非線形増巾器を二つ含む制御系の位相面解析

非線形増巾器を二つ含む制御系の位相面解析

藤 宗 寛 治*・村 本 浩**

Phase Plane Analysis of Feed Back Control System having Two Nonlinear Gain Elements.

Hiroharu Fujiso, Hiroshi Muramoto

One of the formidable problems in the area of feed back control concerns the analysis and synthesis of nonlinear systems, and several methods have been employed for treating feed back control system with nonlinear elements.

This paper describes a method of transient analysis of second order feed back control system having two nonlinear gain elements and subjected to step input. The techniques of this method is representation of the nonlinear elements as the so-called equivalent linear elements and, essentially, decomposition of the phase plane into regions within which trajectories converges to corresponding critical points.

〔1〕 緒　　言

非線形要素を含む自動制御系は周波数応答法，位相面による方法，電子計算機による方法などで解析され，また非線形特性を附加して制御系の特性を改善する研究もいろいろ行われている。[1][2][3][4] しかし，そのどれも非線形要素1つを含む場合に限られている。一般に制御系には検出器，増巾器などの飽和特性，制御性能を改善するための非線形要素などが含まれるからその解析にあたつては非線形要素を2つ以上含む場合についても考慮する必要がある。

この研究では2ケの非線形増巾器を含む制御系を位相面を用いて解析し，特に増巾器特性を適当に選定することによつてその制御系の制御動作を2段的に行わせることができ，その結果系全体としての制御特性を著しく改善できることを示した。

自動制御系の解析に際して位相面を用いる場合，その適用の範囲が一般に二次の非線形方程式で表わされる制御系に限られるという制約はあるが，一方種々な初期値に対してその応答を同時に表示できるから制御の設計に当つてはそれを図示的に，明瞭に取扱いうるという利点がある。この場合非線形要素をこれと等価な線形要素をもつて置き換えると取扱いは一層容易となる。すなわち制御系の解析は次の順序によるのが通例である。

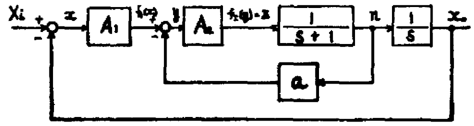
1. まず非線形要素を数個の近似線形要素で置き換える。
2. その線形要素に対応するように位相面を分割する。
3. 分割された各領域において位相面軌道を定める。
4. その各領域に属する位相面軌道を連結すれば過渡応答が得られる。

* 福井大学教授　　** 福井大学講師

〔2〕　飽和特性をもつ制御系の解析

第1図のブロック線図に示す位置型制御系において，A_1, A_2 を非線形特性をもつ増巾要素とし，それぞれの特性関数を $f_1(x)$, $f_2(y)$，設定入力を x_i，偏差を x，制御量を x_0 とすればこれらの関係は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} x &= x_i - x_0 \\ y &= f_1(x) - an \\ z &= f_2(y) = \frac{dn}{dt} + n \\ n &= \frac{dx_0}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$



第1図　位置形制御系のブロック綜図
A_1, A_2 非線形増要素

特に増巾器 A_1, A_2 が線形の場合はそれぞれの比例定数を K_1, K_2 とし，入力 x_i を階段状関数と考えると，制御系の方程式は式 (1) に $f_1(x)=K_1x$, $f_2(y)=K_2y$ とおいて

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1+aK_2)\frac{dx}{dt} + K_1K_2x = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

を得る。

次に増巾器 A_1, A_2 が第2図に示す飽和特性をもつ場合には増巾器 A_2 への入力 y は

$$y=f_1(x)-an=f_1(x)+a\dot{x} \cdots (3)$$

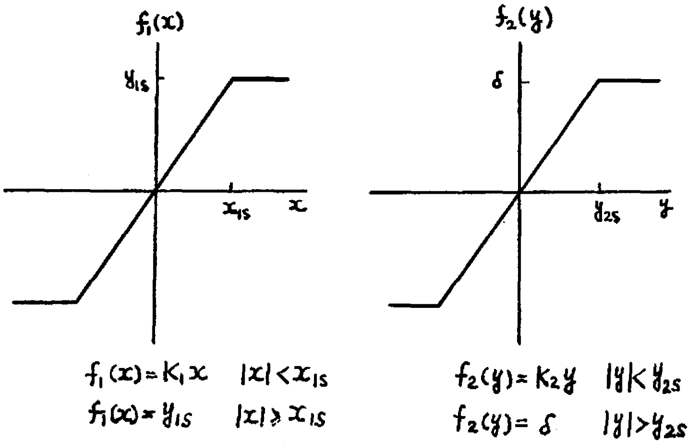
であるからこれを増巾器 A_1 の直線部分の比例定数 K_1 で除して増巾器 A_1 の入力側に換算すれば

$$x'=y/K_1=f_1(x)/K_1+a/K_1\,\dot{x} \cdots (4)$$

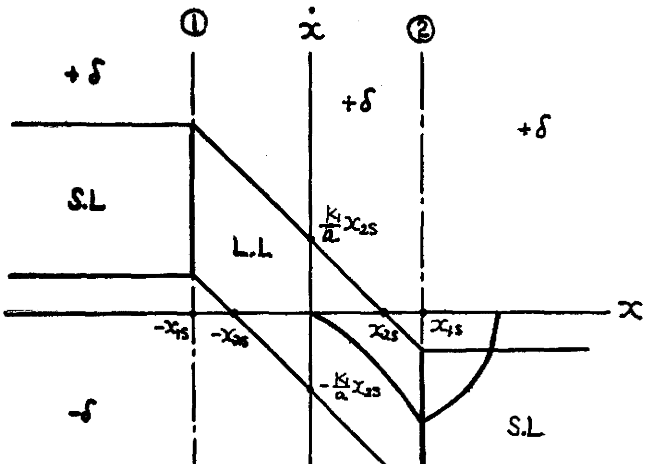
を得る。同様に増巾器 A_2 の飽和条件 $y > y_{2S}$ は増巾器 A_1 における $|x'| > x_{2S} = y_{2S}/K_1$ に換算することができるから増巾器 A_2 の入力 y を増巾器 A_1 の入力側に換算して制御系の特性を考察することができる。

A)　位相面の分割

$|x| < x_{1S}$ すなわち増巾器 A_1 が線形特性をもつ範囲では増巾器 A_2 の入力 y は $y = (K_1x+a\dot{x})$ である。従つて増巾器 A_2 の出力 z は関数 $f_2(y)$ の特性によつて変り次の3種の制御特性が得られ



第2図　A_1 増 巾 器 特 性



第 3 図

る。

$y = (K_1x+a\dot{x}) > y_{2s}$ であれば増巾器 A_2 の出力 z は飽和値 $+\delta$（一定）となる。この境界を位相面では $\left(x+\frac{a}{K_1}\dot{x}\right) > x_{2s}$ で示される。

同様に $y = (K_1x+a\dot{x}) < -y_{2s}$ では $z = -\delta$（一定）でその境界は $\left(x+\frac{a}{K_1}\dot{x}\right) < -x_{2s}$ となる。このように増巾器 A_2 の出力が $z = \pm\delta$ となる領域を $\pm\delta$ 領域，この領域の制御系の特性を $\pm\delta$ 特性と略記する。

また $|y| < y_{2s}$ なる範囲では A_2 は線形特性であるから $z = K_2(K_1x+a\dot{x})$ である。この領域は増巾器 A_1，A_2 が共に線形特性をもつているからこれを L.L 領域，またこの領域の制御特性をL.L 特性と略記する。

従つて位相面は $|x| < x_{1s}$ の範囲内で第3図のように $+\delta$，L.L，$-\delta$ 特性をもつ領域に3分割される。

次に $x > x_{1s}$ すなわち増巾器 A_1 の出力が飽和値（y_{1s}＝一定）をとる範囲では $y = (y_{1s} + a\dot{x})$，であるから　$y = y_{1s} + a\dot{x} > y_{2s}$，であれば $z = +\delta$ となり，位相面上の境界は $\dot{x} > \frac{K_1}{a}(x_{2s} - x_{1s})$

同様に $y = y_{1s} + a\dot{x} < -y_{2s}$ では $z = -\delta$ となり位相面上の境界は $\dot{x} < -\frac{K_1}{a}(x_{2s}+x_{1s})$，また $|y| < y_{2s}$ では $z = K_2(y_{1s}+a\dot{x})$ となる。この特性は増巾器 A_1 が飽和し，A_2 が線形の範囲で動作するからこの領域を S.L 領域，またこの領域の特性を S.L 特性と略記する。

$x < -x_{1s}$ の範囲では増巾器 A_1 の出力は飽和値（$-y_{1s}$ ＝一定）となるから $x > x_{1s}$ の場合の関係式において $y = (-y_{1s} + a\dot{x})$ とおいて増巾器 A_2 の飽和条件から位相面上の境界および各領域の制御特性が定まる。

結局，全位相面は増巾器 A_1，A_2 の特性によつて第3図のように9分割される。しかるに増巾器 A_2 の出力は $K_2(K_1x+a\dot{x})$，$K_2(\pm y_{1s}+a\dot{x})$，$\pm\delta$ の3形式によつて表わされるから各領域の位相面軌道はその組合せによつて得られる5種類の特性式から定められる。

B）位 相 面 軌 道[5]

A）節の考察により分割された各領域内の位相面軌道は式（1）に上記3形式の出力を代入して求められる。

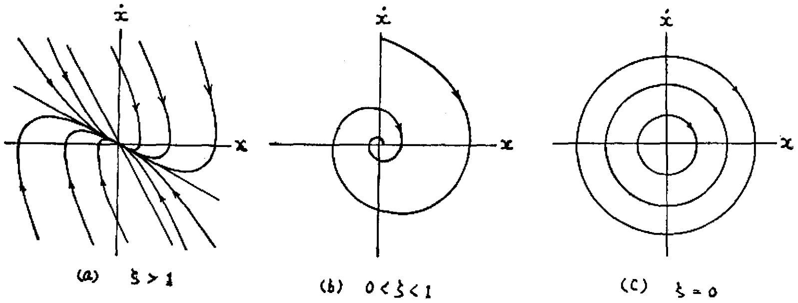
L.L 領域では式（2）が成立するから $\omega_n^2 = \sqrt{K_1K_2}$，$2\zeta\omega_n = 1+aK_2$，$\tau = \omega_n t$ とおいて無次元化すれば

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+2\zeta\frac{dx}{d\tau}+x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

となり位相面上では

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{2\zeta\dot{x}+x}{\dot{x}} \quad (5)$$

となる。式（5）の位相面軌道は二次式の特性根の性質に従つて第4図（a），（b），（c）のようになる。



第4図　位 相 面 軌 道

(a) (b) (c)　$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{2\zeta\dot{x}+x}{\dot{x}}$

S.L 領域および $\pm\delta$ 領域の微分方程はそれぞれ

$$\mp \frac{x_{1S}}{2\zeta} = \frac{1}{2\zeta}\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} \qquad \cdots\cdots (6)$$

$$\mp \frac{\delta}{\omega_n} = \omega_n \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} \qquad \cdots\cdots (7)$$

となるから，式 (6)，(7) を一般的の形としてfおよび T によつて表わすと次式のようになる。

$$\mp f = T\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} \qquad \cdots\cdots (8)$$

位相面上では

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\pm f + \dot{x}}{T\dot{x}} \qquad \cdots\cdots (9)$$

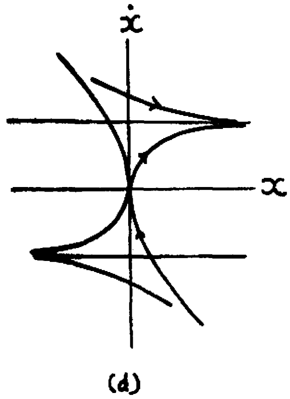
となり，位相面軌道は第4図 (d) となる。

なおこの場合の位相面軌道については次式が成立する。

$$x + T\dot{x} + (\pm f)\,T\ \ln\left(1 + \frac{\dot{x}}{\pm f}\right) + \mathrm{const} = 0 \qquad \cdots (10)$$

$$\tau = -T\ \ln(\dot{x} \pm f) + \mathrm{const} \qquad \cdots\cdots (11)$$

$$\dot{x}\Big|_{t\to\infty} = \frac{dx}{d\tau}\Big|_{t\to\infty} = \mp f \qquad \cdots\cdots (12)$$



第4図 位相面軌道

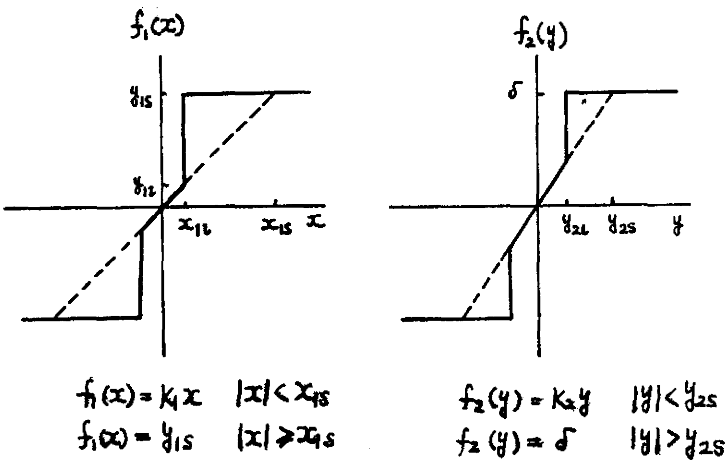
(d) $\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\pm f + \dot{x}}{T\dot{x}}$

以上の考察から第2図に示す可飽和増巾器 A_1，A_2 をもつ制御系の位相面は5種類の特性をもつ領域に分けられ，各領域の位相面軌道は式 (5) (9) により定まるから任意の初期値を与えたときの応答は各領域内の位相面軌道を順次連結して得られる。なお第3図及び (A) 節の所論から L.L 領域は増巾器 A_1，A_2 の入力 x_{1S}，x_{2S} によつて定まり，また制御系に全駆動力 $\pm\delta$ が加わつて最大の応答速度を与える $\pm\delta$ 領域の境界は $|x| > x_{1S}$ の範囲では ($y_{1S} - y_{2S}$) によつて定まることがわかる。このことは増巾器の非線形特性を適当に選定して制御系の応答を改善できることを示している。

〔3〕 制御性能改善の1例

一般に自動制御系においては，小さい偏差xに対しては減衰係数ζを大きくし，大きい偏差に対してはζが小さく速応性に富むことが要求されるから偏差が大きいときには減衰係数ζを小さくするか，あるいは系の駆動力を高めることが必要である。

この為に第3図において減衰の大きい L.L 領域を狭くすると共に制御系の最大駆動力 ($\pm\delta$) が加わる $\pm\delta$ 領域を拡張し比較的応答の悪い S.L 領域の影響を除くようにすれば目的を達する。この1



第 5 図

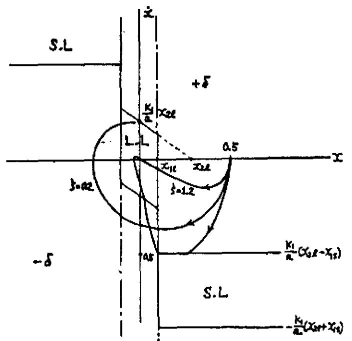
例として第5図に示す非線形増巾器を用いる。増巾器 A_1, A_2 の線形特性の限界を x_{1l}, y_{2l}, 比例係数を K_1, K_2, 飽和値を y_{1S}, δ とすると，前章〔2〕と同様に増巾器 A_2 の入力を増巾器 A_1 の入力側に換算して位相面上の領域およびその領域内の特性を求めると第1表のようになる。

第　1　表

偏差 x の範囲	要素 A_2 の入力 y ならびに境界条件	要素 A_2 の出力 z	位相面における各領域の境界条件
	$(k_1x+a\dot{x})>y_{2l}$	$+\delta$	$\dot{x}>\frac{k_1}{a}(x_{2l}-x)$
$-x_{1l}<x<x_{1l}$	$-y_{2l}<(\ 〃\ )<y_{2l}$	$k_2(k_1x+a\dot{x})$	
	$(\ 〃\ )<-y_{2l}$	$-\delta$	$\dot{x}<-\frac{k_1}{a}(x_{2l}+x)$
	$(y_{1s}+a\dot{x})<y_{2l}$	$+\delta$	$\dot{x}>\frac{k_1}{a}(x_{2l}-x_{1s})$
$x>x_{1l}$	$-y_{2l}<(\ 〃\ )<y_{2l}$	$k_2(y_{1s}+a\dot{x})$	
	$(\ 〃\ )<-y_{2l}$	$-\delta$	$\dot{x}<-\frac{k_1}{a}(x_{2l}+x_{1s})$
	$(-y_{1s}+a\dot{x})>y_{2l}$	$+\delta$	$\dot{x}>\frac{k_1}{a}(x_{2l}+x_{1s})$
$x<-x_{1l}$	$-y_{2l}<(\ 〃\ )<y_{2l}$	$k_2(-y_{1s}+a\dot{x})$	
	$(\ 〃\ )<y_{2l}$	$-\delta$	$\dot{x}<-\frac{k_1}{a}(x_{2l}-x_{1s})$

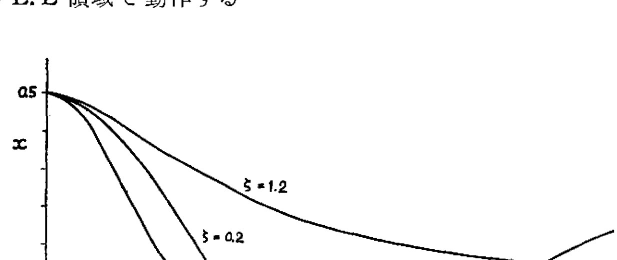
表中　x_{2l} は y_{2l}/k_1 である。

第1表によつて位相面を分割すると第6図のようになる。図からわかるように増巾器 A_2, A_2 が共に可飽和特性をもつ場合に較べて L.L 領域は狭く，$\pm\delta$ 領域は広くなつて制御特性がよくなることが明らかである。L.L 領域は増巾器 A_1, A_2 の線形特性限界 x_{1l}, y_{2l} により，δ 領域は y_{2l} および増巾器 A_1 の飽和値 y_{1S} により定まるから，これら x_{1l}, y_{1S}, y_{2l} を適当に選定して L.L 領域 S.L 領域，および δ 領域を変更して制御特性を改善できる。この場合増巾器 A_1 の飽和値 y_{1S} を充分大きくとれば S.L 領域は x 軸から遠ざかり制御系の応答には無関係となつて，制御系は δ 領域および L.L 領域で動作することになる。すなわち制御系は原点から離れたところでは応答が速く，原点の近くでは安定性の高い制御を行う。また第6図の鎖線は増巾器 A_1 が飽和する入力の値より定まるから入力として偏差 x およびその微分値 $\dot{x}$ からなる関数に選定して最適制御系となすことが出来る。



第　6　図

第1図のブロツク線図に示した制御系において増巾器 A_1, A_2 の特性を第5図に示すものとし，　$\zeta=1.2$, $K_1=K_2=\delta=1$, $x_{1l}=0.1$, $x_{2l}=0.28$,



第7図　過 渡 応 答

$x_{1S}=0.98$, $x_l=0.5$ として計算した位相面軌道を第6図に，またその時間応答を第7図に示した。なお比較の為に $\zeta=0.2$ および $\zeta=1.2$ をもつ線形制御系の応答をも並記した。

〔4〕 結　　言

以上により飽和特性を二つ含む制御系を位相面を用いて解析し，L.L特性，S.L特性，$\delta\pm$ 特性をもつことを示し，また2ケの非線形増巾要素を用いて L.L特性，$\pm\delta$ 特性からなる二様式の制御動作をもつ制御系が得られることがわかつた。特に後者の場合は非線形要素の特性をかえ，かつその入力を偏差とその微分値の関数とすることによつて一層制御性能を改善できるものである。また第5図の特性において比例定数を零とすれば，中立帯をもつリレー特性となるが第6図の位相面からわかるように過渡応答中の中立帯の影響を殆んど除くことが出来る。これについては次の機会に譲りたいと思う。

終りに，終始御指導をいただいている京都大学林千博教授，同研究室の各氏に深甚なる謝意を表する。

文　　献

(1) J. B. Lewis : Trans. AIEE vol. 71. p449 (1953)
(2) R. J. Kochenburger : Trans. AIEE vol. 69. p270 (1950)
(3) D. Mc Donald : Cook Research Lab. (1953)
(4) R. E. Kalman : Trans. AIEE vol. 73. p383 (1954)
(5) J. J. Stoker : Non Linear Vibration p37 (1950)

(受理年月日 昭和33年7月7日)