保証されているわけではないので，他の特異要素の辺上変位からK値を評価する場合のK値は一般に式(6)で求めたK_{DCT}と異なることに留意したい．

さて，き裂先端の十分に小さい領域を選んだ結果$O(r^{3/2})$以上の高次項の影響が十分小さいとの条件が満足される場合には，式(3)にて級数の第2項まで考えることによりこの領域の変位を十分な精度で表わすことができる．ここでき裂面上に着目し，$f_{\mathrm{I}v2}(\pi)=0$, $f_{\mathrm{II}u2}(\pi)=0$であることより，式(3)は真のK値K_{I}, K_{II}を用いて次のように表わされる．

$$\begin{bmatrix} u^*(r,\pi) \\ v^*(r,\pi) \end{bmatrix} = \frac{1}{G'}\sqrt{\frac{r}{L}}\begin{bmatrix} -A_{\mathrm{II}1} \\ A_{\mathrm{I}1} \end{bmatrix} = \frac{1}{G'}\sqrt{\frac{r}{L}}\begin{bmatrix} K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{I}} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(7)$$

一方特異要素のき裂面上の$U^*(r,\pi)$, $V^*(r,\pi)$は式(6)にて定義した$K_{\mathrm{I\,DCT}}$, $K_{\mathrm{II\,DCT}}$を用いて次式で表わされる．

$$\begin{bmatrix} U^*(r,\pi) \\ V^*(r,\pi)\end{bmatrix} = \frac{1}{G'}\sqrt{\frac{r}{L}}\begin{bmatrix}K_{\rm IIDCT}\\ K_{\rm IDCT}\end{bmatrix} + \frac{2r}{L}\begin{bmatrix} U^*(L,\pi)-2U^*(\frac{L}{4},\pi)\\ V^*(L,\pi)-2V^*(\frac{L}{4},\pi)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(8)$$

ここでFEAによる各節点の変位は，変位関数に含まれる未定係数（特異要素の場合 $r^{1/2}$，r の項の未定係数）を，エネルギの意味で最適になるように決定して与えられるものであり，真の変位の解が特異要素の変位関数に含まれていない限り，式(8)の r/L の係数は零とはならない．しかしここで用いる要素は適合要素であることから[1]，要素を限りなく小さくしていくとき（r 方向だけでなく θ 方向の分割も小さくする必要があることに注意），有限要素解は真の解に近づくので，式(8)の第2項は0に，$K_{\rm DCT}$は真の解に収束する．従って式(8)の第2項はK値の誤差の目安となる可能性があり，式(8)の r/L の係数に$(-G'/2)$を乗じK値の次元を持たせた次の$\Delta K_{\rm DCE}$(Displacement Correlation Error Index)を誤差指標として提案しDCE Indexと呼ぶことにする．

$$\begin{bmatrix}\Delta K_{\rm IDCE}\\ \Delta K_{\rm IIDCE}\end{bmatrix} = G'\begin{bmatrix}2V^*(L/4,\pi)-V^*(L,\pi)\\ 2U^*(L/4,\pi)-U^*(L,\pi)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(9)$$

誤差指標DCE Indexの特長は特異要素の変位より直接評価が可能であること，要素を無限に小さくしていくと零に収束すること，さらにK値そのものの次元を持つという点にある．その結果従来提案されている他の誤差指標にありがちな数回の解析によりその収束をみるという性格のものではないため，ただ一度の解析によりK値誤差を推定できる可能性がある．これは解析に要する労力，結果的にコストを大幅に低減する可能性を示唆するものである．

3. 数値計算例

以下，解析解が存在する二次元弾性問題に対し特異要素を用いたFEAを行い，DCTにより評価したK値 $K_{\rm DCT}$と解析解 $K_{\rm ref}$の差 $K_{\rm error}=(K_{\rm DCT}-K_{\rm ref})$をDCE Index $\Delta K_{\rm DCE}$と比較した．いずれもヤング率E=206 GPa，ポアッソン比ν=0.3とした．κは円筒環状き裂の問題では平面ひずみ条件，他は平面応力条件として評価した．また特異要素数 m は 8 [8]から始め16, 24, 30と増加させ，特異要素寸法比L/aについてはかつてガイドラインと考えられていた0.05~0.20[8]にほぼ対応しL/aを1/3, 1/6, 1/12, 1/24と変化させた（具体的には特異要素のみを再分割）．

3・1 一様引張を受ける片側き裂梁 図2左にて一様引張σ=9.8 MPaを受ける幅W=10 mm，長さH=2W=20 mmの片側き裂はりに無次元き裂長さa/W=0.1，0.3のき裂が存在する場合につきその各々に対し$K_{\rm I\,DCT}$を求め，これと次式$K_{\rm I\,ref}$[9]より求まる$K_{\rm I\,error}$を$\Delta K_{\rm IDCE}$と比較した結果（m=16）を図2右に示す．

$$K_{\rm I\,ref} = \sigma\sqrt{\pi a} \times\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}\tan\frac{\pi\xi}{2}}\cdot\frac{0.752+2.02\xi+0.37\{1-\sin(\pi\xi/2)\}^3}{\cos(\pi\xi/2)} \quad \cdots\cdots(10)$$

図中特に説明はしていないが，各a/W毎にL/aに対応する4個のデータがあり，L/aと$\Delta K_{\rm IDCE}$の大小関係が対応している．図中$K_{\rm I\,error}$と$\Delta K_{\rm I\,DCE}$の差は各点と原点を通る傾き1の直線との垂直方向距離として表され，その最大値はa/W=0.1のL/a=1/3のときの0.0156，すなわち$K_{\rm I\,ref}$を基準にしてその1.56%である．L/aを小さくしていくと共に$\Delta K_{\rm IDCE}$は減少し，それに従って$K_{\rm I\,error}$も減少していくことがわかる．図示の範囲内では，$\Delta K_{\rm IDCE}$は$K_{\rm I\,error}$と同程度の値をとるとして良いようである．

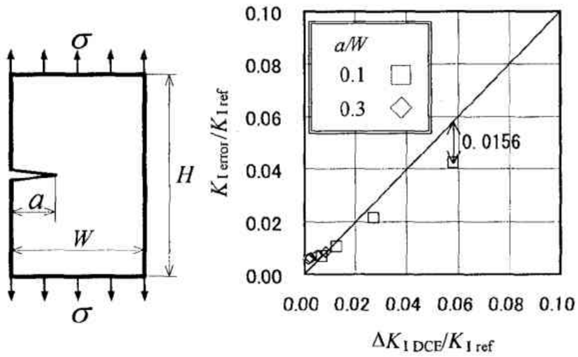

Fig. 2 Actual stress intensity factor error $K_{\rm I\,error}$ and DCE Index $\Delta K_{\rm I\,DCE}$ ($H/W=2$, $m=16$, $\nu=0.3$)

ここではm=16を選択しているが，mに対するモードI，IIの$K_{\rm DCT}$の変化をa/W = 0.1の例につき各々図3，4に示す．ここでモードIIのK値$K_{\rm II\,ref}$は理論上零であり，数値解析結果より式(6)にて評価して得られる$K_{\rm II\,DCT}$は誤差$K_{\rm II\,error}$そのものである．図4では$K_{\rm II\,ref}$ = 0による無次元化は適当ではないので，便宜上$\sigma(\pi a)^{1/2}$により無次元化して示してある．

図4ではmの増加は必ずしも$K_{\rm II\,error}$の減少と対応していない．これは本問題の場合モードIIのK値が零であるということに関係していると考えられ，一般に$K_{\rm II}$が小さい場合には，m，Lを同時にスムーズに変えていかないと理論上予想される傾向は現れないということのように思われる．

また図３より，$m = 16$ 以上とするとモードＩＫ値への影響が無視できるようになる（各点と傾き１の直線との垂直方向距離がほぼ一定となる，すなわち $K_{\mathrm{I\,error}}$ と $\Delta K_{\mathrm{I\,DCE}}$ の差がほぼ一定となる）ことが読みとれる．

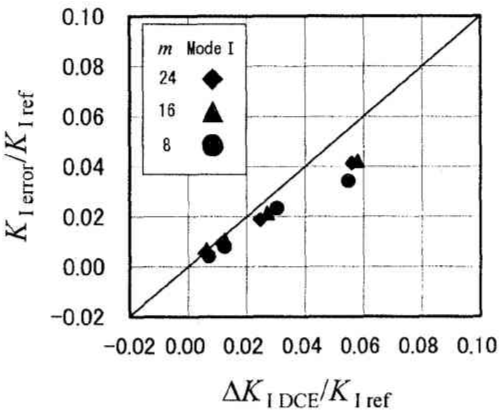

Fig. 3　Effect of singular element number m on actual stress intensity factor error $K_{\mathrm{I\,error}}$ and DCE Index $\Delta K_{\mathrm{I\,DCE}}$ (for $a/W = 0.1$ in Fig. 2)

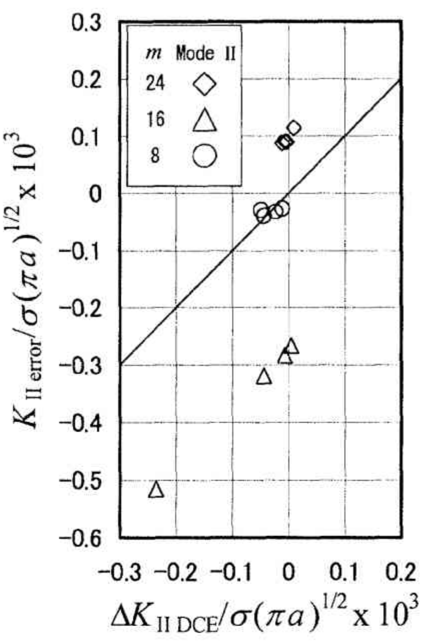

Fig. 4　Effect of singular element number m on actual stress intensity factor error $K_{\mathrm{II\,error}}$ and DCE Index $\Delta K_{\mathrm{II\,DCE}}$ (for $a/W = 0.1$ in Fig. 2)

3・2　一様引張を受ける円筒環状き裂　図５左の端部にて一様引張 $\sigma = 9.8$ MPa を受ける肉厚 $W = 10$ mm，平均半径肉厚比 $R_m/W = 9.5$，長さ比 $H/W = 16$ の円筒内表面環状き裂の無次元き裂長さを $a/W = 0.1$，0.3 と変化させその各々に対し $K_{\mathrm{I\,DCT}}$ を求め，これを Nied らの解析解[10]$(a/W, K_{\mathrm{I\,ref}}\ \mathrm{MPam^{1/2}}) = (0.1, 0.636), (0.3, 1.324)$ と比較した結果を図５右（$m = 16$）に示す．

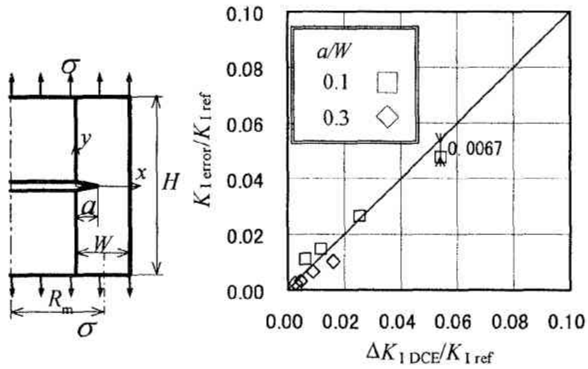

Fig. 5　Actual stress intensity factor error $K_{\mathrm{I\,error}}$ and DCE Index $\Delta K_{\mathrm{I\,DCE}}$ ($R_m/W = 9.5$, $H/W = 16$, $m = 16$, $\nu = 0.3$)

図２右同様，各 a/W 毎に L/a に対応する４個のデータがあり，L/a と $\Delta K_{\mathrm{I\,DCE}}$ の大小関係が対応している．図中 $K_{\mathrm{I\,error}}$ と $\Delta K_{\mathrm{I\,DCE}}$ の差の最大値はやはり $a/W = 0.1$ の $L/a = 1/3$ のとき現れ，$K_{\mathrm{I\,ref}}$ を基準としてその 0.67% である．要素を小さくすると共に $\Delta K_{\mathrm{I\,DCE}}$ は減少し，それに伴って $K_{\mathrm{I\,error}}$ も減少していくことがわかる．この場合も ΔK_{DCE} は K_{error} と同程度として良いようである．

ここでも $m = 16$ を選択しているが，m に対するモード I，II の K_{DCT} の変化を $a/W = 0.1$ の例につき各々図６，７に示す．図３，４同様，図中の記号３種には各々４点ずつデータが存在する．

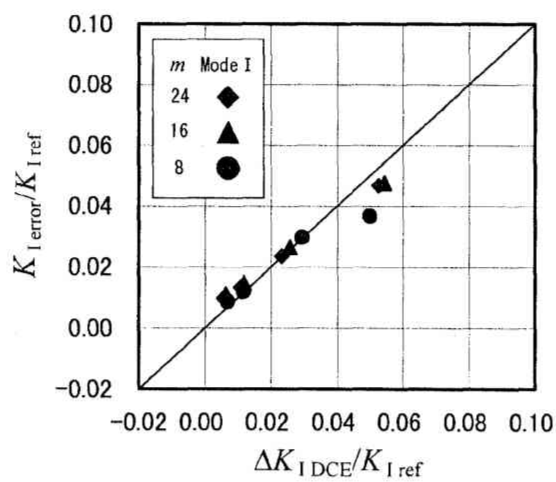

Fig. 6　Effect of singular element number m on actual stress intensity factor error $K_{\mathrm{I\,error}}$ and DCE Index $\Delta K_{\mathrm{I\,DCE}}$ (for $a/W = 0.1$ in Fig. 5)

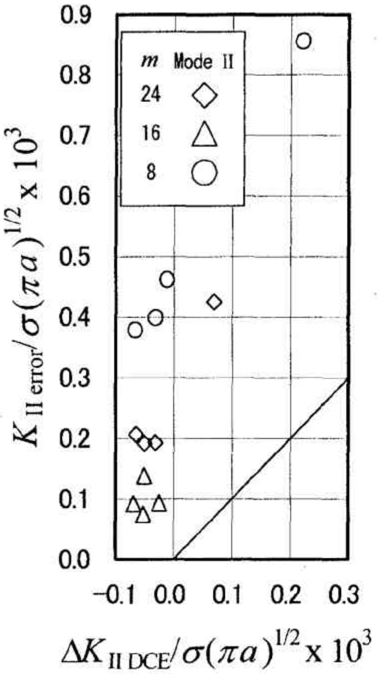

Fig. 7 Effect of singular element number m on actual stress intensity factor error K_{Ierror} and DCE Index ΔK_{IDCE} (for $a/W=0.1$ in Fig. 5)

この場合もモード II のK値 $K_{\mathrm{II\,ref}}$ は理論上零であるので $K_{\mathrm{II\,error}}=K_{\mathrm{II\,DCT}}$ であり，3・1節同様，図7は $\sigma(\pi a)^{1/2}$ により無次元化して示してある．図4同様 m の増加は必ずしも $K_{\mathrm{II\,error}}$ の減少と対応せず，K_{II} が小さいときには，m，L を同時にスムーズに変えていかないと理論上予想される傾向は現れないということのようである．

また図6より，$m=16$ 以上とするとモードＩＫ値への影響が無視できるようになる（各点と傾き１の直線との垂直方向距離がほぼ一定となる，すなわち K_{Ierror} と $\Delta K_{\mathrm{I\,DCE}}$ の差がほぼ一定となる）ことが読みとれる．

3・3 一様引張を受ける有限板中央傾斜き裂

図８左の一様引張σ=9.8MPaを受ける幅 $2W$=30mm，長さ $H/W=2$ の板の中央傾斜き裂(長さ $2a$，角度α =30°)の無次元き裂長さを $a/W=0.2$，0.4 と変化させその各々に対し K_{DCT}を求め，これを北川らの解析解[11] $(K_{\mathrm{Iref}}, K_{\mathrm{IIref}})$ = (0.735, 0.415), (1.138, 0.605) MPam$^{1/2}$ と比較した結果を図８右に示す．この図は $m=24$ の例である．

ここで最終的に $m=24$ として評価した理由は，図９に例として示す $a/W=0.6$ の場合からわかるように，$m=8$ の場合モード I，II に対応する $\Delta K_{\mathrm{DCE}}/K_{\mathrm{ref}}$ の値に最大 2.74%の差があったからである．K値，そしてその誤差評価を FEA の結果得られた変位のみから行う以上，モードにより誤差指標比$\Delta K_{\mathrm{DCE}}/K_{\mathrm{ref}}$が異なるべきではないとの考えのもと，モードによる誤差指標比の差を一つの目安としてそれが 1.5%以下となるまで m を増やして解析を行った．この間モード I の$\Delta K_{\mathrm{DCE}}/K_{\mathrm{ref}}$ はほとんど変化していない．

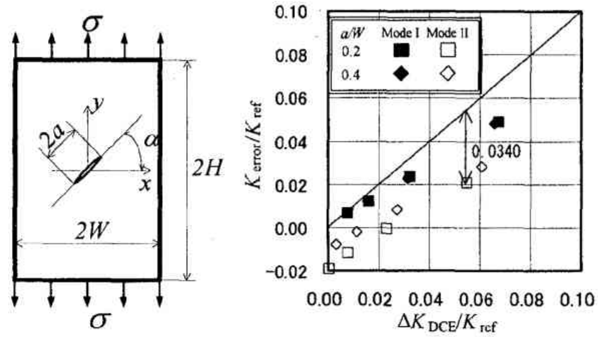

Fig. 8 Actual stress intensity factor error K_{error} and DCE Index ΔK_{DCE}($H/W=2$, m=24, α=30°, $\nu=0.3$)

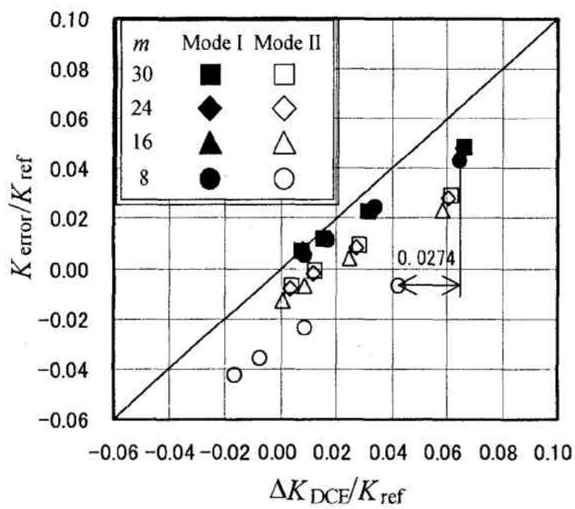

Fig. 9 Effect of singular element number m on actual stress intensity factor error K_{error} and DCE Index ΔK_{DCE} (for $a/W=0.6$)

以上のようにして得られた図８右のデータは，図２右同様，各 a/W 毎に L/a に対応する４個のデータがあり，L/a とΔK_{DCE}の大小関係が対応している．図中 K_{error} とΔK_{DCE} の差の最大値はモード II に対して現れ，K_{IIref} を基準としてその 3.40%である．要素を小さくすると共にΔK_{DCE}は減少し，それに従って K_{error} も減少する．

4. 考 察

本論文で提案した DCE Index ΔK_{DCE} は FEA の結果得られたK値解の誤差の目安を与えるものであり，r 方向とθ方向の分割を適切に連動させてき裂端の特異要素を小さくしていく（3章の記号では L/a, $1/m$ を小さくしていく）とき，3章に示したような縦軸に K_{error}, 横軸にΔK_{DCE}を採った図において，これら両者の関係は原点に向かうようになる，すなわち K_{error} が零に近づくに従いΔK_{DCE}は零に近づくことが期待されるものである．この点はこれまでに提案されているエネルギノルムに基づく誤差指標[5][6]と同様の性質を持つものといえるが，ΔK_{DCE} はK値の次元で記述されているところに利用する上での優位性があると考えられる．

3章の数値計算例において，分割を小さくしようとするとき本来は r 方向と連動する形でθ方向も小さくするのが望ましいわけであるが，有限要素分割においてそれを実現するのは手数のかかることであるので，現実的な方法ということで，実際にはθ方向の幾つかの分割に対し，それは固定した状態で r 方向の要素の大きさを小さくするという方法をとっている．結果によれば，K_{I}はθ方向の分割に比較的鈍感であり，K_{I} の評価にあたっては，mをある程度の値にとっておけばθ方向の分割には余り気を使わなくて良いということがいえるようである．しかし K_{II} については状況が異なっており，その評価が必要な場合には m を変化させて評価値の変化を調べる必要がある．いずれにせよ mの妥当性については，図9のような図が描ける解析解が得られている場合を対象に，L/a を小さくしていったときどれだけ原点に向かうようになっているかによって判断される．ここで扱った例題については採用した m で，少なくともその評価が重要となることの多い K_{I} についてはこの条件を十分満たしていると判断され，このときおよそ$\left|\Delta K_{I\,DCE}/K_{I\,ref}\right| < 0.05$の領域において，誤差指標の値は誤差そのものと同程度のものとなっていることに注目したい．本来誤差指標は解析解が得られていない問題に対して意味を持ってくるものである．いま少しの例題を通じての検討は必要かもしれないが，ここでの結果は，K_{I}の解析であれば $m=16$ 以上を用い，$\left|\Delta K_{I\,DCE}/K_{I\,ref}\right| < 0.05$ における $K_{I\,ref}$ を K_{IDCT}で置き換えた$\left|\Delta K_{IDCE}/K_{IDCT}\right| <0.05$ の範囲を目安に，誤差指標により誤差そのものの程度を見積もり，これにより誤差補正を行うことへの可能性を示すものとなっている．K_{II} についてであるが，図9から分かるように mが大きくなるにつれて，L/a を小さくしていったときの K_{error} とΔK_{DCE}の関係は原点に向かっていくものに近づいていっている．このことからさらに大きな m を用いれば上述の K_{I} に対するものと同様なことが K_{II} についても行えるものと思われるが，必ずしも現実的ではなく，この意味で特異要素といっているものは K_{II} の評価には必ずしも適した要素であるとはいえないかもしれない．ただ一般的に混合モード問題において K_{I} と K_{II} にその信頼度にばらつきがあるのは望ましいことではなく，その際 3・3 節で行ったように，$\left|\Delta K_{I\,DCE}/K_{I\,ref} - \Delta K_{II\,DCE}/K_{II\,ref}\right|$ の大きさを m の妥当性の判断基準にすることが考えられる．本来の趣旨である解析解が分かっていない問題に対しては，K_{ref} を K_{DCT} で置き換えた$\left|\Delta K_{I\,DCE}/K_{I\,DCT} - \Delta K_{II\,DCE}/K_{II\,DCT}\right|$ を用いればよい．

ところで最近 Rahulkumar[12]らのように高次の特異要素を用いることにより少ない要素で精度のよいK値評価を行う手法が提案されているが，3・3 の混合モード問題に対する結果から判断すると高次の要素を用いてもなおθ方向に対する適切な要素分割（m の選定）を試行する必要があると予想される．この場合にも，まずは Barsoum の特異要素と今回提案したΔK_{DCE}より mを選ぶことは有効であると考える．

5. 結 言

本論文では特異要素を用いる有限要素解析結果をもとにK値を評価するための誤差評価指標を開発し，これを DCE（Displacement Correlation Error） Index と名付けた．DCE Index はき裂先端変位場の関数形が既知であり，特異要素についてはこの変位の関数形を一部表現しうること，またK値をき裂先端変位のみから評価しうることに着目し，K値の次元を有する誤差指標として開発したものである．DCE Index はK値誤差そのものではないが，本論文で行った解析解が分かっている問題への適用結果によると，DCE Index は，特に多くの問題で重要となるモードＩのK値評価において，実際的なθ方向の分割を用いた有限要素解析により，K値誤差そのものに近い値をとるものとなり，実際的な方法としてそれによるK値補正の可能性があることが示された．

文 献

(1) Barsoum, R. S., On the Use of Isoparametric Finite Elements in Fracture Mechanics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **10** (1976), 25-37.

(2) Henshell, R. D. and Shaw, K. G., Crack Tip Finite Elements Are Unnecessary, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **9** (1975), 495-507.

(3) Tracey, D. M., Discussion of 'On the Use of Isoparametric Finite Elements in Fracture Mechanics' by R. S. Barsoum, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **10** (1976), 401-403.

(4) Harrop, L. P., The Optimum Size of Quarter-Point Crack Tip Elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17** (1982), 1101-1103.

(5) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. B, A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24** (1987), 337-357.

(6) Fuenmayor, J., Domínguez, E., Giner, E. and Oliver, J. L., Calculation of Stress Intensity Factor and Estimation of its Error by a Shape Sensitivity Analysis, *Fatigue Fracture Eng. Materials*, **20** (1997), 813-828.

(7) Ishikawa, H., Kitagawa, H. and Okamura, H., J Integral of a Mixed Mode Crack and Its Application, Proc. 3rd Int. Conf. Mechanical Behaviour of Materials, **3** (1980), 447-455, Pergamon.

(8) Saouma, V. E. and Schwemmer, Numerical Evaluation of the quarter Point Crack Tip Element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20** (1984), 1629-1641.

(9) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed., (1985), Del Research Co.

(10) Nied, H. F. and Erdogan, F., The Elasticity Problem for a Thick-Walled Cylinder Containing a Circumferential Crack, *Int. J. Fracture*, **22** (1983), 277-301.

(11) 北川英夫・結城良治，機論，**43**-376 (1977)，4354-4362.

(12) Rahulkumar, P., Saigal, S. and Yunus, S., Singular p-Version Finite Elements for Stress Intensity Factor Computations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **40** (1997), 1091-1114.

謝　辞

本研究を実施するに際し卒研生箱家光敏君の協力を得たことを記し，ここに謝意を表します．