「4数ゲーム」の教材化について

Ⅵ

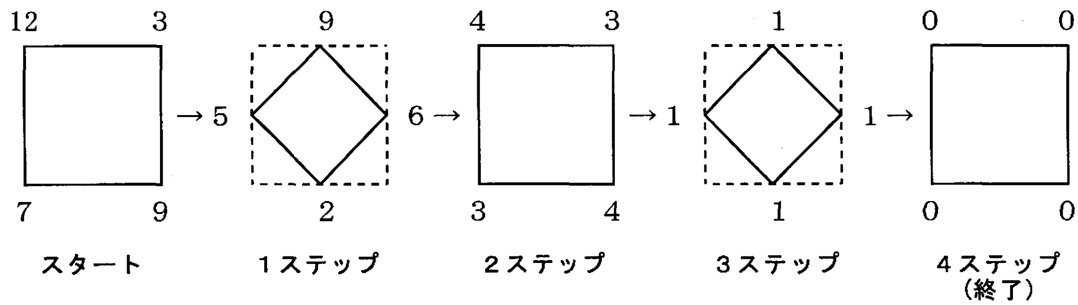
「４数ゲーム」の教材化について

伊禮　三之

1　はじめに―「４数ゲーム」との出会い

まず，表題の「４数ゲーム」(*The Four Number Game*) と呼ばれる引き算遊びのゲームを紹介しよう。このゲームは，1930年代にイタリア人 *E.Ducci* によって考え出されたもので，ルールは次の通りである。

最初に正方形の各頂点に，４個の自然数を配置する。そして，隣り合う頂点の数の差（差の絶対値）を各辺の中点に書き，それらを結んで小さい正方形をつくる。これが１つのステップで，これを繰り返してすべての数が０になるところまでこの操作を続ける。



上の例は，４ステップになる。できるだけ長いステップとなるように４数を配置せよ，というのがこのゲームの目標である。

私がこのゲームを知ったのは，木村良夫先生（兵庫県立大学）の個人通信「*Mathematical Activities　Network*」(1991年９月26日No.９）によってであった。当初，木村先生の記事では

「引き算遊びの数学」となっていて，「４数ゲーム」という名称は使用されていなかった。この年，先生自身に沖縄に来ていただき，琉球大学教育学部での授業や高校教師対象の数学自主編成講座などで，このゲームを取り上げていただいた。この間，私自身も授業の合間にこのゲームを何回か取り上げることはあったが，そのゲームに潜む数理的な事象にまで踏み込んで考えることはなかった。

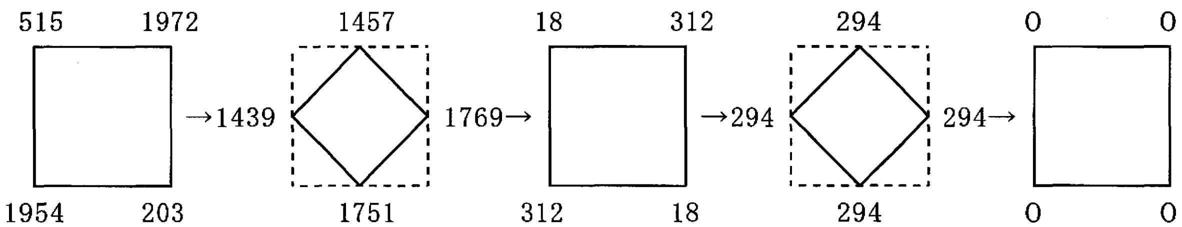
再びこのゲームに出会ったのが，沖縄県教育委員会の『数学科指導事例集—数学に興味関心を持たせる教材』(2000年）の編集作業のときであった。小嶺雅春先生（沖縄県立豊見城南高校，当時）による「４数ゲームとトリボナッチ数列」の報告がそれである。トリボナッチ数列はフィボナッチ数列を拡張したもので，その数列の連続する任意の４数が４数ゲームの長いステップを実現する１例となっているのである。意外な（よく考えてみるとそうでもないのだが，当時はそう思ったのものである）ところでの再会に，いつか本格的に授業で取り上げてみたいと思ったものである。

先般，『数学文化第２号』(日本評論社，2004年）を手にしたら木村先生の「引き算遊びの数理」の記事が目に飛び込んできた。「４数ゲーム」に関するその後ことも書かれていて，これを機に，「４数ゲーム」の教材化に本格的に着手したので，以下に報告したい。

2　「４数ゲーム」の教材化に向けての検討

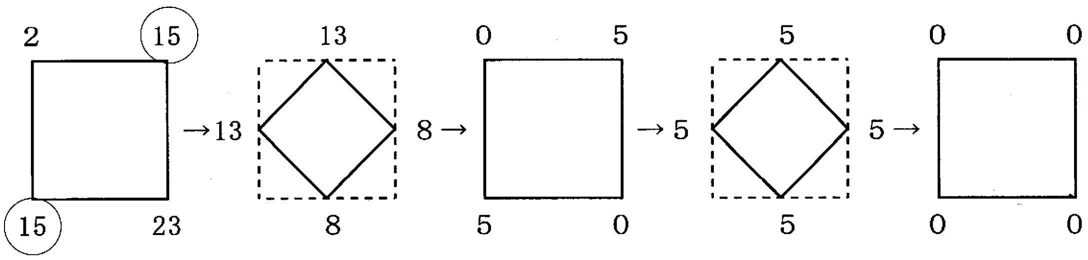
なじみのない非定型的な問題に出会ったとき，その問題を解いていくためにはさまざまな戦略（ストラテジー）を駆使する。まず，私自身が「４数ゲーム」をどのように解いていったのか (もちろん木村先生の論文の助けを借りて) そのプロセスをスケッチしておく。

まず問題理解のための試行がスタートである。いくつかやってみると，かなり大きな数を使ってもすぐにすべて０になってしまうことに気づく。



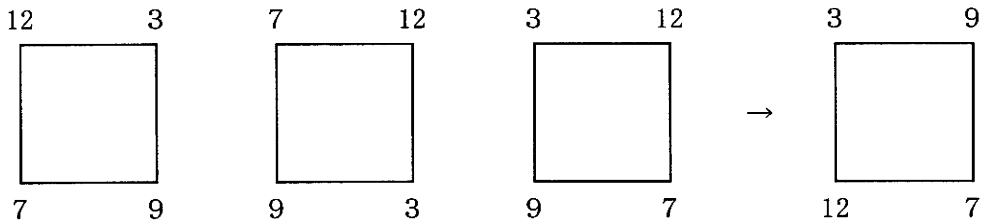
すると，このゲームは数の大きさが直接的な要因ではないことが推察される。

次に考えたのが，４数に同じ数値が含まれている場合はどうなるだろうかということである。４数中３数が同じ場合，４数中２組が同じ場合，４数中２数が同じでその３数の大小関係で場合分けをして調べると，すべて６ステップ以内で終了することがわかる。



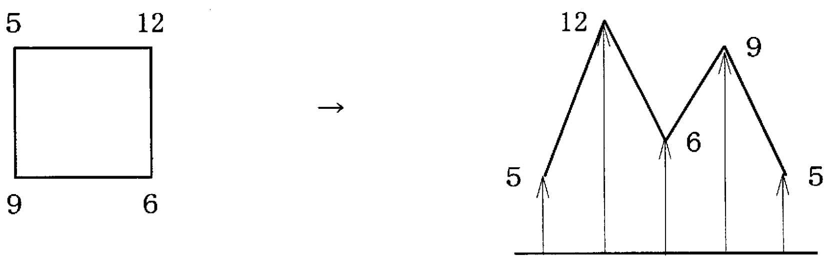
この検討から，できるだけ長いステップを実現するためには，異なる４数を配置すればよいことになる。

さて，次の４数の配置は，回転，反転（裏返し）を考えれば本質的にすべて同じとなる。

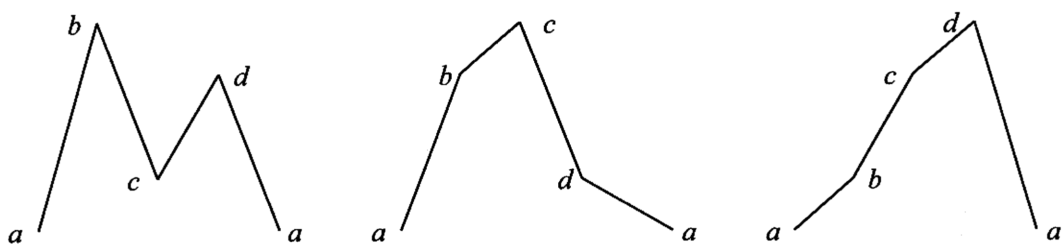


回転　　　　反転

すると，異なる４数の配置の方法は，数珠順列の総数と同じになり，３！÷２＝３通りとなって，３パターンの検討にしぼり込める（以後，上右図のように最小の数を左上に配置して考える)。このパターンを木村先生は次のように図式化している。



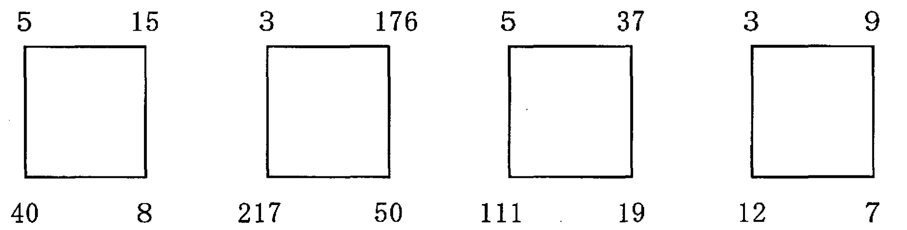
この図式化を用いると，３パターンは次のように表せる。



２こぶ型　　　　山型　　　　単調型

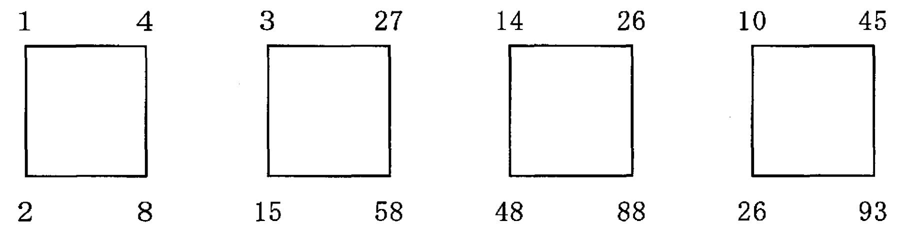
この分類が「４数ゲーム」を解決する重要な契機となる。これらの型を検討してみよう。

まず，２こぶ型は，大きな２数（または小さな２数）が対角線上に向かい合うタイプである。



これらは，やってみるとわかるが，４ステップ以内ですぐに終了してしまう。

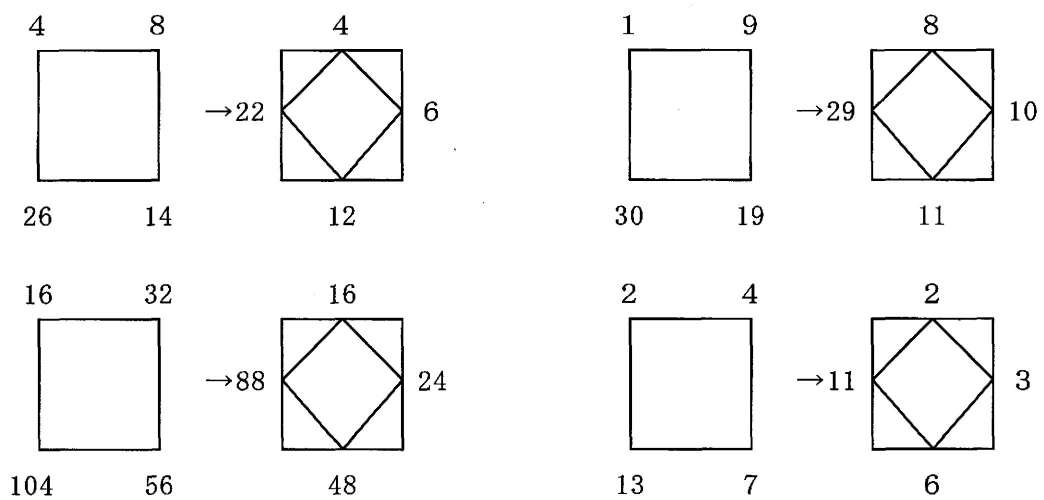
今度は次のような山型だが，これも高々６ステップで終了してしまうことはすぐに確認できる。２こぶ型も山型も文字を使用すれば証明も比較的簡単である。



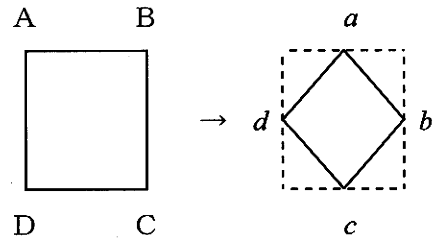
以上までの検討で，長いステップを実現する可能性のあるタイプは，単調型に限られることがわかった。

続いて，単調型をスタートとする３つのパターンの組み合わせ，「単調型→２こぶ型」，「単調型→山型」（実はこのタイプは実現しない），「単調型→単調型」の検討であるが，これまでの議論から長いステップの実現可能性は，「単調型→単調型」のみにしぼられる。

単調型の最初のステップを実行して，その４数を観察してみる。



すると，「最大数＝残り３数の和」にすぐに気づく。これを一般的に示しておこう。.



A＜B＜C＜D
（単調型の条件）

最初の操作から，

a＝B－A，b＝C－B，c＝D－C

が成り立つので，これらを加えると，

a＋b＋c＝D－A

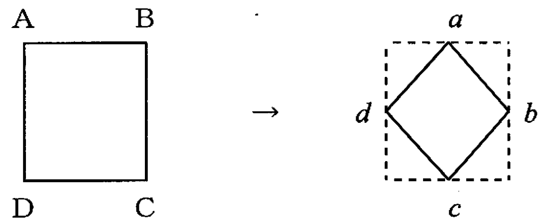
となる。一方，d＝D－A（これが最大数）

∴　a＋b＋c＝d

４数ゲームが，「単調型→単調型→…」と繋がっていくためには，$a + b + c = d$とともに単調型の条件$a < b < c < d$が必要となる。したがって，スタートの４数A，B，C，Dも単調型の条件A＜B＜C＜Dとともに，A＋B＋C＝Dの条件が必要となる。

A＜B＜C＜D

A＋B＋C＝D



$a < b < c < d$

$a + b + c = d$

最後に，４数ゲームが，「単調型→単調型」，つまり，$a < b < c < d$で，$a + b + c = d$となるように，A＜B＜C＜DとA＋B＋C＝Dを満たすものが，どのようなものになるかを代数的に調べていけば，４数ゲームの問題は解決となる。

最初の操作の，a＝B－A，b＝C－Bより

$$B = A + a, \quad C = B + b = A + a + b$$

となる。したがって，

$$A + B + C = A + (A + a) + (A + a + b) = 3A + 2a + b$$

となる。一方，d＝D－Aより

$$D = A + d$$

ところが，A＋B＋C＝D，$a + b + c = d$なので

$$3A + 2a + b = A + d = A + a + b + c$$

よって，

$$A = \frac{1}{2}(c - a)$$

が得られる。残りは，B＝A＋a，C＝B＋b，D＝A＋B＋Cで計算するとよい。

この式を利用すれば，４数ゲームの差をとる操作が次々と遡れることがわかる。つまり，いくらでも長いステップの４数ゲームを作ることが可能だということになる（無限回のステップを作れるということではない）。もし，遡ったときの途上で分数がでた場合は，４

数ともすべて２倍して整数にすればよい。

なお，理論的にはいくらでも長いステップの配置を作り出すことが可能だが，計算が少々めんどうである。

3　「４数ゲームに挑戦！」の授業の概要

これまでの検討から，高校生を想定した「４数ゲームに挑戦！」というテーマの授業のプリントを作成した。「数学教育の流れ」の講義内容を１部変更して，「４数ゲーム」を取り上げ，実験的に授業を行ってみることにした。以下に，その概要を紹介する。

まず，４数ゲームのルールと目標を説明し，ゲーム用紙を利用して，４数ゲームにチャレンジしてもらった。しばらく取り組んでもらったあとで，質問１である。

> 質問１　４数ゲームの結果，何か気づいたことがあれば書いて下さい。

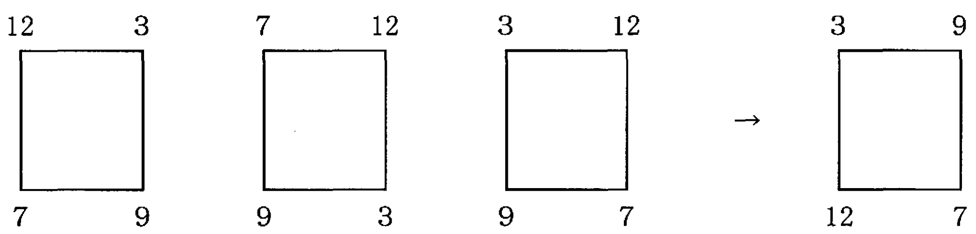
大きな数から始めると長く続きそうだが，「かなり大きな数を配置してもすぐにすべて０になってしまう」ことにはすぐに気づく。他に，「４ステップ，６ステップが多い」「同じ数値があるとすぐに終了する」などがあがる。７ステップが最高で２人ほど名乗り出た。

こうしたゲームの素朴な観察から，次の質問へと移る。この教材の大きな問いである。（この問いへの数学的な証明は直接は行わないが，間接的に示す）

> 質問２　質問１の気づいたことから類推して，４数ゲームは，
> 　予想　ア　すぐに終了してしまう（10ステップ以内）
> 　　　　イ　有限回のステップだが，いくらでも長くすることができる。
> 　　　　ウ　中には，有限回で終了しないものもある。

素朴な観察から，アが多数である。

これから４数ゲームの分析へと進むが，そのための準備をいくつか行うことにする。まず，４数ゲームのスタートの記述のしかたである。次のスタートの状態は，回転，反転（裏返し）を考えれば本質的にすべて同じとなる。



回転　　　　　　反転

そこで，これからは，４数のうち最小の数を左上に配置することにする（上右図)。この確認のもとに，各自の４数ゲームの結果をステップ数によつて分類してもらう。

> 質問３　４数ゲームの結果を，終了したステップ数の段階で分類して下さい。またまた，何か気づいたことがあれば書いて下さい。
> ①　４ステップ以下
> ②　５～６ステップ
> ②　７～９ステップ
> ④　10ステップ以上（あれば）

学生たちとの応答で，①～④の具体例を整理する。④は，出なかった。

①　４ステップ以下

5	15	3	176	5	37	3	9
40	8	217	50	111	19	12	7

②　５～６ステップ

1	2	3	27	14	26	10	45
7	4	15	58	48	88	26	93

③　７～９ステップ

4	8	16	32	1	10	2	4
26	14	104	56	30	19	13	7

本格的な検討の前に，４数の中に同じ数値がある場合―４数のうち３数が同じ数値の場合や４数のうち２組が同じ数値の場合など―は，高々６ステップで終了することを具体例を通して確認しておく。

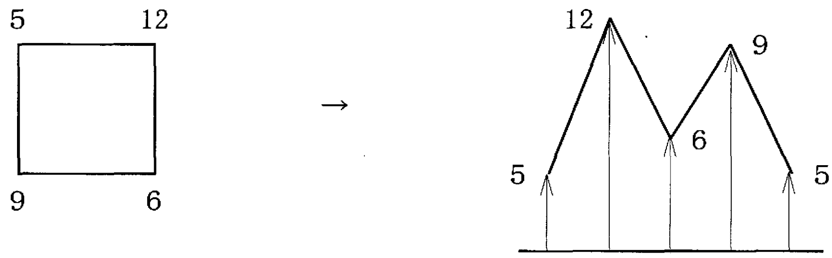
すると，できるだけ長いステップを実現するためには，４数とも異なる数値で，ステップの進行後も，できるだけ異なる数値が現れるようなものを選択する，という方針が導き

出される。

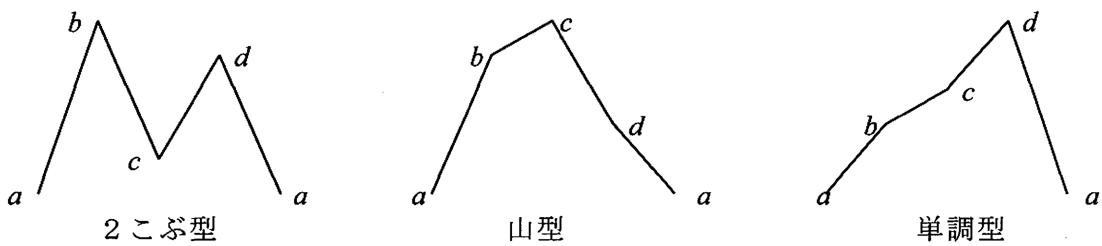
では，異なる4数の場合の検討に取りかかることにする。

> <u>質問4</u>　4数ゲームにおいて，異なる4数の配置の方法は，4数の大小によって，回転や反転に配慮すると，いくつかのタイプに分けることができます。
> いくつのタイプに分類されると思いますか。
> 予想　ア　3つ
> 　　　イ　5つ
> 　　　ウ　7つ
> 　　　エ　その他（　　　　　）

4数ゲームがいくつのタイプに分類されるのか調べるために，下右図のように現すと分類しやすいことを説明する。

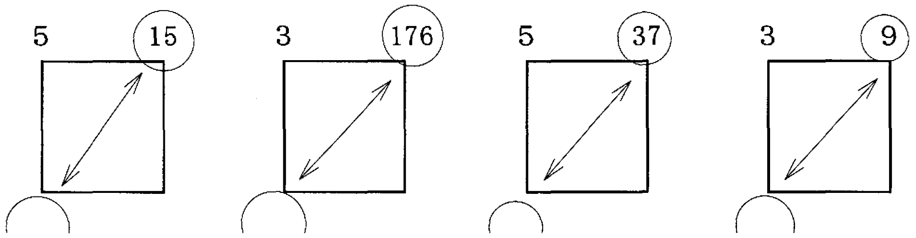


この図式化を用いると3パターンは，4数を a，b，c，d（a を最小とする）として次のようになる。これらの型をそれぞれ次のように命名しておく（山型は学生から出た）。



次の課題は，これらのタイプがそれぞれ何ステップで終了するのかを調べることである。

まず，質問2で分類した4ステップ以下のものを調べてみる。これらの特徴は，大きい2数（あるいは小さい2数）が向かい合うタイプで，2こぶ型に相当することは，学生たちもすぐに気づいた。

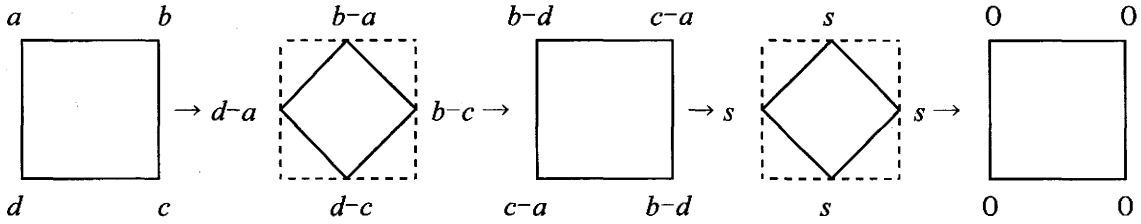


40 8 217 50 111 19 12 7

すると，次の性質が成り立つことが予想される。

性質１　２こぶ型は，高々４ステップで終了する。

この性質の一般的な証明に取りかかる。$a < c < d < b$ として，４数ゲームを実行すると，途中の｜$b-d-c+a$｜を s と置くことによって，



予想通り４ステップで終了した。

続いて，６ステップまでに終了するタイプの検討である。例外はあるが，ほとんど山型となっている。山型についても，次のような性質が成り立つ（証明も上と同様）。

性質２　山型は，高々６ステップで終了する。

これまでの議論からわかったことは，２こぶ型は高々４ステップ，山型が高々６ステップで終了したので，性質１・２は次のようにまとめることができる。

性質３　単調型以外は，せいぜい６ステップで終了する。

長いステップを実現する可能性のあるタイプは，単調型に限られることがわかった。

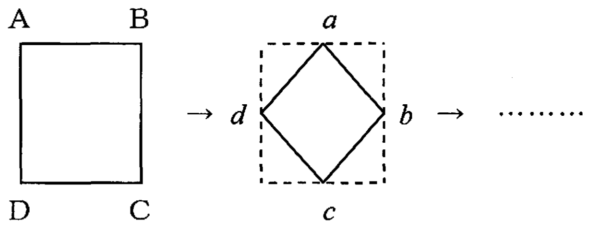
今度は，単調型をスタートとして，次のステップがどのタイプになれば，長いステップの可能性があるかという問いである。

質問５　４数ゲームを単調型から出発したとき，次のステップが，どのタイプになったほうが長いステップを実現できる可能性があるでしょうか。 予想　ア　「単調型→２こぶ型」のほうが長いステップを実現できる。 イ　「単調型→山型」のほうが長いステップを実現できる。 ウ　「単調型→単調型」のほうが長いステップを実現できる。

ほぼ全員がウ「単調型→単調型」を選択する。なぜなら，「単調型→２こぶ型」は性質１から５ステップで終了することがわかるし，「単調型→山型」は，性質２から７ステッ

プで終了する（このタイプは実現しないが)。

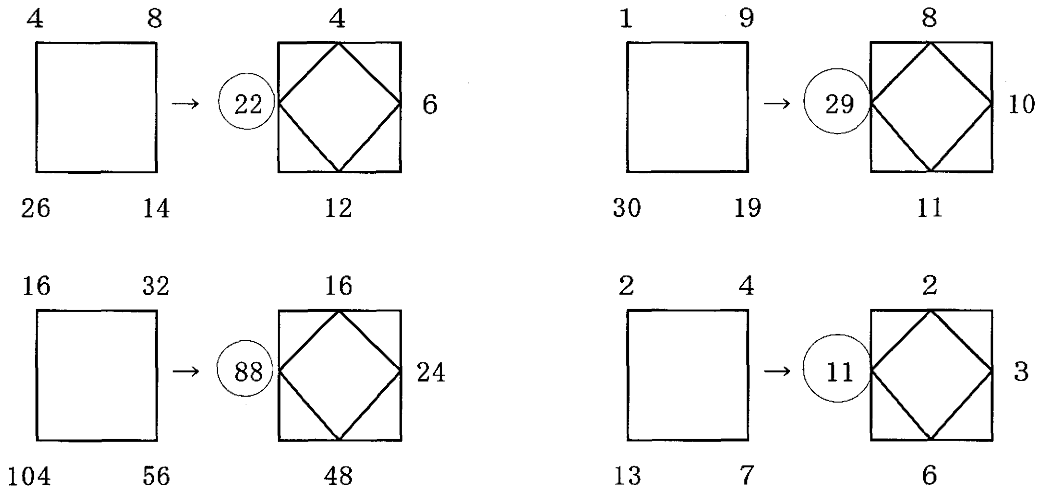
これまでの議論から，長いステップ数を実現するには，単調型→単調型→単調型→…と次々と単調型が繋がっていけばよいことがわかる。次の課題は，「単調型→単調型」の条件から４数間に成り立つ関係の定式化・法則化である。



単調型　　単調型　　単調型

単調型の条件A＜B＜C＜Dをもった４数ゲームを開始し，次のステップもまた単調型になったとすると，同じ単調型の条件 $a < b < c < d$ をもつことになる。この２つの条件から，a，b，c，d の関係式を探り出してみよう。

まず，単調型の最初のステップを実行して，その４数を観察してみる。



これらの観察から，「最大数（○印）＝残り３数の和」にすぐに気づく。この後に，先述した一般的な証明を与え，「$a + b + c = d$」と定式化した。このことから，４数ゲームが，「単調型→単調型→…」と繋がっていくためには，$a + b + c = d$ とともに単調型の条件 $a < b < c < d$ が必要となる。したがって，スタートの４数A，B，C，Dも単調型の条件A＜B＜C＜Dとともに，A＋B＋C＝Dの条件が必要となることがわかる。

最後に，４数ゲームが，「単調型→単調型」，つまり，$a < b < c < d$ で，$a + b + c = d$ となるように，A＜B＜C＜DとA＋B＋C＝Dを満たすものが，どのようなものになるかを調べてみると，次のようになる（詳細は２節を参照)。

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}(c - a)$$，（残りは，B＝A＋a，C＝B＋b，D＝A＋B＋Cで計算）

これで４数ゲームの問題は解決となる。

この式は，４数ゲームの差をとる操作が次々と遡れることを示す。つまり，いくらでも長いステップの４数ゲームを作ることが可能だということである。もし，その途中に分数がでた場合は，４数ともすべて２倍して整数にすればよい。

実際に10ステップの例を作ってみよう。まず，$a+b+c=d$ を満たす４数を選ぶ。

$(a, b, c, d)=(1, 3, 5, 9)$ とするとステップ数は７。よって，３ステップ遡ればよい。

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}(c-a),\quad \mathrm{B}=\mathrm{A}+a,\quad \mathrm{C}=\mathrm{B}+b,\quad \mathrm{D}=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$$

を次々利用すると，

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})=(2, 3, 6, 11)\rightarrow(2, 4, 7, 13)\rightarrow\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{17}{2}, \frac{31}{2}\right)$$

最後は，すべて２倍して，$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})=(5, 9, 17, 31)$ を得る。これをスタートに４数ゲームを実行してみると，

```
5  9  17  31  (5)
 4  8  14  26  (4)  ←ステップ1
  4  6  12  22  (4)  ←ステップ2
   2  6  10  18  (2)  ←ステップ3
    4  4  8  16  (4)  ←ステップ4
     0  4  8  12  (0)  ←ステップ5
      4  4  4  12  (4)  ←ステップ6
       0  0  8  8  (0)  ←ステップ7
        0  8  0  8  (0)  ←ステップ8
         8  8  8  8  (8)  ←ステップ9
          0  0  0  0  (0)  ←ステップ10
```

確かに10ステップの４数ゲームの配置を作り出せた。

４数ゲームは，いくらでも長いステップを作りだすことがわかったが，この方法で，遡って計算し続けるのは少々めんどうである。そこで，いくらでも長いステップを作りだす不思議な数列を紹介した。

「トリボナッチ数列」は，初項～第３項を１，１，２として第４項以降，前の３項を次々たしてできる数列であり，次のようになる。

１，１，２，４，７，13，24，44，81，149，274，…

この数列は，任意の連続する４数は，４数ゲームの $a<b<c<d$，$a+b+c=d$ と同じ構造をもっているのである。したがって，このトリボナッチ数列の４数を利用すると，いくらでも長いステップを作りだすことが可能である。

さらに，トリボナッチ数列の連続する４数 $(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3})$ で，４数ゲームを始

めたときのステップ数を s_n とすると，次の表のようになり，

４数の最初の数 t_n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
ステップ数 s_n	6	6	9	9	12	12	15	15

この表から，次の性質（法則）が見えてくる。

t_{2n-1} からスタートする４数では，$3n+3$ステップで４数ゲームは終了する。

t_{2n} からスタートする４数では，$3n+3$ステップで４数ゲームは終了する。

４数ゲームには，まだまだいろいろな性質があり，なかなか奥の深いゲームである。

4　まとめ

「４数ゲーム」を解いていく際に，さまざまな戦略（ストラテジー）を駆使した。観察（問題理解と素朴な発想・気づき），特殊化，絵・図の利用，パターンの発見，問題の細分（場合分け，スモールステップ化），論理的思考などなど…。「４数ゲーム」のカリキュラムを構想する際，私自身がそれをどのように解いていったのかその大枠のプロセスを学習者たちが辿れるようにと考えた。それがこの教材に実現できているかは心許ないが…。

「４数ゲーム」の場合，これまでの数学の知識はほとんど役に立たない。しかし，数学の学習には命題化された定理・公式などの知識以外にも，数学固有の方法といったものが存在する。それがストラテジーに結びついていき，探求的な活動をも呼び起こすものと考えられる。実際，私自身，ストラテジーを駆使する背後では，問題解決のプロセスをどう進めるかを計画し，どこまで進んだかについて把握し，次にどうすべきかを決定する，という自己調整をたえず働かせていた。論理的な手続きを一つずつ確実に詰めていき，やっと結論にたどり着くことができたときの充実感は，まさに探求活動そのものだったといってよい。そういった意味では，「４数ゲーム」は最適な探求的教材と考えている。

学生たちの感想にも，「「４数ゲーム」は，はじめ，４ステップ程度しかできなかったけれど，何ステップでもいけるということが分かり興味深かった。（略）。法則を見つけ出すことが，これだけ楽しいことだとは！と思った」，「なかなか興味深いものだった。一見すればなんの法則もないような数並びだったが，実はこのような法則があるなんて思ってもみなかった」，「単純なものを理論で解いていくのがおもしろかったです。一見，続きそうにない４数ゲームには実は解法があり，どこまでも続ける事が可能だということを知り，数学のすごさを感じました」「操作は単純なゲームなのに，考えると奥が深いなぁと思った。手でやっていたら，全然長いステップができないので，限界があるんじゃないかと思っていたけど，いくらでも長いステップが作ることができるとわかって，びっく

りした」など，ゲームを数学的に解読していく探求の面白さや楽しさについての実感が記されていた。

さらに，「自分だったら，ただ単に数字を当てはめてそこから得られたデータから法則化するけど，さすがに「２こぶ型」「山型」「単調型」のように図で表すような発想はなかったと思う」，「一見，必勝法がわかりにくいこのゲームを，パターンを一つ一つ出して，それぞれを分析すれば正解が見えてくるということが理解できた」，「型によってステップ数が異なることがわかってよかったなと思う。「単調型→単調型」になるときの条件もみつけることができるのには驚きました。やっぱり，こういう数字に関するものは関係式で表すことも可能なんだと思いました」など，絵・図の利用やパターンの発見，問題の細分化，論理的な手続きによる関係式の導出などについてふれ，学生自身も「４数ゲーム」という対象世界に，戦略的に働きかけていたとことが伺える。

学生を対象とした不十分な資料をもとにした報告で課題も多いが，以下のことを述べて本稿のまとめとしたい。

「４数ゲーム」は，学習者にとって，これまで積み上げてきた数学的な知識がほとんど必要なく，したがって，試行の素朴な観察から生まれてくる発想を，個人であるいは相互に検討しあう中から，問題解決へ至る道筋を探っていくことのできる探求的なプロセスを内在した教材だといえるのではないか。

参考文献

１）木村良夫「引き算遊びの数理」『数学文化第２号』日本数学協会編集，日本評論社，2004年

２）木村良夫『数学パズルで遊ぼう』日本評論社，1997年

３）小嶺雅春「四数ゲーム」「四数ゲームとトリボナッチ数列」『数学科指導事例集—数学に興味関心を持たせる教材』数学科指導事例集編集員会，沖縄県教育委員会，2000年