「数学はパターンの科学である」の考えを視点とした文字式の単元構成：―「パターンの探究」としての文字式や整数の「しくみ」を考察することに焦点を当てて―

福井大学教育実践研究　2023，第48号，pp.25－34

実践論文

「数学はパターンの科学である」の考えを視点とした文字式の単元構成
―「パターンの探究」としての文字式や整数の「しくみ」を考察することに焦点を当てて―

兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科　草　桶　勇　人

中学校数学での文字式の指導における課題は，生徒が文字を用いて式に表し，目的に合った式に変形して数の性質を説明することに困難を示すことが挙げられる。そこで本研究の目的を，「数学はパターンの科学である」という視点に基づき，文字式の指導改善の方向性を明らかにすることとした。この目的を達成するため，中学校第2学年の文字式の単元を文字式のしくみや奇数のしくみに着目して構成した。特に，「奇数と奇数の和は偶数になる」ことの説明を行う活動では，奇数のしくみに着目した授業展開を考えた。授業実践と分析の結果，教師が文字式で表したり説明したりする方法を示さなくても，生徒は奇数のしくみに着目しながら，自分の力で奇数のしくみを文字式に表し，「奇数と奇数の和は偶数になる」ことの説明ができるようになった。以上により，文字式の指導改善のためには，文字式のしくみや奇数のしくみに着目することが重要な視点であるということが示唆された。

キーワード：文字式，パターンの科学，しくみ，奇数

1．はじめに

実際の中学校の現場では，数量を文字式で表すことや文字式で説明することに困難を示す生徒が見られる。特に，中学校第2学年における単元「式の計算」においては，本格的に文字を用いて説明することになり，困難を示す生徒の姿がより顕著に表れる。例えば，文字を用いて数の性質を明らかにする活動においては，具体的な数ではイメージできても，文字（一般数）を用いると，その数量の意味がわからなくなる生徒の姿が見られる。平成30年度全国学力・学習状況調査（2018，国立教育政策研究所）の結果からも，生徒が抱える課題として，文字を用いて式に表す困難さや自分の伝えるべき形に式を変形することの困難さが挙げられている。こうした文字式の困難性に対して様々な研究が行われている一方で，図形の論証の理解に関する発達水準別分布の経年変化の調査結果において大きな改善がみられていない（國宗，2017）。

2．先行研究

(1) 文字式の学習における困難性の要因

文字式の学習における困難性の要因は，文字式の二面性（duality）にあると言われている（Sfard，1991）。Sfard（1991）は，数や文字式の二面性について「数学的概念には，基本的に操作的見方と構造的見方の2つの見方がある」(p.4）と述べている。生徒にとっての文字式の理解について，計算の手続き的な側面は捉えられても，構造的な側面には困難を示すということである。

算数と中学校数学との接続の視点で考察すると，文字式の学習については，算数と比較して中学校数学は抽象度が増す（川上，2010)。そのため，生徒にとって算数から中学校数学への移行が十分に行われていないことが，文字式で困難を示す一つの要因であると考えられる。実際，奇数と奇数の和は偶数である理由を文字で説明する場面では，抽象的な文字を用いた説明の方法に重点をおいた指導がなされている。その結果，生徒にとって何をしているのか分からない状況に陥りやすいことが考えられる。

(2) 文字式の指導改善のための先行研究

文字式の指導改善の先行研究として，小松（2014）は，具体物を用いた指導によって文字式の説明が理解しやすくなることを明らかにした。疋田（2015）は，奇数と奇数の和は偶数である理由を文字で説明する場面で，具体的な数や図を用いる生徒の姿を考察した。その結果，偶数のしくみを理解することは，問題場面を適切に文字式で表現する上で有効な手立てとなることを明らかにした。一方で，形式的証明の導入期での生徒の活動を促進させること（小松，2014）や，文字式の「表現過程」だけでなく「変形過程」の指導も必要であること（疋田，2015）について課題が残されていた。こうした先行研究での課題や生徒の実態に対し，教科書（岡本他，2020）等の従来の指導とは別の視点での改善の方向性を考える必要があると考える。

(3) 改善の視点

そこで，改善の視点を考える際，生徒は具体的に考えることの方に注意が向く傾向があるために，文字式の構造的な側面に目を向ける必要があると考える。また，具体物や具体的な数や図を用いずに，文字式の構造的な側面をもとに，数量を文字式で表したり，文字式で説明し

たりする必要があると考える。

こうした考えをふまえると，布川（2013，2016a）は，「数学はパターンの科学である」という考えを視点とした算数から中学校数学への移行について考察した。その中で，パターンに着目し，算数から中学校数学への移行を「パターンの記述」から「パターンの探究」への移行と捉えた。ここで「パターン」とは，「いくつかの要素とその間の関係のあり方」といった意味で用いている（布川，2016b）。布川（2016a）による数学をパターンの科学とする立場は，数学をパターンについての探究と捉え，各種パターンについての知識や分析手法を発達させる営みであるという立場に基づく（Devlin，1994）。つまり，数学では群や特定の空間などを定義した後，定義に基づいてそれらの性質を探究するが，これは，定義に示される要素間の関係を持つパターンである群や特定の空間を対象とし，その対象の性質を探究することだと見ることができる（布川，2013）。これまでにも，数学をパターンの科学として特徴付けることは，数学者における数学についての考察から始まり（Devlin，1994；Steen，1988），算数・数学教育（山本，2016）や，実践レベルでも小学校（大橋・渡辺・岩崎，2011）や中学校（布川・青柳，2019：草桶・布川，2020）において利用されている。本研究においては，「数学はパターンの科学である」という視点に基づき，「パターンの記述」から「パターンの探究」への移行を基にした文字式の単元構成を指導の改善点として取り上げる。本研究における「パターン」とは，文字式や整数の「しくみ」と捉える。

文字式の単元での「奇数たす奇数は偶数である」ことを説明する活動において，「パターンの記述」とは，具体的な数字を用いて$1+3=4, 7+3=10$のように示すこと。「パターンの探究」とは，奇数のしくみを探究し，奇数の捉え方や奇数の見方を広げることとする。本研究では，奇数のしくみとは，2でわりきれない，2でわると1あまる，2でわったときに商が整数にならない，といった奇数$2n+1$の構造的な側面とする。

文字式の単元全体における「パターンの探究」とは，文字式のしくみを探究することとする。本研究では，文字式のしくみとは，文字式の二面性における構造的な側面と捉える。つまり，文字式のしくみとは，次数や単項式・多項式，分数式や同類項といった側面をもつものとする。あるいは，数の世界を文字式の世界よりは具体性の高い場面と捉え，そこで観察した現象（奇数たす奇数がいつも偶数になってしまうこと）について，そのしくみを，これまで作ってきた文字式の体系を用いて探究しようとするイメージとも考えられる。

このように本研究においては，具体物や具体的な数や図を用いずにしくみに着目した指導を改善の視点とする。

３．研究の目的と方法

以上より，本研究の目的を「数学はパターンの科学である」という視点に基づき，特に奇数のしくみに目を向けた指導を考え，文字式の指導改善の方向性を明らかにすることとする。

研究の方法については，「数学はパターンの科学である」という視点を基に具体的な指導改善のあり方を検討する。検討した指導改善のあり方を基に，実践を行う単元は第2学年の「式の計算」とする。特に「奇数と奇数の和は偶数である」理由を説明する場面を中心に取り上げ，授業中の生徒の発言及びワークシート，授業後のインタビュー調査や振り返りの記述から授業の有効性を検証する。授業の様子については，ICレコーダーを用いて教師の発話や生徒の発言を記録する。

授業における生徒の学習過程においては，どのように奇数のしくみを文字式でおいたのか，どのように文字式で説明できたのかを，生徒の発言の記録やワークシート，授業後のインタビューを基に分析する。インタビューについては，半構造化インタビューの手法を取り入れる。構造化された質問は「どのようにして文字式に表したのか」「どのようにして文字式で説明したのか」とする。また，インタビューの様子をICレコーダーで記録する。奇数のしくみの捉えに基づく文字式の表し方や，しくみをもとにした文字式の説明の仕方を分析する。

４．具体的な指導改善のあり方

(1) しくみに着目した単元の設定

本研究で主張する単元構成は以下の通りである。

まずは，単元の最初に本単元ではしくみに注目して学習していくことを生徒に伝える。文字式で表されるしくみを探究の対象とし，文字式の構造に目を向けさせるために，文字式同士の関係を調べたり，文字式の次数や式の形に着目したりする活動を取り入れる。さらに，計算過程や計算結果がすでに提示されたものを課題とし，計算方法を説明する場面を設定する。従来の指導では，計算方法や文字を用いた説明の仕方を学習することが中心的な活動であったと考えられる。本研究では，単元を通してしくみという言葉を教師が意図的に使用し，文字式のしくみを生徒に注目させる。

また，「奇数と奇数の和は偶数である」理由を文字で説明する場面では，奇数のしくみと偶数のしくみの関係を問題にしていることを明確にするために，具体的な数を見せずに理由を考えさせる。疋田（2015）の課題提示と異なり，あらかじめ2つの奇数が書かれたカードを2枚の封筒に入れ，中は見せずに生徒に2枚のカードに書かれた数の和は奇数になるか，偶数になるかと聞く。両方の数字は奇数であるというヒントを与え，奇数という情報だけで本当に分かるのだろうか，という疑問を共有する。この疑問を考える中で，奇数のしくみだけから偶数のしくみが生まれてくることを考えさせる。偶数の

しくみにも着目させることで，和は偶数になるという見通しを持たせ，疋田（2015）の研究課題で指摘された式の「変形過程」の指導を意識した展開とする。このように，封筒の中の数を見ていないにもかかわらず，なぜ奇数たす奇数は偶数であることがいえるのかを考えさせることにより，奇数のしくみに焦点を当てて考えざるを得ない状況をつくる。このような状況をつくることにより，小松（2014）の指摘した文字式で説明する活動を促進させるきっかけを作る。

さらに，生徒の考えた奇数のしくみのイメージを文字式で表す際には，算数では奇数を「2でわりきれない整数」と定義したことや，算数で学習した被除数のしくみ（被除数＝除数×商＋あまり）も取り上げる。

⑵ 奇数のイメージと2n＋1との関連づけ

中学校第3学年で行った実践（草桶・布川，2020）の課題として，ワークシートの生徒の記述から，生徒の奇数に対する多様なイメージを十分に考慮しなかったこと，それらのイメージと2n＋1との関係を扱うということをせずに授業を進めてしまったことが挙げられた。そこで本研究では，「数学はパターンの科学である」という視点から，奇数とは文字式に表すと2n＋1であるという立場を生徒に納得させるために，生徒のもつイメージと2n＋1とを関係づける場を設ける。その一つとして，生徒の奇数に対するイメージを生徒自身で共有させ，奇数のしくみに着目させることを通して，文字式2n＋1につなげやすくなるようにしていくことを考える。

また，定義が機能するようになるためには，「かたち」の性質として見出されたいくつかの事柄が互いに関係づけられ，順序づけられた関係網（a network of relations）が構成される必要があるとされている（布川，1993）。木村（1994）は，生徒が感覚的に関係網を作ることにより，生徒の平行四辺形の捉え方が定義に近いものになることを示した。そこで，生徒の奇数に対するイメージが，2n＋1から派生されるということを感じるようにするために，2n＋1から他の性質が言えそうかを考える場を設定する。その上で2n＋1が奇数の本質を表現しているということを生徒に実感させる。

5．指導の実際

本実践は，公立中学校2年生（生徒数 26 名）を対象に，令和3年4～5月に8時間扱いで行われた。授業は筆者が担当した。本稿では，生徒がしくみについて着目できるよう，教師が意図的にしくみという言葉を用いて授業を実践した様子に焦点を当てて，実際の授業を記述する。学習計画は表1の通りとする。

⑴ 第1時

第1時は以下の学習課題を設定した。授業のねらいは，文字式のしくみに着目し，文字式のしくみについて理解することである。

表1　学習計画

時間	学習内容（具体的な活動）
第1時	単項式・多項式・次数 （文字式のしくみに着目する）
第2～6時	文字式の計算 （文字式の計算方法を説明する）
第7～8時	文字式の説明 （文字式や整数のしくみに着目する）

学習課題

課題1
縦 x cm，横 x cm，高さ y cmの直方体があります。文字式① $4x$，② x^2，③ $2x+2$，④ xy，⑤ $2x^2+4xy$，⑥ x^2yはそれぞれ何を表すでしょう。

課題2
課題1の①～⑥について，文字式のしくみに着目して分類しましょう。

課題3
$4x$は1，x^2は2，x^2yは3とします。どんなきまりがあるでしょう。

課題4
$2x$，$5a+1$，$x+8y-6$と$-x^2$，$7ab$，x^2-4x+3をどのように分類したでしょう。

単元の最初に，まず教師から本単元では単に計算の習得にとどまらず，しくみを意識して学習していくことを伝えた。

文字式を考える対象とするための課題として，縦 x cm，横 x cm，高さ y cm の直方体を提示し，$4x$や$2x^2+4xy$などの文字式が何を表す数量かを考えさせた。すると，生徒は直方体の底面の周の長さや表面積だとすぐに挙げることができた。

次に，ある視点で分類されている複数の文字式を提示し，分類された視点が何かを考える課題を提示した。生徒は，単項式や多項式で分類されていることは指摘できたが，一次式や二次式で分類されていることに気づくことはできなかった。このように，本実践では単項式や多項式，一次式や二次式とは何か生徒自身で探究する時間を設定した。従来の指導では，教師が先に次数の定義を説明していたが，本実践では次数とは何かをつかんでいく活動を設定した。

生徒にとって，中学1年生では計算方法を習得し練習問題を解くという活動が多かったので，文字式のしくみについて考える活動に最初はとまどいを感じる様子であった。授業後には，「難しい。」「これは数学っぽくなくセンスが必要だ。」「なぞなぞを解くようで楽しい。」と感じている生徒が見られた。

⑵ 第2～4時

第2～4時は以下の学習課題を設定した。授業のねらいは，計算方法を説明する活動を通して，文字式のしくみに着目し，文字式のしくみについて理解することである。

学習課題（抜粋）

課題1
3a＋4b－2a＋2b＝3a－2a＋4b＋2b，3a－2a＋4b＋2b＝（3－2）a＋（4＋2）bはそれぞれどのように計算しているでしょう。
課題3
以下の計算は，どのように計算したでしょう。
（x－2y）＋（－3x＋5y）
＝x－2y－3x＋5y
＝x－3x－2y＋5y
＝－2x＋3y
課題6
以下の計算は，どのように計算したでしょう。

$$(9x-6y)\div 3=(9x-6y)\times\frac{1}{3}$$
$$=9x\times\frac{1}{3}-6y\times\frac{1}{3}$$
$$=3x-2y$$

多項式の計算について，教科書（岡本他，2020）等の従来の指導では，計算方法を習得する活動が多かった。計算方法を習得することは必要なことではあるが，本実践では，生徒が計算方法を説明する場面も設定し，文字式のしくみに着目することを強調した。

多項式の計算過程を説明する課題として，①3a＋4b－2a＋2b＝3a－2a＋4b＋2b，②3a－2a＋4b＋2b＝(3－2)a＋(4＋2)bはそれぞれどのように計算しているかを問うた。生徒は，①は「項を入れかえる。」「同じ文字でかためる。」と答えた。②は「同じ文字の係数同士の計算をする。」「係数をかっこで計算した。」と答えたが，分配法則を用いるということは思いつかなかった。そこで，教師がmx＋nxと（m＋n）xの関係に着目させることにより，生徒は文字式の形に注目しながら「4b＋2b＝(4＋2)b＝6b」のように分配法則が成り立つことに気付くことができた。

このように，文字式同士の関係を考えさせながら，同類項をまとめることや分配法則・交換法則が成り立っていることについて確認した。特に分配法則を意識させたことについては，第7～8時での奇数と奇数の和は偶数になることを説明する際に，2n＋2m＋2＝2(n＋m＋1)という計算につなげることもねらいとした。

(3) 第5～6時

第5～6時は以下の学習課題を設定した。授業のねらいは，第2～4時同様に，計算方法を説明する活動を通して，文字式のしくみに着目し，文字式のしくみについて理解することである。

第5時は，単項式×単項式，単項式÷単項式の具体的な計算過程と計算結果を提示し，計算過程を説明する課題を設定した。生徒は，乗法は「数字の積と文字の積で計算する。」，除法は「数の除法と同じように分母の同じ文字を約分して計算する。」のように計算方法について考え，文字式について数と同じような側面をもつという感覚をつかむことができた。授業後の感想では「単項式

学習課題（抜粋）

課題2

$$20ab\div 4a=\frac{20ab}{4a}$$
$$=\frac{\cancel{20}\times\cancel{a}\times b}{\cancel{4}\times\cancel{a}}$$
$$=5b$$

どのように計算しているでしょう。
課題4
A÷B×C と $\frac{A\times C}{B}$ とは，どのような関係にあるでしょう。
課題5
A÷B÷C と $\frac{A}{B\times C}$ とは，どのような関係にあるでしょう。

の除法は数の除法と同じようにできる。しくみを考えることはそんなに難しいことではない。」「しくみを考えるのは楽しい。」と述べていた。

第6時は，A÷B×Cと$\frac{A\times C}{B}$，A÷B÷Cと$\frac{A}{B\times C}$のそれぞれの文字式同士の関係について着目させた。すると生徒は，「計算しても答えは等しくなる。」「代入すると同じ数になる。」「分数の式にしているか，していないか。」「2つの式は分数に表しているだけだから同じ意味の式。」という意見を出した。このように，2つの式の関係に着目させることにより，生徒は文字式のしくみがどのようになっているかを確認することができた。

(4) 第7～8時

第7～8時は以下の学習課題を設定した。授業のねらいは，封筒の中にある奇数という情報のみを用いて，奇数や偶数のしくみを文字式で表すこと，しくみに着目しながら奇数と奇数の和は偶数になることを文字式を用いて説明することである。

学習課題（抜粋）

課題1
奇数のしくみと偶数のしくみとは，何でしょう。
課題2
奇数のしくみと偶数のしくみをそれぞれ文字式でおくと，どうなるでしょう。
課題3
封筒の数字をたすと偶数になるのは，どうしてでしょう。奇数や偶数のしくみに注目して，説明してみましょう。

第7時は，2枚の封筒にあらかじめそれぞれ奇数を書いたカードを入れておいた。ただし，その数は生徒があまり思いつきそうもない数にし，これは最後まで見せなかった（第7～8時のワークシートは，資料1を参照）。その上で，2枚の封筒を示しそして次のように問うた。以下は，教師と生徒の授業中のやりとりである。（T：教師，S：生徒）

T：それぞれに入っている数を足した時の和についてど

んなことがわかる？2つの数をたしたら和は奇数になる，それとも偶数になる？
S：今の情報だけではわからない。中の数は？
T：中の数字がいくつかは教えられないので，他にどんな情報があれば分かりそう？
S：えっと，小数，分数，奇数とか。
T：そう。奇数です。このように，両方とも奇数という情報だけで2つの数の和はどうなるかな。
S：偶数です。だって，3＋7＝10だから。
T：なるほど。でも中の数は残念ながら3でも7でもないんだよね。中の数が奇数という情報だけで本当に分かるのかな。
S：中の数が分からないから分かりません。
S：いや，中の数が分からなくても偶数になると思います。絶対に偶数になる。

このように，封筒の中の数が奇数という情報だけで本当に分かるのかという疑問を考える中で，奇数というしくみだけから偶数というしくみが生まれてくることを考えた。そこから，分かっていることは奇数ということだけであるため，奇数のしくみや偶数のしくみを考えていく展開とした。生徒から奇数のしくみ，偶数のしくみの考えがそれぞれ以下のように出された。

奇数のしくみ：2でわりきれない；2でわると1あまる；偶数＋1；1から1つずつとばす；2でわったときに商が整数にならない
偶数のしくみ：2でわれる；2でわりきれる；奇数＋1；2から1つずつとばす；2の倍数

これらのしくみから，奇数のしくみや偶数のしくみをそれぞれ文字式で表せないか問うた。その後，算数で学習した被除数のしくみ（被除数＝除数×商＋あまり）もヒントとして与えた。すると，全生徒26名に対し，奇数のしくみと偶数のしくみの両方を文字式で表すことができたのは17名，奇数のしくみだけを文字式で表すことができたのは3名，両方ともに文字式で表せなかったのは6名であった。表2は，奇数と偶数のしくみの両方を文字式で表すことができた17名の文字式の例である。

奇数のしくみ，偶数のしくみの順に文字式に表した生徒と，偶数のしくみ，奇数のしくみの順に文字式に表した生徒に分かれた。従来の指導のように，具体的な数字である7＝2×3＋1などと表さなくても奇数のしくみを文字式で表すことができた。

表2の文字式はどれも奇数や偶数のしくみを表している。しかし，授業の後半での文字式の説明の活動を考慮して，教師の方から生徒の挙げた文字式の中から代表して，異なる2つの奇数を2n＋1, 2m＋1，偶数を2ℓで表した。これらの文字式から，上で述べた生徒が導き出した奇数のしくみや偶数のしくみの考えが導かれることを

表2　生徒が表した文字式

	奇数のしくみ	偶数のしくみ	人数
例1	2x＋1	2y	1名
例2	2x＋1	2x	4名
例3	2n＋1	2n	1名
例4	2n＋1	2m	1名
例5	2n−1もしくは 2n＋1（nは整数）	2m （mは整数）	1名
例6	2a−1, 2a＋1	2a	2名
例7	2n−1（2n＋1）	2n	4名
例8	2n＋1	2n＋2	1名
例9	2x−1	2x	2名

確認させた。この活動は，2n＋1が奇数の本質を捉えたものであると生徒に実感させることをねらいとした活動である。

授業の後半では，実際に奇数と奇数の和は偶数になる理由を，奇数のしくみと偶数のしくみをもとに説明する活動を個人で考えさせ第7時を終えた。全生徒26名に対し，文字式で説明が書けたのは5名，あまり1に注目して説明が書けたのは5名，2つの奇数をどちらも2n＋1として説明を書いたのは3名，文字式に数を代入して考えたのは3名，説明が書けなかったのは10名であった。

第8時は，個人で考えた偶数になる理由の説明を少人数（4人または5人×6班）で話し合わせ，各班の意見を発表させた。各班の説明は，奇数のしくみを2n＋1と2m＋1と表し，それらをたして2(n＋m＋1）と説明できた班が4つ，2n＋1と2m＋1とおいてから文字に値を代入して具体的な数で考えた班が2つあった。代入することについて，整数の性質を調べるためには分かりやすい説明となり大切な活動であることは認めた。その上で，奇数と奇数の和は偶数になる理由を文字式での説明する際は，あえて代入することは必要のないことを強調し，文字式のままの説明で進めるように指導した。授業後には，授業の振り返りとして「今日の問題（封筒の問題）は，何に着目して説明するとよいと思いますか」，「奇数や偶数のしくみを考えることで，どのような良い点（メリット）があるでしょう。」（いずれも自由記述，複数回答可）ということについて記述させ，封筒の問題における着目点やしくみを考えることの良い点について考えさせ，授業を終えた。（記述の分析は次節）

6．考察と分析

本研究では，単元全体をしくみに着目した内容に構成した。特に，奇数と奇数の和が偶数になる説明をする活動においては，奇数のしくみに着目する活動の場を設定した。生徒の姿から以下の3点が示唆された。

(1) 奇数のしくみを文字式で表すこと

①被乗数のしくみに着目

第7時の学習課題①「奇数のしくみと偶数のしくみを

それぞれ文字式でおくこと」について，図1〜図3は生徒が表した文字式である。

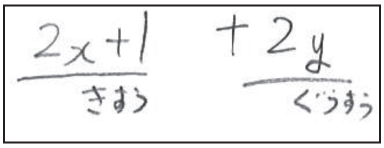


図1　生徒の文字式の例１

授業後に，奇数のしくみを文字式2x＋1（図1）で表すことができた生徒に，文字式の表し方が未習にもかかわらず文字式で表すことができた理由をインタビューで調査した。するとその生徒は，「小学校のときの復習があって，このわられる数は，わる数×商＋あまりみたいな，そういうのが小学校の時習ったことだから考えやすかった。」と答えていた。この生徒の発言（下線）から，小学校で学んだ被除数のしくみを復習したことにより，具体的な数字がはっきりしていなくても，奇数のしくみを文字式で表すことがしやすくなったことが考えられる。

さらに，奇数のしくみを文字式で表して説明できた生徒の中には，第8時の授業後の振り返りの記述で，「封筒の問題では被除数のしくみに着目するとよい」と答えた生徒も見られた。したがって，被除数のしくみを考えることが，奇数のしくみを文字式で表す際の助けになったことが示唆される。

②奇数のしくみに着目

第2〜6時における生徒の「しくみに対する考え」について，授業後の振り返りの記述を分析した。その結果，第2〜5時は，「同類項同士で計算する。」「交換法則や分配法則を用いる。」「通分する。」といったように，計算方法がしくみだと考える記述が多かった。しかし授業が進むにつれ，計算方法だけでなく「A÷B×Cと$\frac{A\times C}{B}$，A÷B÷Cと$\frac{A}{B\times C}$は，形が違うが同じ形の式」「分数でA÷B÷Cと表されているか表されていないか」（第6時）のように，徐々に計算の中に表れる文字式のしくみに着目する記述が見られるようになった。以上より，教師が意図的に単元を通して「しくみ」という言葉を用いることにより，生徒は文字式の構造に目を向けられるようになったことが示唆される。

第7時の学習課題②「奇数のしくみを文字式で表すこと」について，以下は生徒が表した文字式である。

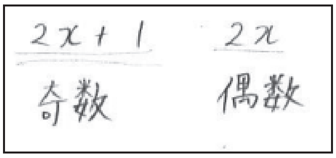


図2　生徒の文字式の例２

図2の生徒は，授業で最初に奇数を2x＋1とおき，その後偶数を2xとおいていた。授業後のインタビューで「奇数とは，2でわると1あまるという考えから，あまり1に注目して2x＋1とおいた」と述べていた。この発言（下線）から，この生徒は「あまり1」を＋1と表現し，「2でわる」という部分を2xと表現して文字式に表したことが考えられる。従来は偶数を文字式でおき，その後に1をたすまたはひいて奇数を文字式で表す指導を行っていることが多い。しかし，この生徒は奇数のしくみである2でわって1あまるという部分のあまりに着目して，奇数のしくみを文字式で表すことができたことが示唆される。

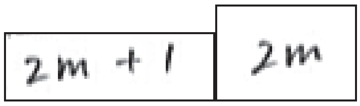


図3　生徒の文字式の例３
（左が奇数，右が偶数）

図3の生徒は，授業後のインタビューで，「奇数とは，2でわって1あまるということだから，2をかけて1をたすということです。mがどんな数でも2をかけたら偶数となったので，それに1をたしたら絶対に奇数になる。」と述べていた。この発言（下線）から，2でわって1あまるということと，2をかけて1をたすことを同じことと捉え，奇数のしくみを文字式で表したことが考えられる。

以上の生徒の事例から，奇数のしくみに着目させ，奇数のしくみとは何かをクラス全員で考え，そのイメージを出し合ったことにより，奇数のしくみを文字式で表すことができるようになったということが示唆される。さらに，しくみに着目した単元設定によって文字式の構造に目が向き，奇数のしくみを考えて文字式で表すことにつながったことが示唆される。

⑵ 文字式を用いた説明

第7時の学習課題③「封筒の数字をたすと偶数になる理由を説明すること」について，図4〜図7は生徒が説明した内容である。

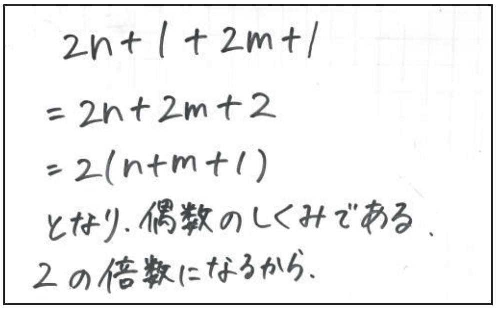


図4　生徒の説明例１

図4の生徒は，授業後のインタビューで，「私は2n＋2m＋2が全部2をかけているから，偶数のしくみである2

の倍数になるので，これは偶数です。だから奇数のしくみとか偶数のしくみとかに着目して考えるといいかなって思いました。奇数の文字式と偶数の文字式で計算して，文字式にも着目するとよかったので，文字式で計算して奇数・偶数のしくみに着目しながら文字式で計算するというのが，私は分かりました。だから奇数や偶数のしくみを考えることで，奇数や偶数を文字式で表すことができる。あと，しくみを考えて文字式がわかったら，封筒みたいにたす数が分かっていなくても，答えが奇数か偶数かが分かると分かりました。封筒の中身が分からなくて，奇数・偶数って分かっただけで，文字式が生まれるのがすごいなあと思いました。」と述べていた。

また，奇数や偶数のしくみに着目して，2n＋2m＋2を偶数のしくみだと気付くことができ，文字式の計算もできている。奇数と偶数のしくみを考えることにより，奇数同士をたして2n＋2m＋2＝2（n＋m＋1）という計算を行っている。この発言により，2n＋2m＋2という式が，偶数になることを気付きやすくしていると考えられる。また，しくみを考えることの良い点として，文字式に表しやすくなること，奇数たす奇数が偶数になることがすぐ分かることを挙げている。さらに，奇数のしくみや偶数のしくみを考えることにより，文字式が生まれることに驚きを感じている。この姿から，しくみを考えることのよさを実感できているということが示唆される。

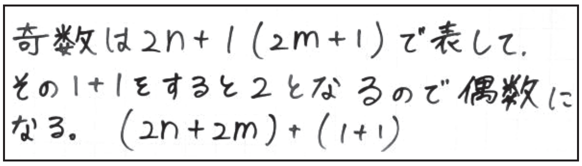

奇数は2n+1(2m+1)で表して，
その1+1をすると2となるので偶数になる。(2n+2m)+(1+1)

図5　生徒の説明例２

図5の生徒は，授業後のインタビューで，「奇数はわる2をしたら1あまるので，奇数同士だから同じことが起こるから，あまった1同士をたして偶数になる。同類項同士で計算するのと同じで，あまり1同士計算したらあまり2になったから，あまり1も同じ整数だから，それをたしたら2になる。」と答えていた。

またこの生徒は，奇数を2でわったときのあまり1に注目して，あまり1を2つたして偶数になると指摘している。このように考えた背景として，同類項をまとめるという活動を挙げている。奇数のしくみを考えることにより，あまり1に注目して同類項をまとめる活動を生かし，その2つをたして2とすることが気づきやすくなったことが示唆される。従来の指導では，具体的な奇数を例にして文字式でおくことを意識させ，文字式の計算の一部としての1＋1＝2に注目させてきた。本実践のように，奇数のしくみを考えたからこそ，あまりに注目することができたことが示唆される。

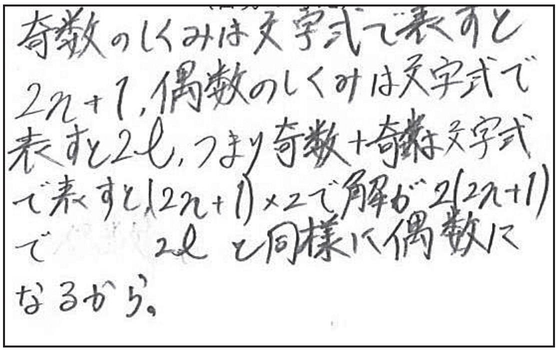

奇数のしくみは文字式で表すと
2n+1，偶数のしくみは文字式で
表すと2ℓ，つまり奇数+奇数を文字式
で表すと(2n+1)×2で解が2(2n+1)
で 2ℓ と同様に偶数に
なるから。

図6　生徒の説明例３

図6の生徒は，奇数のしくみと偶数のしくみに着目し，2つの奇数の和を（2n＋1）×2と表した。そして2n＋1が整数なので，2（2n＋1）は2ℓと同様に偶数のしくみとなると判断して説明を行っている。

自分の力でしくみに着目した説明ができている一方で，異なる2つの奇数の関係性にまでは着目できてはいなかった。2つの奇数の和を（2n＋1）×2と表した場合，3＋3のように同じ奇数の和を表すことしかできない。授業ではこの点に触れることは行わず，教師は異なる2つの奇数を2n＋1, 2m＋1であると触れる程度にとどめた。したがってこの生徒は，3＋3のように同じ奇数同士の和について考慮せずに，2つの奇数の和を（2n＋1）×2と表していたことが考えられる。自分で文字式を用いた説明を行う際，異なる2つの奇数の関係性についても触れることが必要であったことが示唆される。

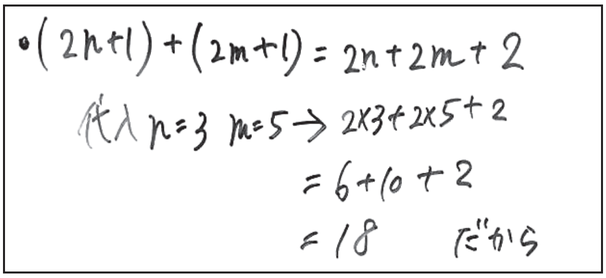

・(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2
代入 n=3 m=5 → 2×3+2×5+2
=6+10+2
=18 だから

図7　生徒の説明例４

図7の生徒は，授業後のインタビューで，「この問題みたいに最初何の数字か分からなくても，奇数と偶数とかをnとかmとか文字を使って表せるようになるだけで，問題とか出てきたときでも解きやすくなる，分かりやすくなる。でも，文字があると本当にそうなのか分かりにくい。数字を表すことによって分かりやすくして，自分の考えを他の人に説明するとき，文字があると分かりにくいから代入した。」と述べていた。この生徒は，具体的な数字が分からなくても，文字を用いることにより問題が解きやすくなるということを挙げている。一方で，他の人に対しての説明の分かりやすさを意識するために，具体的な数字で説明することも挙げている。そのために，文字式での説明の内容について，最初の1行目は同類項をまとめて計算ができたが，2行目からは代入し

て具体的な数で考えていた。

図4～図7の生徒の事例から，教師が文字式で説明する方法を示さなくても，文字式を利用したりあまり1に注目したりして，適切な説明を書くことができる生徒の姿が見られた。従来の指導では，具体的な奇数や偶数を用いて，奇数や偶数を文字式で表し文字を用いた説明の仕方を教師が解説していることが多かったと考えられる。しかし，教師が単元を通してしくみに着目させたことによって，生徒が奇数のしくみに目を向け，自分の力で文字を用いて説明することが可能になったことが示唆される。

一方で，2つの奇数のしくみの関係性について考えることや，代入してしくみを整理しながら数の構造を明らかにしていくという視点を取り入れることが必要であったということも示唆される。代入することとしくみを調べることは異なることを念頭に置き，しくみを考える上での一つの確認の方法として代入がある。代入してしくみを整理しながら数の構造を明らかにしていく，という視点を取り入れることが今後の課題として考えられる。

(3) 整数の性質を調べるという探究

第8時の授業後の振り返りで「今日の問題（封筒の問題）は，何に着目して説明するとよいと思いますか」（自由記述，複数回答可）を記述させた。すると，「奇数のしくみと偶数のしくみに着目して説明するとよい」と答えた生徒は24名中16名であった（2名欠席）。この結果から，奇数や偶数のもつしくみの探究として改めて提示することにより，クラスの3分の2の生徒が，整数の性質を調べるという探究が「整数のしくみに着目して探究するということである」と実感することが可能になったと考えられる。残りの8名の生徒についても，「2n＋1の「＋1」（余り1）」，「数」，といったしくみに近い記述であった。図5の説明をかいた生徒は，前述したように授業後のインタビューで「今日の問題は文字式にも着目するとよかったので，文字式で計算して奇数・偶数のしくみに着目しながら文字式で計算するというのが，私は分かりました。」と述べていた。

また，第8時の授業後の振り返りで「奇数や偶数のしくみを考えることで，どのような良い点（メリット）があるでしょう。」（自由記述，複数回答可）を記述させた。回答の結果は表3の通りであった。

この結果から，「数字がわからなくても奇数と奇数の和は偶数であることがわかる」と答えた生徒が全生徒24名に対し13名であった。そのため半分以上の生徒が，しくみを考えることが，整数の探究を行う上での一つの方法であると実感できたとことが示唆された。このように，生徒は整数の性質を調べるという探究は，奇数や偶数のしくみに着目することであると気付くことができたと考えられる。

表3　生徒の回答例（生徒数24名，2名欠席）

回答例	生徒数
「数字がわからなくても奇数と奇数の和は偶数であることがわかる。」	13名
「計算についての記述（計算が楽になるなど）。」	6名
「文字式で表せる。」	2名
「奇数や偶数を改めて知る。」	1名
「想像力が鍛えられる」	1名
「暇な時間がつぶせる」	1名
「代入の練習になる」	1名
無答	1名

7．おわりに

本研究では，「数学はパターンの科学である」という考えを視点として，しくみに着目した単元を設定した。授業の実践と分析の結果，以下の3点が示唆された。

(1) しくみに着目することが，奇数のしくみを文字式で表すことにつながること。

(2) 奇数のしくみや偶数のしくみに着目することが，文字式で説明することにつながること。

(3) 整数の探究とは，整数のしくみに着目することであると実感できることにつながること。

(1) ～ (3) のように，教師が文字式で表す方法や説明する方法を示さなくても，生徒はしくみに着目することにより，具体的な数を用いずに，自分の力で奇数のしくみを文字式で表し，見通しをもった式の変形を行いながら文字式を用いた説明ができるということが示唆された。以上により，文字式の指導改善のためには，「数学はパターンの科学である」という考えに基づき，文字式のしくみや奇数のしくみに着目することが重要な視点であるということが示唆された。

今後の課題は2点である。一つは2つの奇数のしくみの関係性について考えること，もう一つは代入してしくみを整理しながら数の構造を明らかにしていくという視点を取り入れることである。

引用・文献

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns*. New York, NY: Scientific American Library.

疋田克彦（2015）．文字式利用の表現過程に焦点をあてた論証の指導改善に関する研究. 上越数学教育研究, 30, 63-72.

川上公一（2010）．中1ギャップを撃退する指導のアイディア 36．明治図書.

木村公男（1994）．論理的関係網に関する研究：図形の性質間を中心に．数学教育研究，9，63-72.

国立教育政策研究所（2018）．平成30年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学.

小松孝太郎（2014）算数・数学教育における証明指導の改善．東洋館出版社.

國宗進（2017）．数学教育における論証の理解とその学習指導．東洋館出版社．
草桶勇人・布川和彦（2020）:「数学：パターン」の科学を視点とした授業に関する一考察：文字を用いた説明の場面に注目して．日本数学教育学会第 53 回秋期研究大会発表集録，233-236．
布川和彦（1993）．van Hiele の新たな意味付け：インフォーマルな知識と発達の最近接領域を手がかりとして．教育方法学研究，19，37-46．
布川和彦（2013）．「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討．上越教育大学研究紀要，32，169-180．
布川和彦（2016a）．「数学＝パターンの科学」の考えを視点とした算数から数学への移行についての考察．日本数学教育学会誌，98(4)，3-14．
布川和彦（2016b）．生徒の姿から指導を考える．学校図書．
布川和彦・青柳潤（2019）．数学＝パターンの科学を視点とした比例・反比例の学習における生徒の反応．日本数学教育学会第 52 回秋期研究大会発表集録，337-338．
大橋博・渡辺勝行・岩崎浩（2011）．学校支援プロジェクト」における算数の授業改善へのアプローチ:「パターンの科学としての数学」の視点の有効性．数学教育学研究，17(2)，127-142．
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240, 611-616.
山本信也（2016）．数学教育における「パターンの科学の数学」・「デザイン科学としての数学教育学」の意義．日本教科教育学会誌，38(4)，103-109．

The Constitution of the Units of the Algebraic Expression, based on the viewpoint that "Mathematics is the science of patterns"
: Focus on examining "the mechanism" of the algebraic expression and the integers as "the research of patterns"

Hayato KUSAOKE

The problem of teaching the algebraic expression in the class of mathematics at the junior high school is that it is difficult for the students to express the quantities using symbols and to explain property of the number by transforming symbols into the expression suitable for the purpose. The purpose of this research is to clarify the direction of the teaching improvement of the algebraic expression, based on the viewpoint that "Mathematics is the science of patterns". In order to achieve this purpose, I constituted the unit of the algebraic expression of the 2nd grade of a junior high school. Especially, in the activity where the students explain that “An odd number and an odd number makes an even number.”, I considered lesson deployment which focused on the mechanism of the odd number. After the analysis of the class, it was suggested that even if the teacher did not show the method represented by the algebraic expression or the method to explain it, the students could express the mechanism of the odd number by the algebraic expression, and could explain that “An odd number and an odd number makes an even number.” using the algebraic expression without help of the teacher. For the improvement of teaching the algebraic expression, it was suggested that it was an important viewpoint to focus on the mechanism of the algebraic expression and that of the odd number.

Keywords：algebraic expression, the science of patterns, mechanism, odd number

資料１

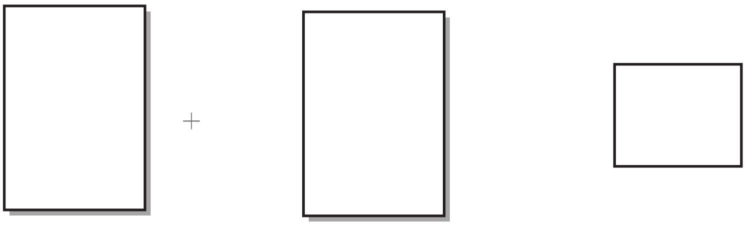
２つの数字をたすとどんな数になる？

第１章　式の計算⑦

（　　）年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

【課題１】封筒の中の数字をたすと，どんな数になるでしょう。

封筒　　封筒



Ｑ１．（　　　　　）とは

（自分の考え）	（他の人の考え）

Ｑ２．（　　　　　）とは

（自分の考え）	（他の人の考え）

Ｑ３．（　　　　　）と（　　　　　）をそれぞれ文字式でおくと，どうなるでしょう。

（メモ）

Ｑ４．封筒の数字をたすと（　　　　　）になるのは，どうしてでしょう。

奇数や偶数のしくみに注目して，説明してみましょう。

（自分の考え）	（他の人の考え）