セント・ペテルブルグ問題に対する極限定理

セント・ペテルブルグ問題に対する極限定理

杉　谷　貞　男

（2009年 8 月10日受付）

1. 問題と結果

完備な確率空間 (Ω, F, P) 上で定義された独立同分布な確率変数列 $\{X(n)\}_{n \geqq 1}$ を考える. ここで共通な分布は, $0 < p < 1, q = 1 - p$ を用いて, 以下の式で与えられるものとする.

(1) $$P(X(1) = \frac{1}{q^{n-1}}) = pq^{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

これは以下のように解釈できる. 表の出る確率が p で裏の出る確率が q のコインを投げていき, k 回目に始めて表が出れば $\frac{1}{q^{k-1}}$ を参加者が得る（胴元が払う）賭けを繰り返し行う. この時, n 回目の参加者の利益（胴元の損失）が $X(n)$ である. $p = q = \frac{1}{2}$ の場合がセント・ペテルブルグの問題である.
普通, 公平な賭けは, 参加費が収益の期待値に一致する場合と考えられている. 今の場合には, 収益の期待値が無限大になるにもかかわらず, 「いくら払ってでもこの賭けに参加したい」と考える人はまれであろう. リスクを恐れて, 胴元を引き受ける人もまれであろう. そのために, セント・ペテルブルグのパラドックスといわれることもある.
この疑問を解決するために, 「効用」が考えられたが, このペーパーの目的は, 利益の和

(2) $$S(n) = \sum_{k=1}^{n} X(k) \quad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

それ自体の挙動についての次の結果を証明することであろ.

定理 以下の評価が成り立つ.

(3) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n \log n} = \infty \quad a.s.P$$

(4) $$\liminf_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = p \quad a.s.P$$

更に, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

(5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n(\log n)^{1+\epsilon}} = 0 \quad a.s.P$$

が成り立つ.

注 (4) より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n(\log n)^{1-\epsilon}} = \infty \quad a.s.P \tag{6}$$

が成り立つことがわかる.
すると, 参加者は賭け金を (6) の分母のオーダーで定めたいと思うだろうし, 胴元は客の賭け金を (5) の分母のオーダーで定めたいと考えるであろう. $\epsilon = 0$ としても, (3),(4) より, n が増加すると $S(n)$ は不安定な挙動をすることがわかる. また, 効用を用いて 1 回の賭け金 a を定めても, (4) よりいつかは客の平均収益 $\frac{S(n)}{n}$ が a を追い越してしまう.
多くの確率過程では, $S(n)$ は大数の法則により n の増加に伴って安定し, リスクは中心極限定理によって評価される. デリバティブ取引は, この考えに基づいて発展し, 参加者も増えてきた. それにもかかわらず, 安定するどころか, サブプライムローンの破綻をきっかけにして, 世界不況の瀬戸際まで行ってしまった. このことは, リスクコントロールの不可能な状況がいつかは起こると言っているようである. 我々の定理の証明を振り返ると, (17) より $S(n)$ は (4) の状態で多くの時間を過ごすが, (8) より $X(n)$ による巨大なジャンプが不意に起こり, 忘れたころに (3) の状態に移るようである.

2. (3) の証明

最初に, 次の補題を準備する.
補題 2.1 全ての 1 以上の実数 r に対して

$$\frac{q}{r} \leqq P(X(1) > r) \leqq \frac{1}{qr} \tag{7}$$

が成り立つ.

証明 まず

$$\begin{aligned} P(X(1) > r) &= \sum_{j:\frac{1}{q^{j-1}} > r} pq^{j-1} \\ &= \sum_{j:j>\log_{\frac{1}{q}} r+1} pq^{j-1} \end{aligned}$$

と書き換える. 実数 x に対し x 以下の整数の最大値を $[x]$ で表すと,

$$\begin{aligned} P(X(1) > r) &\leqq \sum_{j=[\log_{\frac{1}{q}} r]+1}^{\infty} pq^{j-1} \\ &= q^{[\log_{\frac{1}{q}} r]} \\ &\leqq q^{\log_{\frac{1}{q}} r-1} \\ &= \frac{1}{qr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X(1) > r) &\geqq \sum_{j=[\log_{\frac{1}{q}} r]+2}^{\infty} pq^{j-1} \\
&= q^{[\log_{\frac{1}{q}} r]+1} \\
&\geqq q^{\log_{\frac{1}{q}} r+1} \\
&= \frac{q}{r}
\end{aligned}$$

となり, 補題が証明された.

この補題より, 任意の $c > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \{X(k) \leqq ck \log k\}) &= \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k=n}^{\infty}\{X(k) \leqq ck\log k\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} P(X(k) \leqq ck \log k) \\
&\leqq \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \frac{q}{ck\log k}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

がいえる. だから補集合の確率は

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \{X(k) > ck \log k\}) = 1$$

となる. これが任意の $c > 0$ に対して成り立つから

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X(n)}{n\log n} = \infty \quad a.s.P \tag{8}$$

が成り立つ. $S(n) \geqq X(n)$ に注意すれば (3) は明らかである.

3. (4) の証明

最初に次の不等式を示す.

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n\log_{\frac{1}{q}} n} \geqq p \quad a.s.P \tag{9}$$

そのために, 次の補題を用意する.

補題 3.1 全ての $n \geqq 1$ と $\lambda \geqq 0$ に対して, 次の上からの評価が成り立つ.

$$E[\exp(-\frac{\lambda}{n}X(1))] \leqq 1 + \frac{1}{2n}\lambda^2 - \frac{1}{n}p\lambda(1 + [\log_{\frac{1}{q}} n]) \tag{10}$$

$0 < \alpha < 1$ とする. 全ての $n \geqq 1$ と $\lambda \geqq 0$ に対して, 次の下からの評価が成り立つ.

$$E[\exp(-\frac{\lambda}{n}X(1))] \geqq 1 - \frac{1}{n}p\lambda(1 + [\log_{\frac{1}{q}} n]) - \frac{1}{n}\frac{p\lambda^{\alpha}}{1 - q^{1-\alpha}} \tag{11}$$

証明　先ず $\frac{1}{n}X(1)$ のラプラス変換を以下のように表す.

$$\begin{aligned}
E[\exp(-\frac{\lambda}{n}X(1))] &= \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}\exp(-\frac{\lambda}{n}q^{1-k}) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}(\exp(-\frac{\lambda}{n}q^{1-k})-1) \\
&= 1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1-\log_{\frac{1}{q}} n}(\exp(-\lambda q^{1-k+\log_{\frac{1}{q}} n})-1) \\
&= 1+\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{1+[\log_{\frac{1}{q}} n]} pq^{k-1-\log_{\frac{1}{q}} n}(\exp(-\lambda q^{1-k+\log_{\frac{1}{q}} n})-1+\lambda q^{1-k+\log_{\frac{1}{q}} n}) \\
\mathrm{II} &= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{1+[\log_{\frac{1}{q}} n]} pq^{k-1-\log_{\frac{1}{q}} n}\cdot\lambda q^{1-k+\log_{\frac{1}{q}} n} \\
&= -\frac{1}{n}p\lambda(1+[\log_{\frac{1}{q}} n]) \\
\mathrm{III} &= \frac{1}{n}\sum_{k=2+[\log_{\frac{1}{q}} n]}^{\infty} pq^{k-1-\log_{\frac{1}{q}} n}(\exp(-\lambda q^{1-k+\log_{\frac{1}{q}} n})-1)
\end{aligned}$$

とおいた. IIは既に (10) と (11) で用いられているから, I とIIIの評価をすればよい.
ところで, $x \geqq 0$ において $\exp(-x)-1+x \leqq \frac{x^2}{2}$ が成り立つから

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{1+[\log_{\frac{1}{q}} n]} \frac{p\lambda^2}{2}q^{-k+1+\log_{\frac{1}{q}} n} \\
&\leqq \frac{1}{2n}\lambda^2 q^{\log_{\frac{1}{q}} n-[\log_{\frac{1}{q}} n]} \\
&\leqq \frac{1}{2n}\lambda^2
\end{aligned}$$

を得る. また $\mathrm{III} \leqq 0$ は明らかである. 以上をまとめて (10) を得る.
次に (11) を示す. $x \geqq 0$ で $\exp(-x)-1+x \geqq 0$ が成り立つから I $\geqq 0$ を得る. また, $x \geqq 0$ で $\exp(-x)-1 \geqq -x^{\alpha}$ が成り立つから

$$\mathrm{III} \geqq -\frac{1}{n}\sum_{k=2+[\log_{\frac{1}{q}} n]}^{\infty} p\lambda^{\alpha}q^{(1-\alpha)(k-1-\log_{\frac{1}{q}} n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n}p\lambda^{\alpha}\frac{q^{(1-\alpha)(1+[\log_{\frac{1}{q}} n]-\log_{\frac{1}{q}} n)}}{1-q^{1-\alpha}} \\
&\geqq -\frac{1}{n}\frac{p\lambda^{\alpha}}{1-q^{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

以上をまとめて (11) を得. 補題が証明された.

この補題を用いて (9) を証明する. 先ず

$$
E[\exp(-\frac{\lambda}{n}S(n))] = E[\exp(-\frac{\lambda}{n}X(1))]^n \tag{12}
$$

だから, (10) を用いて次の評価を得る.

$$
E[\exp(-\frac{\lambda}{n}S(n))] \leqq \exp(\frac{1}{2}\lambda^2 - p\lambda(1+[\log_{\frac{1}{q}} n])). \tag{13}
$$

ここで $1+[\log_{\frac{1}{q}} n] \geqq \log_{\frac{1}{q}} n$ に注意すれば

$$
E[\exp(-\frac{\lambda}{n}S(n))] \leqq \exp(\frac{1}{2}\lambda^2 - p\lambda\log_{\frac{1}{q}} n). \tag{14}
$$

が従う. そこで

$$
p(n) = P(\frac{S(n)}{n} \leqq p\log_{\frac{1}{q}} n - 2\sqrt{\log n})
$$

とおけば, (14) より

$$
\begin{aligned}
p(n) &= P(\exp(-\lambda\frac{S(n)}{n}) \geqq \exp(-p\lambda\log_{\frac{1}{q}} n + 2\lambda\sqrt{\log n})) \\
&\leqq \exp(p\lambda\log_{\frac{1}{q}} n - 2\lambda\sqrt{\log n})E[\exp(-\lambda\frac{S(n)}{n})] \\
&\leqq \exp(\frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda\sqrt{\log n})
\end{aligned}
$$

を得る. ここで $\lambda = 2\sqrt{\log n}$ とおいて

$$
P(\frac{S(n)}{n} \leqq p\log_{\frac{1}{q}} n - 2\sqrt{\log n}) \leqq \frac{1}{n^2} \tag{15}
$$

が従う. よって

$$
p(\infty) = P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \{\frac{S(k)}{k} \leqq p\log_{\frac{1}{q}} k - 2\sqrt{\log k}\})
$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
p(\infty) &= \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k=n}^{\infty}\{\frac{S(k)}{k} \leqq p\log_{\frac{1}{q}} k - 2\sqrt{\log k}\}) \\
&\leqq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(\frac{S(k)}{k} \leqq p\log_{\frac{1}{q}} k - 2\sqrt{\log k}) \\
&\leqq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を得る. その補集合の確率は

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \{\frac{S(k)}{k} > p \log_{\frac{1}{q}} k - 2\sqrt{\log k}\}) = 1$$

となる. これから (9) が従うことを見るのはやさしい.

次に逆向きの不等式

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n \log_{\frac{1}{q}} n} \leqq p \quad a.s.P \tag{16}$$

を示す, 補題 3.1 で λ を $\frac{\lambda}{\log_{\frac{1}{q}} n}$ で置き換えると, (12) より

$$\lim_{n\to\infty} E[\exp(-\frac{\lambda S(n)}{n \log_{\frac{1}{q}} n})] = \exp(-p\lambda) \tag{17}$$

が全ての $\lambda \geqq 0$ に対して成り立つことがわかる. Kolmogorov の 0-1 法則により, 定数 $a(0 \leqq a \leqq \infty)$ が存在して

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = a \quad a.s.P \tag{18}$$

が成り立つ. すると, (17),(18) と Fatou の補題より

$$\begin{aligned}
\exp(-a\lambda) &= E[\exp(-\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda S(n)}{n \log_{\frac{1}{q}} n})] \\
&= E[\limsup_{n\to\infty} \exp(-\frac{\lambda S(n)}{n \log_{\frac{1}{q}} n})] \\
&\geqq \limsup_{n\to\infty} E[\exp(-\frac{\lambda S(n)}{n \log_{\frac{1}{q}} n})] \\
&= \exp(-p\lambda)
\end{aligned}$$

となり, (16) が従う. よって, (9) と (16) より (4) が示された.

4. (5) の証明

最初に (11) を用いて $\frac{S(n)}{n}$ のラプラス変換の下からの評価を与える. 先ず, 簡単な計算により

$$0 \leqq y \leqq \frac{1}{2} \text{において } 1 - y \geqq \exp(-y - y^2)$$

が成り立つことがわかる. ここで, $y = \frac{x}{n}$ とおいて両辺を n 乗すると

$$0 \leqq x \leqq \frac{n}{2} \text{において } (1 - \frac{x}{n})^n \geqq \exp(-x - \frac{1}{n}x^2) \tag{19}$$

が成り立つことがいえる. そこで

$$f(n, \lambda) = p\lambda(1 + [\log_{\frac{1}{q}} n]) + \frac{p\lambda^{\alpha}}{1 - q^{1-\alpha}} \tag{20}$$

とおく. すると (11),(12),(19) より λ が

$$f(n,\lambda) \leqq \frac{n}{2} \tag{21}$$

を満たせば

$$E[\exp(-\frac{\lambda}{n}S(n))] \geqq \exp(-f(n,\lambda) - \frac{1}{n}f(n,\lambda)^2) \tag{22}$$

が成り立つことがわかる. ところで, λ が十分小さければ (21) が全ての $n \geqq 1$ で成り立つことは容易にわかる. そこで, **以後全ての $n \geqq 1$ で (22) を満たす λ のみを考えることにする**. 次に

$$Z(n) = \frac{S(n)}{n} - p(1 + [\log_{\frac{1}{q}} n]) \tag{23}$$

のラプラス変換を評価する. (13) より

$$E[\exp(-\lambda Z(n))] \leqq \exp(\frac{1}{2}\lambda^2) \tag{24}$$

を得る. 一方 (22) より

$$E[\exp(-\lambda Z(n))] \geqq \exp(-\frac{p\lambda^\alpha}{1-q^{1-\alpha}} - \frac{1}{n}f(n,\lambda)^2) \tag{25}$$

を得る. よって, (24) より $n \geqq 2$ に無関係な定数 $c_1 > 0$ が存在して

$$E[\exp(-\frac{\lambda Z(n)}{(\log n)^{1+\epsilon}})] \leqq 1 + \frac{c_1}{(\log n)^{2+2\epsilon}} \tag{26}$$

が成り立つ. **$0 < \alpha < 1$ を $(1+\epsilon)\alpha > 1$ となるように選び, $\epsilon_1 > 0$ を $(1+\epsilon)\alpha = 1 + \epsilon_1$ で定める**. $f(n, \frac{\lambda}{(\log n)^{1+\epsilon}})$ が $n \geqq 2$ で有界であることに注意すれば (25) より, $n \geqq 2$ に無関係な定数 $c_2 > 0$ が存在して

$$E[\exp(-\frac{\lambda Z(n)}{(\log n)^{1+\epsilon}})] \geqq 1 - \frac{c_2}{(\log n)^{1+\epsilon_1}} \tag{27}$$

が成り立つ. そこで,

$$r(n) = E[(1 - \exp(-\frac{\lambda Z(n)}{(\log n)^{1+\epsilon}}))^2]$$

とおいて展開すれば

$$r(n) = 1 - 2E[\exp(-\frac{\lambda Z(n)}{(\log n)^{1+\epsilon}})] + E[\exp(-\frac{2\lambda Z(n)}{(\log n)^{1+\epsilon}})]$$

となる. この右辺第 2 項に (27) を, 右辺第 3 項に (26) を適用すれば, $n \geqq 2$ に無関係な定数 $c_3 > 0$ が存在して

$$E[(1 - \exp(-\frac{\lambda Z(n)}{(\log n)^{1+\epsilon}}))^2] \leqq \frac{c_3}{(\log n)^{1+\epsilon_1}}$$

が成り立つことがわかる. すると

$$E[\sum_{n=1}^{\infty}(1-\exp(-\frac{\lambda Z(2^n)}{(\log 2^n)^{1+\epsilon}}))^2]<\infty$$

となり,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\exp(-\frac{\lambda Z(2^n)}{(\log 2^n)^{1+\epsilon}}))^2<\infty \quad a.s.P$$

を得る. これより

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z(2^n)}{(\log 2^n)^{1+\epsilon}}=0 \quad a.s.\ P$$

が従う. そこで, (23) より

(28)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(2^n)}{2^n(\log 2^n)^{1+\epsilon}}=0 \quad a.s.\ P$$

となることがわかる. 最後に

$$\begin{aligned}\max_{2^n\leqq k\leqq 2^{n+1}}\frac{S(k)}{k(\log k)^{1+\epsilon}} &\leqq \frac{S(2^{n+1})}{2^n(\log 2^n)^{1+\epsilon}}\\ &= \frac{S(2^{n+1})}{2^{n+1}(\log 2^{n+1})^{1+\epsilon}}\cdot 2(\frac{n+1}{n})^{1+\epsilon}\end{aligned}$$

に注意すれば, (28) から (5) が従うことがわかる.

参考文献

[1] Martin Löf,Anders,A limit theorem which clarifies the "Petersburg Paradox", J.Appl.Prob,22(1982),no.3,634-643.

[2] W. フェラー著, 河田龍夫監訳, 確率論とその応用 I 下巻, 紀伊国屋書店 (1961)