

アナログ・コンピューターに関する研究(I)

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2012-05-08 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 池尻, 忠夫, IKEJIRI, Tadao メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/5351

アナログ・コンピューターに関する研究 (I)

池 尻 忠 夫*

The Study of the Electronic Analog Computers (I)

Tadao IKEJIRI

The electronic analog computer was born starting mainly from the foundation of avionics in America. Its simplicity of handling and rapidness in analyzing, made it to develop rapidly, and has been widely used in the field of application for the automatic controlling device. With this point in view, the author tried to construct the repeated type analog computer and solve the differential equation. In this paper, the author described the fundamental theorem and experimental results, and in the last chapter a new miscellaneous application.

1. 緒 言

電子管式アナログ計算器は第二次大戦中、米国に於て、主として航空機工学を母体として生れたものであるが、その後、その取扱いの容易なこと、解析の迅速な事のために、急速に発達して、我国でも自動制御系の発達と関連して、最近盛んに研究されている現状である。アナログ計算器は数値を物理量（電子管式では電圧）に変換して演算し、それをブラウン管上に又は記録装置上に直示する。その点で精度では、デジイタル型には及ばないが、恰も計算尺を用いて計算するような手軽さで、線型、非線型微分方程式などの複雑な問題を解く事が出来る。従つて原子力、自動制御、機械、電気等の諸工学及び経済学、その他の過渡現象の解析に広く用いられている。アナログ計算器には、解をブラウン管上に繰返し描かせる高速度型とペン書オツシロでペンを振らせる低速型との二種がある。後者は精度が高く（誤差1%以下）実時間演算が出来るという利点を有し、前者は精度の点ではやや劣るが（4%以下）解を繰返しブラウン管上に直示できるので、自動制御系の安定を求めること等に便利である。

この様な意味で筆者は繰返し型アナログ計算器を試作し、微分方程式の解を求めて見た。又低速型の場合も原理的には全く同じで、只演算時間を変化させるだけである。従つて本器では低速型としても、使用出来るように設計してある。こゝではアナログ計算器の試作について述べ、最後に新しい応用面等について記述する。

2. 理 論

演算器素子とその回路構成

アナログ・コンピューターの演算要素には次の如きものがある。

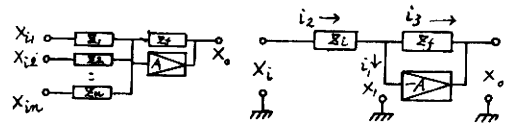
(イ) 倍 率 器 (ロ) 積 分 器 (ハ) 加 算 器 (ニ) 加 算 演 算 器
(ホ) 特殊非線型要素 (ヘ) 函 数 発 生 器 (ト) 解 指 示 器 (チ) 電 源

* 福井大学講師

等があるが以下各要素についての原理と筆者が試作したものについての大略を記述する。

(イ) 演算器総論

今第1図の饋還増巾器回路に於て、入力 X_i に対する出力 X_0 を求めて見る。この時次の式が成立する。



第 1 図

$$\left(\frac{X_0 - X_{i1}}{A} - X_{i1}\right) \frac{1}{R_1} + \left(\frac{X_0 - X_{i2}}{A} - X_{i2}\right) + \dots + \left(\frac{X_0 - X_{in}}{A} - X_{in}\right) \frac{1}{R_n} + \left(\frac{X_0 - X_0}{A} - X_0\right) \frac{1}{R_f} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{従つて } X_0 &= -\left(1 - \frac{1}{1 - A\beta}\right) R_f \left(\frac{X_{i1}}{R_1} + \frac{X_{i2}}{R_2} + \dots + \frac{X_{in}}{R_n}\right) \\ \beta &= 1 + \frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_2} + \dots + \frac{R_f}{R_n} \end{aligned} \quad \dots (2)$$

実際には増巾度 A は (70 db 位) 1 に比して充分大であるから

$$X_0 \doteq -\left(\frac{R_f}{R_1} X_{i1} + \frac{R_f}{R_2} X_{i2} + \dots + \frac{R_f}{R_n} X_{in}\right) \quad \dots (3)$$

一般に R_n, R_f の代りにインピーダンス Z_n, Z_f を用いると

$$X_0 \doteq -\sum_{n=1}^n \frac{Z_f}{Z_n} X_{in} \quad \dots (3)'$$

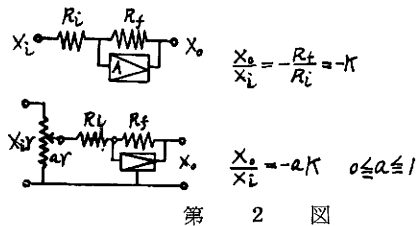
特に $n=1$ の時には

$$X_0 \doteq -\frac{Z_f}{Z_i} X_i \quad \dots (3)''$$

(ロ) 倍率器及び位相変換器

(3)' 式で $Z_f=R_f, Z_i=R_i$ とおくと

$X_0 = -(R_f/R_i) X_i = -K X_i, K=R_f/R_i$ となつて K 倍の出力が得られる。従つて第2図の如くポテンシオメータと組合せて用いると



第 2 図

$$X_0 = -a \left(\frac{R_f}{R_i}\right) X_i = -a K X_i \quad \dots (4)$$

$K=R_f/R_i$ となり任意の倍率が得られる。又特に $R_f=R_i$ とした時には $K=1$ となり位相変換器として働く (ハ) 積分器

(3)' 式に於て $Z_f=1/SC_f, S=d/dt, Z_i=R_i$ とおくと

$$X_0 = -\left(\frac{1}{C_f R_i S}\right) X_i \quad \dots (5)$$

となるから X_0 は X_i を時間的に積分した事になる。こゝで時定数 $C_f R_f$ の選び方によつて低速型、高速型として働くことを示そう。

低速型の場合

今 $C_f=1\mu F, R_i=1M\Omega$ とすると (5) 式より

$X_0 = -(1/S) X_i$ となり、time scale factor を 1 に選べば ($\tau=t$) 実時間演算が可能となる。

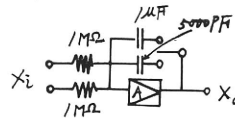
即ち演算器を実際の現象と同じ速度で働かせることが出来る。

高速度型 (繰返し型) の場合

今 $C_f=5000PF, R_i=1M\Omega$ とすると

$X_0 = -200(1/S)X_i$ ここで演算時間を 5 m sec を 1 sec に変換すると、即ち $t=200\tau$

従つて $X_0 = -200 \frac{1}{S} X_i = -\frac{1}{S} X_i$



$$X_0 = -\frac{1}{CRS} X_i = -\frac{1}{S} \text{ (低速形)}$$

$$\text{or } -200 \frac{1}{S} \text{ (高速形)}$$

第 3 図

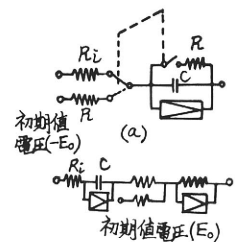
となつて繰返し型の場合は低速型と全く同様
に考えることが出来る。只動作原理上クランプ回路が必要である。

初期条件の導入

微分方程式の特解を求めるためには必要に応じて積分器が初期値 E_0 をもつて積分を開始しなければならない。即ち $X_0 = -\frac{1}{CR} \int_0^{\tau} X_i d\tau + E_0$

この様な初期値の設定は第4図の様に

- (a) 積分コンデンサーCを予め E_0 に充電させておき演算開始と同時に回路に接続
- (b) 加算器によつて E_0 の大きさをもつステップ電圧を積分出力信号に重畳して行えば良い。(a) は主として低速型に、(b) は繰返し型に用いられる。



第4図

(二) 加算器及び加算演算器

- (イ) で述べた様に、加算器は第5図の如くして積分加算器は第5図で Z_f にCを用いることによつて得られる。

- (ホ) その他の伝達函数を有する演算器の構成

以上は積分回路法に用いられる素子について述べたが、 Z_i , Z_f を適当に選ぶことにより種々の伝達函数を有するものが得られる。

- (ヘ) 非線型要素 函数発生器 掛算器

非線型の要素が入った微分方程式を解く時には、これ等の要素が必要になる。こゝでは筆者が試作したものを中心に考えてみよう。

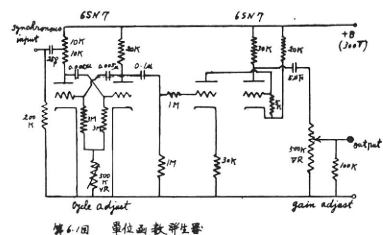
(a) 掛 算 器

これには多くの種類があるが非常に構造が複雑で調整も困難である。原理構造上次の様なものがある。(a) 自乗要素を用いるもの (b) パルス変調によるもの (c) サーボ機構によるもの (d) その他特殊なもの

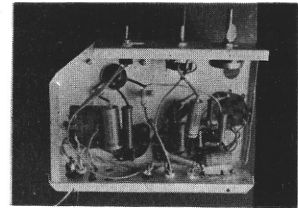
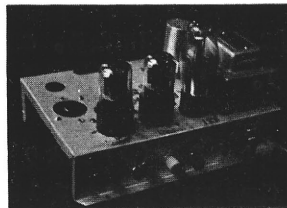
(b) 函 数 発 生 器

(i) 単位函数発生器

回路は第6図に示したもので 10 CPS の矩形波を発生する様に設計されている。この様にすると $t=200\tau$ なる変換を行つて、10 sec 迄演算描写が可能になる。図から明かな様にマルチバイブレーターで発生した波をスライスして矩形波としたもので、周波数、ゲインの調整が可能である。



第6-1図 単位函数発生器



第 6 ・ 2 図

(ii) 正弦波導入装置

次に述べるフォトホーマーがないので、特別之を試作した。即ち任意の周波数をもつた正弦波

を上記の矩形波を用いて、一定周期をもつて導入されるようにしたもので、第7図に回路を示す。

(iii) フォト・フォーマー

フォト・フォーマーの原理図を第8図に示す。与えられた函数形に比例したマスクをブラウン管の螢光膜上に用意し、ビームとマスクの縁のずれを光電流の変化として検出し、その値を0（又は一定）ならしめる様に垂直偏光板に電圧を饋還する。従つてビームはマスクの縁に静止し、水平偏光板に入力電圧 x を加えるならば、その時の垂直偏光板電圧はマスクの函数形 $F(x)$ に比例した値となる。

(c) 非線型要素

これには飽和、不感帯、履歴等があるが、筆者は試作しなかつたので、只項目をあげることに止める。

3. 直流増巾器について

以上演算増巾器を中心に演算素子について述べて来たが、この中で最も重要な部分は直流増巾器である。茲で演算器用の増巾器として必要な条件を列挙すると、1. 直流増巾器として特に問題になる所の drift を少なからしめること、2. 真空管の雑音の少ないものを用いること、3. 増巾度 A を大とすること（70 db 以上）、4. 安定であること。特にフィードバック回路として用いるので発振を起しやすい。5. 負荷の変化に対して安定であること（出力インピーダンスが小さいこと）

等が主なるものであるが、筆者の試作した回路について、それ等に対する対策を示すと次の如くである。

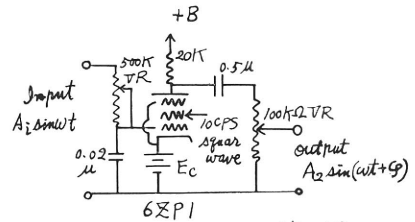
(イ) drift の補償

これには第一段に differential type の増巾管を用いて、ヒーター電圧及び B 電圧の変化に対する補償をしている。特にこの管は低雑音管 12 A $\times$ 7 を用いて内部雑音を少なくするようにしている。

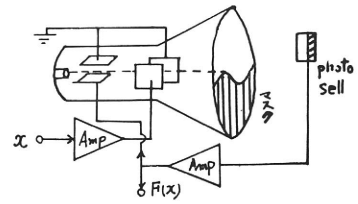
(ロ) 増巾度については、詳しい算出式は省略するが一段目 7~10、二段目 400~600 の増巾度が得られ、総合して 70 db 位の増巾度が得られる。

(ハ) 安定の問題

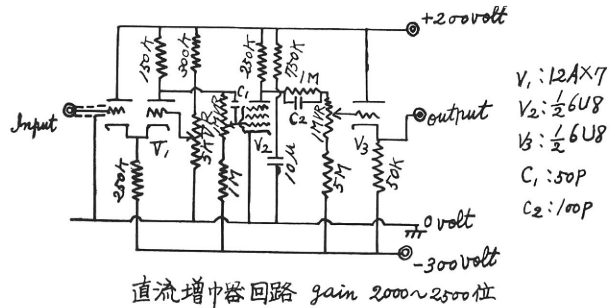
演算器として用いる時には饋還増巾器として働くので、高周波の発振を起す



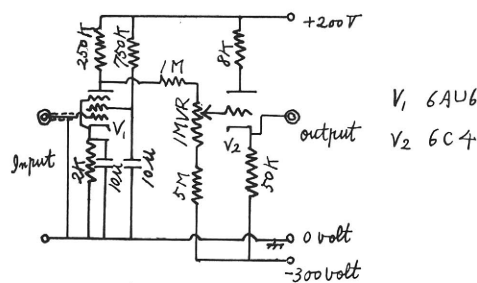
第7図



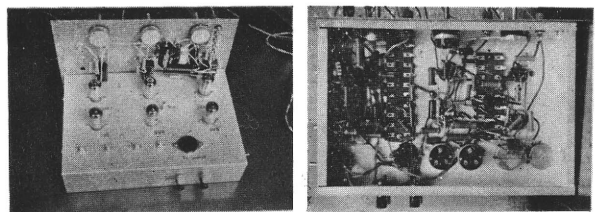
第8図



第9.1図



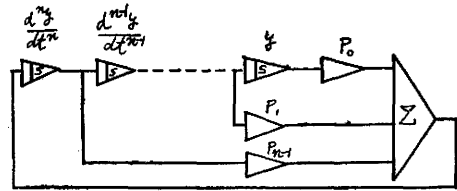
第9.2図



第9.3図

$$S^n + P_{n-1}S^{n-1} + \dots + P_1S + P_0 = 0 \quad (9)$$

(9) 式の左辺を $F(s)$ と定義する。即ち $F(s)=0$ …
 …(10) アナログ計算器を用いて、(8) 式を解いて
 得られる演算解には、(10) 式の特性根 $S_1, S_2, \dots$
 S_n に夫々誤差項が含まれてくる筈である。この誤
 差を求めれば、総合演算誤差が求まることになる。
 第11図は積分回路法を用いて、第9式を解く演算回
 路網を示す。今積分器の演算特性を $G(s)$ とすると



第11図

$$y + P_{n-1}G(s) + P_{n-2}\{G(s)y\}^2 + \dots + P_0\{G(s)\}^ny = 0 \quad (11)$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{G(s)} \right\}^ny + P_{n-1} \left\{ \frac{1}{G(s)} \right\}^{n-1} + \dots + P_0y = 0$$

$$\text{即ち } F\left(\frac{1}{G(s)}\right) = 0 \quad (12)$$

次に積分回路の演算特性 $G(s)$ を求める。

$$Z_y \rightarrow 0 \quad Z_{s'} \rightarrow 0 \quad Z_i = R \quad Z_f = -\frac{1}{CS} \quad \text{とすると}$$

$$X_0 = -\frac{X_i}{ST_i} \frac{A}{1 + A + \frac{1}{ST_i}} \quad (CR = T_i) \quad (13)$$

この結果では積分回路を一つ用いるごとに符号が変わり、且つその絶対値が $1/T_i$ になる為、積分回路の係数回路と組合せ、出力を T_i 倍し、かつ符号の変るのを防いでいるとしよう。従つてこの場合の積分回路の入力、出力の関係は

$$\frac{X_0}{X_i} = \frac{AT_i}{1 + (1 + A)ST_i} \quad (14)$$

今第12式中の m 番目の根を S_m' とすると S_m' は $1/G(s)=S_m$ の根である。

$$\text{即ち } S_m' = \frac{A}{1+A} \left(S_m - \frac{1}{AT_i} \right) \cong S_m - \frac{S_m}{A} \left(1 + \frac{1}{S_m T_i} \right) A \gg 1 \quad (15)$$

$$\text{即ち誤差 } \varepsilon = S_m' - S_m = \frac{-S_m}{A} \left(1 + \frac{1}{S_m T_i} \right) \quad (16)$$

一般に増巾器の利得 A は単に有限な値であるのみならず、周波数特性を有している。今上限遮断周波数を f_c とすると

$$A = \frac{A_0}{(1+S\tau)} \quad \tau = \frac{1}{f_c} \quad \text{又第16式より}$$

$$A = \frac{A_0}{1 + \tau \left\{ S_m - \frac{1}{A} \left(1 + \frac{1}{S_m T_i} \right) \right\}}$$

従つて第一近似として

$$\varepsilon = -\frac{S_m}{A_0} \left(1 + \frac{1}{S_m T_i} \right) - \frac{1}{A_0} S_m \left(S_m - \frac{S_m}{A_0} - \frac{1}{A_0 T_i} \right) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{S_m}{A_0} \left(1 + \frac{1}{S_m T_i}\right) \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\tau}{A_0} S_m \left(S_m - \frac{S_m}{A_0} - \frac{1}{A_0 T_i}\right) \cong -\frac{\tau S_m^2}{A_0} (A \gg 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

即ち ε_1 は A_0 が有限であることにより生ずる誤差

ε_2 は $A=A(s)$ であることにより附加される特性根の誤差である。従つてアナログ・コンピューターを用いて解いた場合の一般解は

$$y = \exp \left\{ S_m - \frac{S_m}{A_0} \left(1 + \frac{1}{S_m T_i}\right) - \frac{\tau S_m^2}{A_0} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

この事より誤差を出来る丈小さくする為には増巾器の利得 A_0 を出来る丈大に選ぶことは勿論、積分時定数 T_i 、カットオフ周波数 f_c を大にする必要がある。

例題

今単弦振動運動方程式を演算器を用いて解いた場合について考えて見る。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k_0^2 y = 0 \dots\dots\dots (20)$$

とすると、特性方程式の根は、 $S_1, S_2 = \pm jk_0$

従つて、アナログ・コンピューターを用いて解いた場合の解は

$$\left. \begin{aligned} y &= A_1 \exp (\alpha - \beta) t + \beta_1 \exp \{-(\alpha - \beta) t\} \\ \alpha &= jk_0 \left(1 - \frac{1}{A}\right) \quad \beta = \frac{1}{A_0} \left(\frac{1}{T_i} - \tau k_0^2\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

初期条件として $t=0$ で $y=0$ $dy/dt=1$ を与えると

$$y = \frac{A_0}{k_0(A_0-1)} \exp \left\{ -\frac{1}{A_0} \left(\frac{1}{T_i} - \tau k_0^2\right) \right\} t \sin k_0 \left(1 - \frac{1}{A_0}\right) t \dots\dots\dots (22)$$

参考の為に (20) 式を計算で求めた解は

$$y = \frac{1}{k_0} \sin k_0 t \dots\dots\dots (23)$$

となる。今演算記録時間を t_0 として減衰が極めて小さいと仮定すると、その間に生ずる振巾誤差

$$\varepsilon_A = \frac{1}{A_0} \left(\frac{1}{T_i} - \tau k_0^2\right) t_0 \dots\dots\dots (24)$$

例えば $t_0=0.05$ sec $T_i=\frac{1}{200}$ sec $\tau \cong 0$ とし誤差 ε_A を 0.5% 以下におさえる為には、 $A_0 \geq 2000$ でなければならない。

6. アナログ・コンピューターの応用

前節に於ては、アナログ計算器の各要素について説明したが、こゝでは筆者が行つた、二、三の実験とその考察について述べる。然し之等の実験は非常に初歩のもので、類例は多くの書物、文献の中に見出すことが出来る。たゞ原理的には二階の微分方程式を解く時も十階のものの場合も全く同じである。

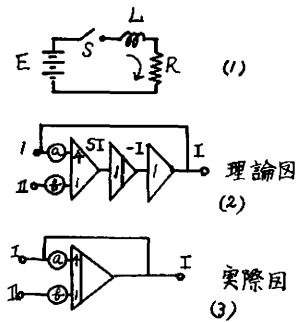
(1) 一階の微分方程式の解法

第12・1図の如き $L-R$ 直列回路でスイッチ S を開閉した場合の過渡電流を求める。その場合

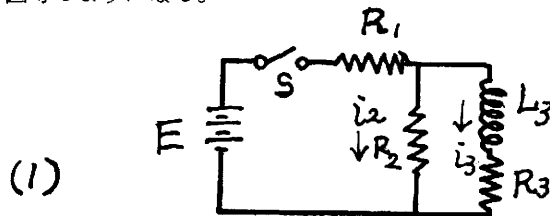
のアナログ・コンピューターの接続は第12・3図の通りである。
従つて、スケール・ファクターを適当に選んで、倍率器で a, b を選定すればよい。第13・1図の回路について解くには、第13・2図、第13・3図の如く接続すればよい。

(2) 二階微分方程式の解法

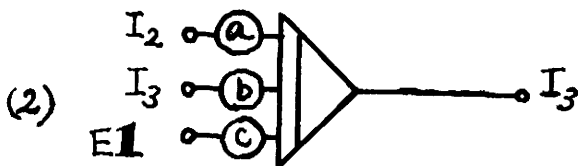
この場合の接続図を第14・1図に示す。更に位相面を示すと第14・2図等ようになる。



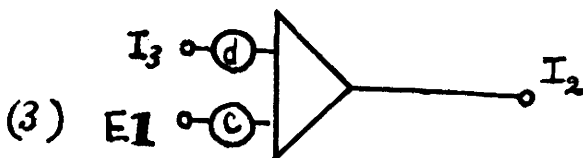
第12図



(1)



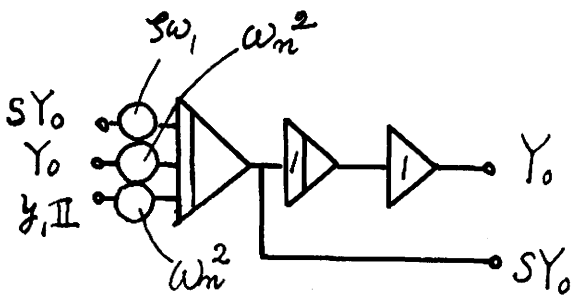
(2)



(3)

$$\begin{aligned} \text{但し } a &= \frac{R_1}{L_3} \\ b &= \frac{R_1 + R_3}{L_3} \\ c &= \frac{1}{L_3} \\ d &= \frac{R_3}{R_1 + R_2} \\ e &= \frac{1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

第13図



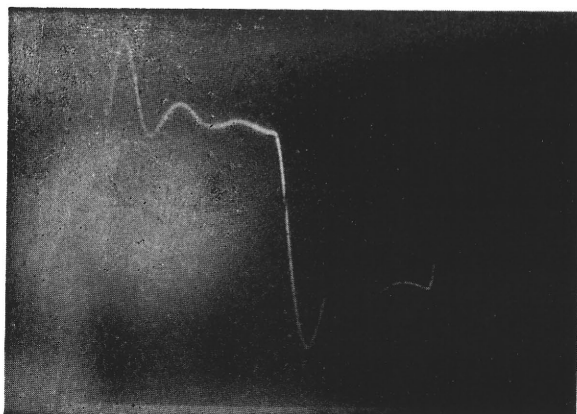
$$S^2 Y_0 + 2\xi \omega_n S Y_0 + \omega_n^2 Y_0 = \omega_n^2 y_{iII} \quad \text{の解法}$$

$$= 0$$

第14図

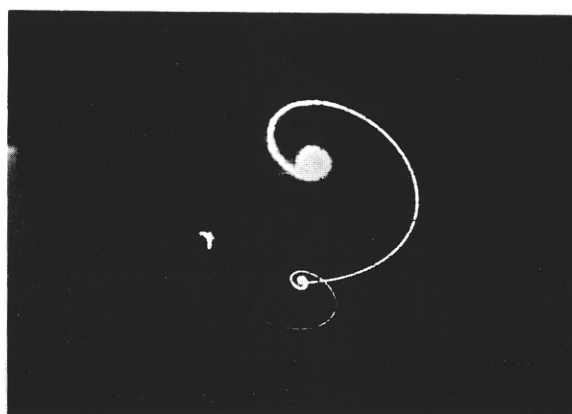
二階の微分方程式

$$\ddot{y}_0 + 2\zeta\omega_n^2\dot{y}_0 + \omega_n^2 y_0 = \omega_n^2 y_t \text{ II (or 0) の解}$$

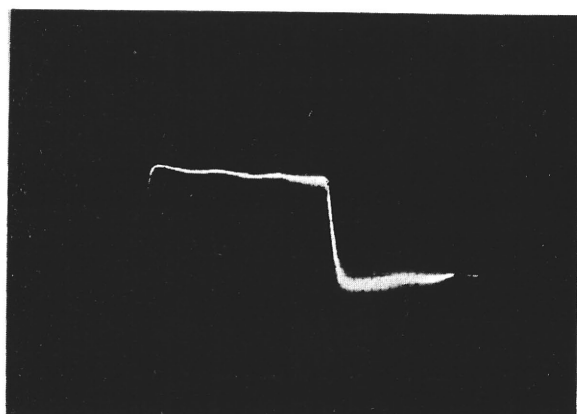


$$\zeta\omega_n = 1$$

$$\omega_n^2 = 2.5$$

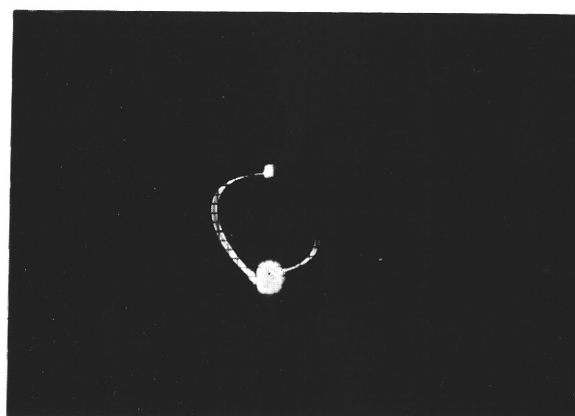


その位相面
 y 軸 y_0
 x 軸 $\dot{y}_0$

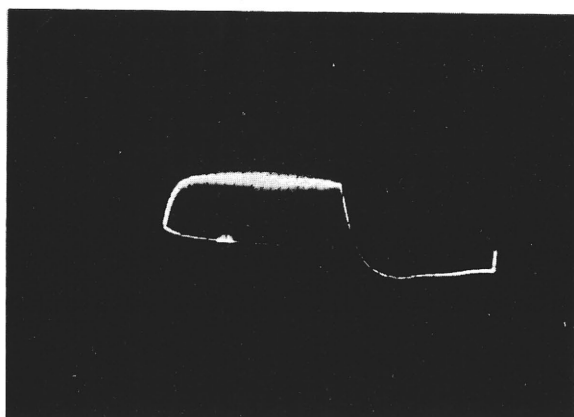


$$\zeta\omega_n = 1$$

$$\omega_n^2 = 1$$

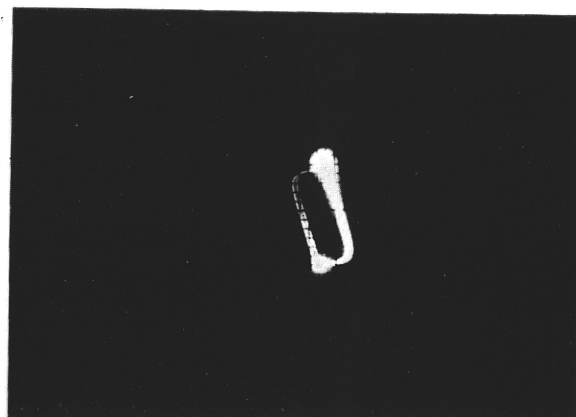


その位相面



$$\zeta\omega_n = 1.5$$

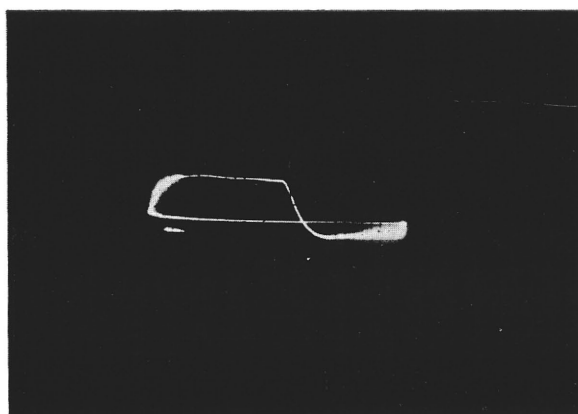
$$\omega_n^2 = 1$$



その位相面

三階の微分方程式

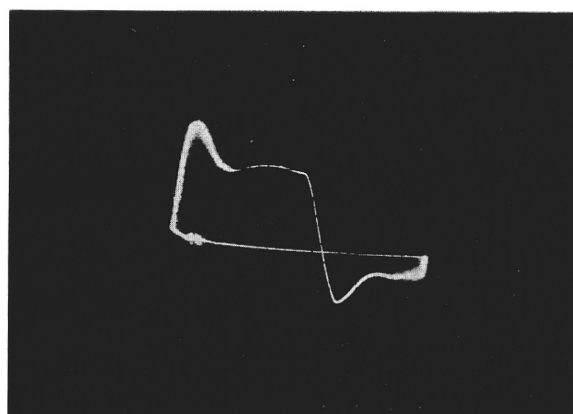
$$\Psi''' + A_2 \Psi'' + A_1 \Psi' + \Psi = I \text{ (or 0) の解}$$



$A_1 = 4$
 $A_2 = 4$



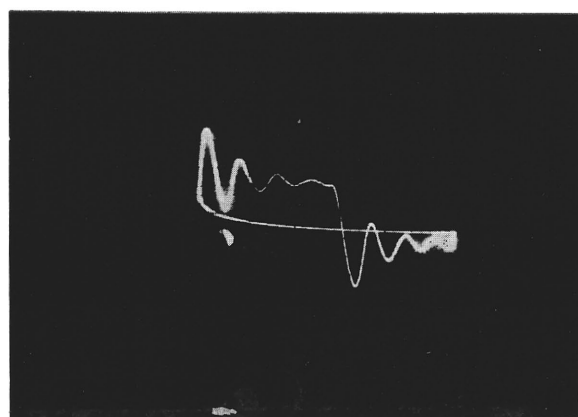
ψ と ψ の位相面
y 軸 ψ
x 軸 ψ



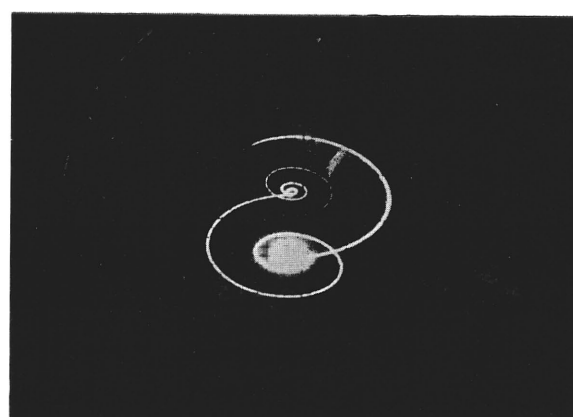
$A_1 = 4$
 $A_2 = 3.5$



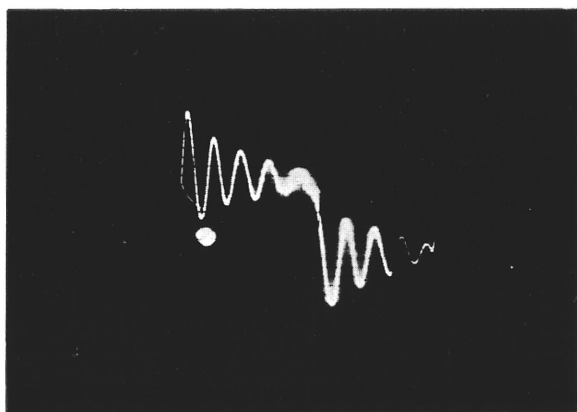
その位相面



$A_1 = 3.5$
 $A_2 = 2.5$

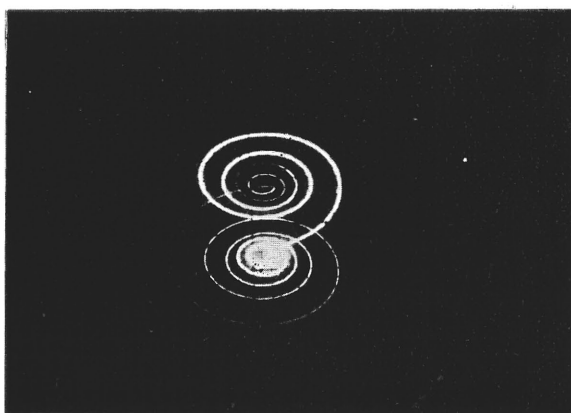


その位相面

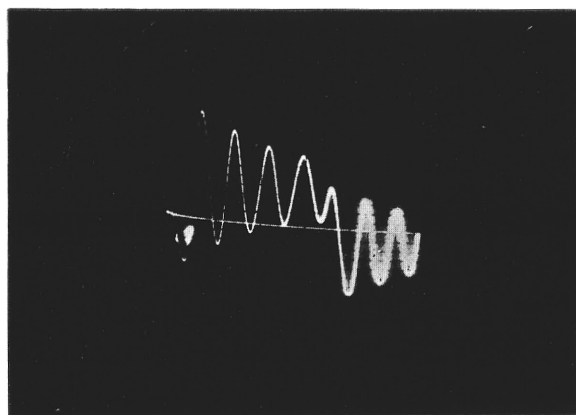


$$A_1 = 3.5$$

$$A_2 = 2$$

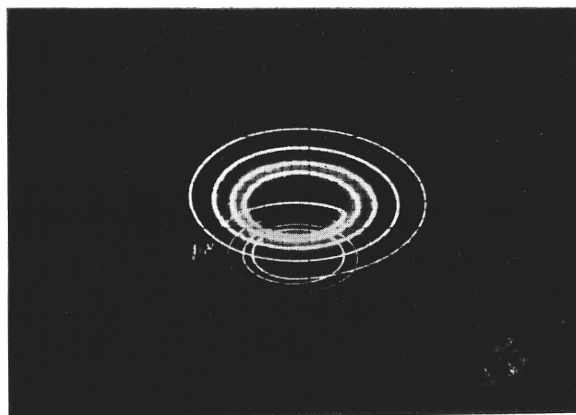


その位相面

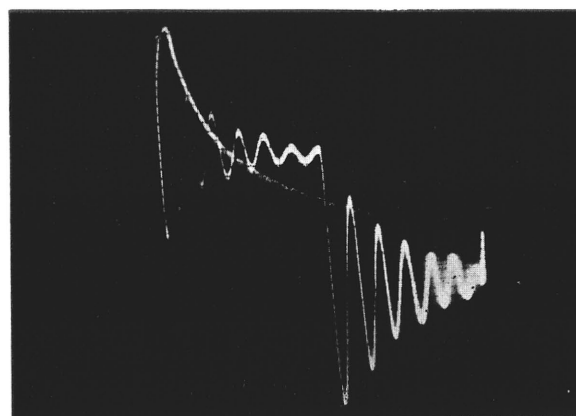


$$A_1 = 2.5$$

$$A_2 = 1.8$$

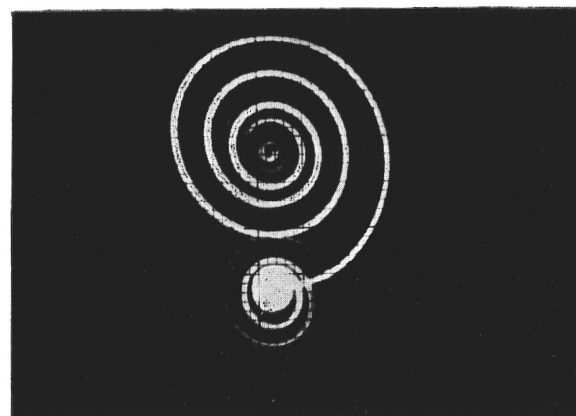


その位相面



$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 2$$



その位相面

(3) 三階微分方程式の解法

今与えられた方程式を

$$\varphi''' + a_2\varphi'' + a_1\varphi' + a_0\varphi = 0 \quad \dots (25)$$

次のような変換を行う。

$$\varphi(t) = \Psi(t_0) \quad t_0 = at$$

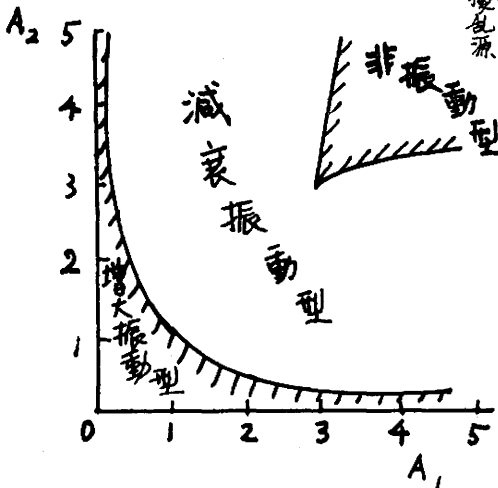
$$\left. \begin{aligned} \therefore \Psi''' + A_2\Psi'' + A_1\Psi' + \Psi &= 0 \\ a = a_0^{1/3} \quad A_1 = a_1/a_0^{1/3} \quad A_2 = a_2/a_0^{1/3} \end{aligned} \right\} (26)$$

この場合の解を示すと、第15・1図のようになる。

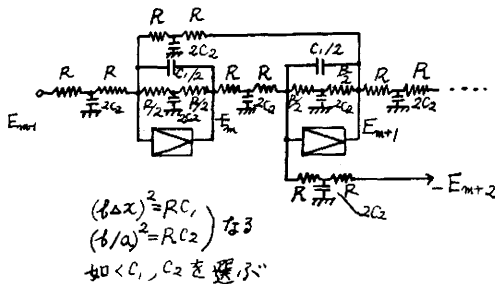
更に A_1, A_2 を変化した場合の解の範囲は第15・2図のようになる。

(4) 伝達函数法による解法の一例

今迄は積分回路法にて行つた実験であるが、この伝達函数法についてその一例を示す。第16図はある自動電圧

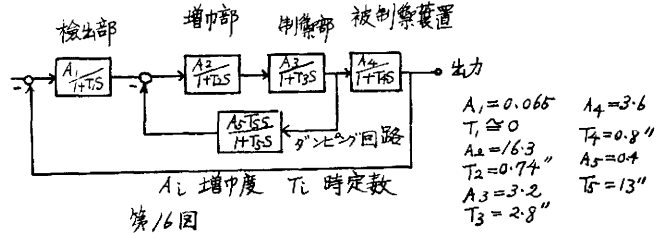


第15.2図

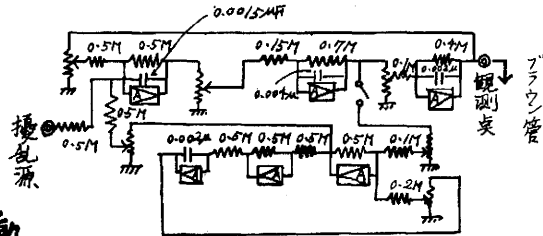
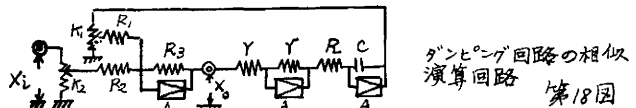
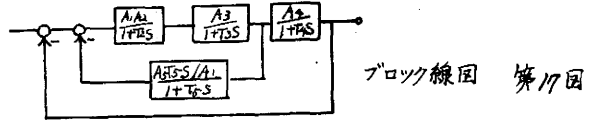


第20図

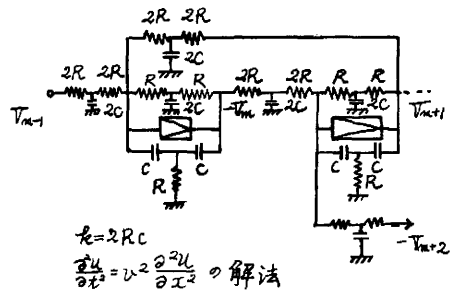
$$a^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \text{ の解法}$$



第16図



第19図



第20図

制禦装置で A_i 及び T_i は夫々実測値とする。図に示す様に各要素の変化はすべて線であると考え、伝達函数は指数函数的であるとする。

又ダンピング回路の伝達函数は

$$G_5(s) = \frac{A_5 T_5 S}{1 + T_5 S}$$

と近似した。又 $T \cong 0$ である為、第17図のブロック線図は第18図に書き換えられ

(6) 電信方程式の解法

$$a^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (29)$$

之に変換を施し

$$\left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^2 S^2 + S \right\} E_m = \left(\frac{1}{b \Delta x} \right)^2 (E_{m+1} - 2E_m + E_{m-1}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

之を解くには第21図の如くすればよい。尚本演算器本体配線図を第22図に示す。

7. 結 言

以上によつて現在の所、三階迄の微分方程式が解けるわけであるが、四階を解くためには積分器一台、五階を解くには、積分器二台とこれから先は簡単に階数を増加して行くことができる。一般に n 階の場合は n 個の積分器と位相変換器が二、三台あれば解ける。更に非線型の問題、高次偏微分方程式の解法等について計画中である。

終りに本研究を担当した学生常広讓君（現在北陸電力）に感謝する。

参 考 文 献

1. Korn and Korn; Electronic Analog Computers, 1956

(受理年月日 昭和33年7月14日)