

多項式によって定義された整数列の逆数の無限和について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2011-03-08 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 上道, 直哉, 櫻本, 篤司 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/3056

多項式によって定義された整数列の逆数の無限和について

上道 直哉^{(*)1} 櫻本 篤司^{(*)2}

(2010年9月30日 受付)

1 序文

この論文では、 $P(x)$ を x の整数係数多項式とすると、 $P(k)$ の逆数の無限級数、すなわち $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{P(k)}$ について考える。

$P(x)$ が一次式の場合、例えば $P(x) = x$ の時は、部分和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ と定積分 $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$ との大小関係から、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{P(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ が発散することがわかる。一般の一次関数 $P(x) = ax + b$ の場合も、同様に $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{P(k)}$ が発散することがいえるので、ここでは $P(x)$ が二次以上の場合を考える。そのうち $P(x) = x^n$ ($n \geq 2$) の場合は、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{P(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ は収束し、その和はゼータ関数として知られている。

定義 1.1. (ゼータ関数)

$\operatorname{Re}(s) > 1$ を満たす $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ゼータ関数を用いると $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ の値は $\zeta(n)$ となり、 n が偶数の場合はその値が既に得られている ([1, 系 4.12])。

定理 1.1. (偶数に対するゼータ関数の値)

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

ただし、 B_n はベルヌーイ数である。

ここで、ベルヌーイ数の定義を示す。

*¹ 福井大学教育地域科学部 (修士課程) 教科教育専攻数学教育領域

*² 福井大学教育地域科学部理数教育講座

定義 1.2. (ベルヌーイ数)

次の関係式によって定まる数 B_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) をベルヌーイ数という。

$$B_0 = 1, \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = n+1 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

(1.2) において、 $n = 1, 2$ として B_1, B_2 の値を求めると $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$ となる。従って、定理 1.1 より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{2\pi^2}{2!} B_2 = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.3)$$

である。

この論文では、 $P(x)$ として主に一次式の積となっているものを扱う。2 節では $P(x)$ が二次式の場合を考える。まず、 $P(x) = x(ax+b)$ の場合の逆数の無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(ax+b)}$ の和を $F(a, b)$ とおき、その値を求める。さらに、一般の二次式に対して、その逆数の無限和を $F(a, b)$ を用いて表す。3 節では n 次式 $P(x) = (s_1k+t_1)(s_2k+t_2)\cdots(s_nk+t_n)$ の場合を考え、その逆数の無限和を $F(a, b)$ やゼータ関数 $\zeta(s)$ 、フルヴィッツゼータ関数 $\zeta(s, z)$ を用いて表す。4 節ではその応用として多角数の逆数の無限和の値を $F(a, b)$ を利用して計算する。

最後に、この論文で用いるオイラーの定数 γ と $\pi \cot \pi z$, $\pi \tan \pi z$ の部分分数展開から得られる命題を挙げておく。

定義 1.3. (オイラーの定数)

$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ は有限な極限値を持つ。その極限値を γ で表し、オイラーの定数という。

命題 1.1.

(1) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} = \frac{1}{z} - \pi \cot \pi z$$

(2) $z \in \mathbb{C} \setminus \{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{(k - \frac{1}{2})^2 - z^2} = \pi \tan \pi z$$

2 二次式の逆数の無限和**2.1 $k(ak+b)$ の場合**

定義 2.1. $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Z}$, 但し $b \notin (-a)\mathbb{N}$ とする。このとき、

$$F(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(ak+b)}$$

と定義する。

簡単に計算できる $F(a, b)$ の値をいくつか示す。

例 2.1. $F(1, 0)$

(1.3) より

$$F(1, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

例 2.2. $F(1, 1)$

$$\begin{aligned} F(1, 1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

この他にも、次の定理により多くの $F(a, b)$ の値が得られる。

定理 2.1.

- (1) $b \in \mathbb{N}$ のとき $F(1, b) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \frac{1}{k}$
- (2) $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し $F(ma, mb) = \frac{1}{m} F(a, b)$
- (3) $F(a, 0) = \frac{1}{a} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6a}$

証明.

$$\begin{aligned} (1) \quad F(1, b) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+b)} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+b} \right) = \frac{1}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+b} \right) \\ &= \frac{1}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{b} - \frac{1}{n+1} - \cdots - \frac{1}{n-1+b} - \frac{1}{n+b} \right) \\ &= \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$(2) \quad F(ma, mb) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(mak + mb)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(ak + b)} = \frac{1}{m} F(a, b)$$

(3) (2) と例 2.1 より

$$F(a, 0) = \frac{1}{a} F(1, 0) = \frac{1}{a} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6a}$$

□

定理 2.1(2) より $F(-a, -b) = -F(a, b)$ であるから、 $F(a, b)$ の値を求めるときは a が正の場合だけを考えればよい。また、定理 2.1(3) より $b = 0$ のときの値はわかっているので、 $b \neq 0$ の場合を考える。従って、以下では $a \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ として、 $F(a, b)$ の値を求める。

次に、 F の間の関係式を示す。

定理 2.2.

$$(1) \quad F(a, -b) + F(a, b) = \frac{a}{b^2} - \frac{\pi}{b} \cot \frac{b}{a} \pi \quad (2.1)$$

(2) $a \neq b$ のとき

$$F(a, a-b) = \frac{a}{(a-b)^2} - \frac{b}{a-b} F(a, -b) \quad (2.2)$$

(3) $a \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{a-1} kF(a, -k) = a \ln a \quad (2.3)$$

$$(4) \quad bF(a, -b) - (a-b)F(a, -(a-b)) = -\pi \cot \frac{b}{a} \pi \quad (2.4)$$

証明.

$$\begin{aligned} (1) \quad F(a, -b) + F(a, b) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(ak-b)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(ak+b)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak+b+ak-b}{k(ak-b)(ak+b)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2ak}{k\{(ak)^2 - b^2\}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{(ak)^2 - b^2} \end{aligned}$$

ここで、命題 1.1 より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{(ak)^2 - b^2} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \frac{b}{a}}{k^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{a}{b^2} - \frac{\pi}{b} \cot \frac{b}{a} \pi$$

よって、

$$F(a, -b) + F(a, b) = \frac{a}{b^2} - \frac{\pi}{b} \cot \frac{b}{a} \pi$$

(2)

$$\begin{aligned} F(a, a-b) &= a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ak\{ak+(a-b)\}} \\ &= \frac{a}{a-b} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{ak} - \frac{1}{ak+(a-b)} \right\} \\ &= \frac{a}{a-b} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{ak} - \frac{1}{a(k+1)-b} \right\} \\ &= \frac{a}{a-b} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ak} - \frac{1}{ak-b} \right) + \frac{1}{a-b} \right\} \\ &= \frac{a}{(a-b)^2} + \frac{a}{a-b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b}{ak(ak-b)} \\ &= \frac{a}{(a-b)^2} - \frac{b}{a-b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(ak-b)} \\ &= \frac{a}{(a-b)^2} - \frac{b}{a-b} F(a, -b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{a-1} kF(a, -k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ak(ak-1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{ak(ak-2)} + \cdots + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a-1}{ak\{ak-(a-1)\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ak-1} - \frac{1}{ak} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ak-2} - \frac{1}{ak} \right) \\
&\quad + \cdots + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ak-(a-1)} - \frac{1}{ak} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ak-1} + \frac{1}{ak-2} + \cdots + \frac{1}{ak-(a-1)} - \frac{a-1}{ak} \right)
\end{aligned}$$

ここで、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{ak-1} + \frac{1}{ak-2} + \cdots + \frac{1}{ak-(a-1)} - \frac{a-1}{ak} \right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{ak} + \frac{1}{ak-1} + \frac{1}{ak-2} + \cdots + \frac{1}{ak-(a-1)} - \frac{a}{ak} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{ak-(a-1)} + \cdots + \frac{1}{ak-2} + \frac{1}{ak-1} + \frac{1}{ak} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{an} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
&= \ln(an) + \gamma_{an} - \ln n - \gamma_n \\
&= \ln a + \gamma_{an} - \gamma_n
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{a-1} kF(a, -k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a + \gamma_{an} - \gamma_n) \\
&= \ln a + \gamma - \gamma = \ln a \\
\therefore \sum_{k=1}^{a-1} kF(a, -k) &= a \ln a
\end{aligned}$$

(4) (2.1) において b を $a-b$ に置き換えると

$$F(a, -(a-b)) + F(a, a-b) = \frac{a}{(a-b)^2} - \frac{\pi}{a-b} \cot \frac{a-b}{a} \pi$$

左辺の第2項に (2.2) を代入して

$$\begin{aligned}
F(a, -(a-b)) + \frac{a}{(a-b)^2} - \frac{b}{a-b} F(a, -b) &= \frac{a}{(a-b)^2} + \frac{\pi}{a-b} \cot \frac{b}{a} \pi \\
\therefore bF(a, -b) - (a-b)F(a, -(a-b)) &= -\pi \cot \frac{b}{a} \pi
\end{aligned}$$

□

$F(a, na)$ ($n \in \mathbb{N}$) の値は定理 2.1(1),(2) より

$$F(a, na) = \frac{1}{a} F(1, n) = \frac{1}{an} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

となる。また、定理 2.2(2) より $b = 1, 2, \dots, a-1$ のとき、 $F(a, an-b)$ ($n \in \mathbb{Z}$) の値は $F(a, -b)$ から得られるので、 $F(a, -b)$ ($b = 1, \dots, a-1$) の値が分かればすべての $F(a, b)$ の値が分かる。

そこで、 $F(a, -b)$ ($b = 1, \dots, a-1$) の値を、 $a = 2, 3, \dots, 6$ の場合に順に求めていく。

例 2.3. $F(2, -1)$

(2.3) に $a = 2$ を代入して

$$F(2, -1) = 2 \ln 2$$

例 2.4. $F(3, -1), F(3, -2)$

(2.3) に $a = 3$ を代入すると

$$F(3, -1) + 2F(3, -2) = 3 \ln 3$$

(2.4) に $a = 3, b = 1$ を代入すると

$$F(3, -1) - 2F(3, -2) = -\pi \cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

これらより

$$F(3, -1) = \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \quad F(3, -2) = \frac{3}{4} \ln 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

例 2.5. $F(4, -b)$ ($b = 1, 2, 3$)

$F(4, -2)$ に関しては、定理 2.1(2) と例 2.3 より

$$F(4, -2) = \frac{1}{2} F(2, -1) = \ln 2$$

(2.3) に $a = 4$ を代入すると

$$F(4, -1) + 2F(4, -2) + 3F(4, -3) = 4 \ln 4 = 8 \ln 2$$

$$\therefore F(4, -1) + 3F(4, -3) = 6 \ln 2$$

(2.4) に $a = 4, b = 1$ を代入すると

$$F(4, -1) - 3F(4, -3) = -\pi \cot \frac{\pi}{4} = -\pi$$

これらより

$$F(4, -1) = 3 \ln 2 - \frac{\pi}{2}, \quad F(4, -3) = \ln 2 + \frac{\pi}{6}$$

例 2.6. $F(5, -b)$ ($b = 1, 2, 3, 4$)

この場合は定理 2.2 だけでは値が計算できない。

(2.3) に $a = 5$ を代入すると

$$F(5, -1) + 2F(5, -2) + 3F(5, -3) + 4F(5, -4) = 5 \ln 5$$

(2.4) に $a = 5, b = 1$ を代入すると

$$F(5, -1) - 4F(5, -4) = -\pi \cot \frac{\pi}{5}$$

(2.4) に $a = 5, b = 2$ を代入すると

$$2F(5, -2) - 3F(5, -3) = -\pi \cot \frac{2}{5}\pi$$

この 3 つの式からなる連立方程式は、未知数が 4 つあるから解くことはできない。

例 2.7. $F(6, -b)$ ($b = 1, 2, 3, 4, 5$)

$F(6, -2), F(6, -3), F(6, -4)$ は定理 2.1(2) と例 2.3, 2.4 からそれぞれ

$$F(6, -2) = \frac{1}{2}F(3, -1) = \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

$$F(6, -3) = \frac{1}{3}F(2, -1) = \frac{2}{3} \ln 2$$

$$F(6, -4) = \frac{1}{2}F(3, -2) = \frac{3}{8} \ln 3 + \frac{\pi}{8\sqrt{3}}$$

(2.3) に $a = 6$ を代入すると

$$F(6, -1) + 2F(6, -2) + 3F(6, -3) + 4F(6, -4) + 5F(6, -5) = 6 \ln 6$$

となり、上の値を代入して整理すると

$$F(6, -1) + 5F(6, -5) = 4 \ln 2 + 3 \ln 3$$

次に、(2.4) に $a = 6, b = 1$ を代入すると

$$F(6, -1) - 5F(6, -5) = -\pi \cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}\pi$$

これらより

$$F(6, -1) = 2 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi, \quad F(6, -5) = \frac{2}{5} \ln 2 + \frac{3}{10} \ln 3 + \frac{\sqrt{3}}{10}\pi$$

が得られる。

例 2.6 で示したように、定理 2.1, 2.2 だけでは値が求めることができない $F(a, -b)$ ($b = 1, \dots, a-1$) が存在するので、次に $F(a, -b)$ の一般式を求める。以下に示す一般式は、 $H_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ に関する公式 ([2, p.92])

$$H_{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} - \frac{\pi}{2} \cot \frac{p\pi}{q} - \ln(2q) + 2 \sum_{k=0}^m \cos \frac{2pk\pi}{q} \ln \sin \frac{k\pi}{q}$$

$(p, q \in \mathbb{N}, 0 < p < q, m = [\frac{q-1}{2}])$ より導くことができるが、ここでは $H_{\frac{p}{q}}$ と同様の方法で計算することによって示す。

$a, p, n \in \mathbb{N}, p \leq a$ とし、区間 $(0, 1)$ で定義された t の関数 $T_{p,n}(t)$ を

$$T_{p,n}(t) = \int_0^t \frac{x^{an-p}}{1-x^a} dx$$

と定める。すると、

$$\begin{aligned} T_{p,n}(t) - T_{p,n+1}(t) &= \int_0^t \frac{x^{an-p} - x^{a(n+1)-p}}{1-x^a} dx \\ &= \int_0^t x^{an-p} dx \\ &= \frac{t^{an-(p-1)}}{an-(p-1)} > 0 \end{aligned}$$

となるから、 $T_{p,n}(t)$ は n に関して単調減少である。また、これより

$$T_{p,n}(t) = T_{p,1}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{ak-(p-1)}}{ak-(p-1)} \quad (2.5)$$

が成立する。

ここで、 $0 \leq x \leq t$ のとき、 $0 < t < 1$ より $0 \leq x \leq t < 1$ となり、

$$0 < 1 - t^a \leq 1 - x^a \leq 1$$

である。従って

$$x^{an-p} \leq \frac{x^{an-p}}{1-x^a} \leq \frac{x^{an-p}}{1-t^a}$$

となり、これらを x について区間 $[0, t]$ で定積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^t x^{an-p} dx &< \int_0^t \frac{x^{an-p}}{1-x^a} dx < \int_0^t \frac{x^{an-p}}{1-t^a} dx \\ \frac{t^{an-(p-1)}}{an-(p-1)} &< T_{p,n}(t) < \frac{1}{1-t^a} \cdot \frac{t^{an-(p-1)}}{an-(p-1)} \end{aligned}$$

ここで $n \rightarrow \infty$ のときの極限を考えると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^{an-(p-1)}}{an-(p-1)} = 0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{p,n}(t) = 0$$

よって、(2.5) より

$$T_{p,1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{ak-(p-1)}}{ak-(p-1)} \quad (2.6)$$

また、これに $p=1$ を代入すると

$$T_{1,1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{ak}}{ak} \quad (2.7)$$

が得られる。

以上より、次の命題が成立する。

命題 2.1. $a, p, n \in \mathbb{N}$, $p \leq a$, $0 < t < 1$ に対して

$$T_{p,1}(t) = \int_0^t \frac{x^{a-p}}{1-x^a} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{ak-(p-1)}}{ak-(p-1)} \quad (2.8)$$

$$T_{1,1}(t) = \int_0^t \frac{x^{a-1}}{1-x^a} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{ak}}{ak} \quad (2.9)$$

従って、

$$\begin{aligned} t^{p-1}T_{p,1}(t) - T_{1,1}(t) &= t^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{ak-(p-1)}}{ak-(p-1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{ak}}{ak} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{t^{ak}}{ak-(p-1)} - \frac{t^{ak}}{ak} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(p-1)t^{ak}}{ak\{ak-(p-1)\}} \end{aligned}$$

ここで、 $0 < t \leq 1$ において

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(p-1)t^{ak}}{ak\{ak-(p-1)\}} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(p-1)}{ak\{ak-(p-1)\}} < \infty$$

であるから、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(p-1)t^{ak}}{ak\{ak-(p-1)\}}$ は一様収束する。従って、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(p-1)t^{ak}}{ak\{ak-(p-1)\}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{(p-1)t^{ak}}{ak\{ak-(p-1)\}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p-1}{ak\{ak-(p-1)\}} \\ &= \frac{p-1}{a} F(a, -(p-1)) \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{p-1}{a} F(a, -(p-1)) = \lim_{t \rightarrow 1-0} \{t^{p-1}T_{p,1}(t) - T_{1,1}(t)\}$$

となり、 $p \neq 1$ ならば

$$F(a, -(p-1)) = \frac{a}{p-1} \lim_{t \rightarrow 1-0} \{t^{p-1}T_{p,1}(t) - T_{1,1}(t)\}$$

ここで、 $p = b+1$ とすると

$$\begin{aligned} F(a, -b) &= \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \{t^b T_{b+1,1}(t) - T_{1,1}(t)\} \\ &= \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ t^b \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx - \int_0^t \frac{x^{a-1}}{1-x^a} dx \right\} \end{aligned}$$

定理 2.3. $a \in \mathbb{N}$, $b = 1, 2, \dots, a-1$ のとき

$$F(a, -b) = \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ t^b \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx - \int_0^t \frac{x^{a-1}}{1-x^a} dx \right\} \quad (2.10)$$

ここで、(2.10) の右辺の積分の値を求める。2 つめの積分に関しては

$$\int_0^t \frac{x^{a-1}}{1-x^a} dx = -\frac{1}{a} \int_0^t \frac{(1-x^a)'}{1-x^a} dx = -\frac{1}{a} \ln(1-t^a)$$

次に、1 つめの積分について考える。

$$\theta = \frac{2\pi}{a}, \quad z = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{とおくと} \quad z^a = 1 \quad \text{で、} \quad x^a - 1 = (x-1)(x-z)(x-z^2) \cdots (x-z^{a-1})$$

より

$$\frac{x^{a-b-1}}{x^a - 1} = \sum_{j=0}^{a-1} \frac{\beta_j}{x - z^j} \quad (\beta_j \in \mathbb{C}) \quad (2.11)$$

と分解できる。(2.11) より、 $0 \leq k \leq a-1$ に対して

$$\frac{x^{a-b-1}(x-z^k)}{x^a - 1} = \beta_k + \sum_{\substack{0 \leq j \leq a-1 \\ j \neq k}} \frac{\beta_j(x-z^k)}{x-z^j}$$

となり、 $x \rightarrow z^k$ とすると

$$\lim_{x \rightarrow z^k} \left\{ x^{a-b-1} \left(\frac{x^a - 1}{x - z^k} \right)^{-1} \right\} = \beta_k + \lim_{x \rightarrow z^k} \sum_{\substack{0 \leq j \leq a-1 \\ j \neq k}} \frac{\beta_j(x-z^k)}{x-z^j} = \beta_k$$

ここで

$$\lim_{x \rightarrow z^k} \frac{x^a - 1}{x - z^k} = (x^a)'|_{x=z^k} = a(z^k)^{a-1} = az^{k(a-1)}$$

より

$$\beta_k = (z^k)^{a-b-1} (az^{k(a-1)})^{-1} = \frac{1}{az^{bk}}$$

これを (2.11) に代入して

$$\frac{x^{a-b-1}}{x^a - 1} = \sum_{j=0}^{a-1} \frac{1}{az^{bj}(x-z^j)} \quad (2.12)$$

ここで、 a が奇数のときと偶数のときに分けて考える。

1. a が奇数のとき

$a = 2m - 1$ ($m \in \mathbb{N}$) とおくと (2.12) は

$$\begin{aligned} \frac{x^{a-b-1}}{x^a - 1} &= \frac{1}{a(x-1)} + \sum_{j=1}^{2m-2} \frac{1}{az^{bj}(x-z^j)} \\ &= \frac{1}{a(x-1)} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \frac{1}{z^{bj}(x-z^j)} + \frac{1}{z^{b(a-j)}(x-z^{a-j})} \right\} \end{aligned}$$

第 2 項については

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^{bj}(x-z^j)} + \frac{1}{z^{b(a-j)}(x-z^{a-j})} &= \frac{1}{z^{bj}(x-z^j)} + \frac{1}{z^{-bj}(x-z^{-j})} \\ &= \frac{z^{-bj}(x-z^{-j}) + z^{bj}(x-z^j)}{(x-z^j)(x-z^{-j})} \\ &= \frac{(z^{bj} + z^{-bj})x - (z^{(b+1)j} + z^{-(b+1)j})}{x^2 - (z^j + z^{-j})x + 1} \\ &= \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} \end{aligned}$$

と変形できるので

$$\frac{x^{a-b-1}}{x^a - 1} = \frac{1}{a(x-1)} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx &= -\int_0^t \frac{1}{a(x-1)} dx - \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^t \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx \\ &= -\frac{1}{a} \ln(1-t) - \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^t \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx \end{aligned}$$

2. a が偶数のとき

$a = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) とおくと (2.12) は

$$\begin{aligned} \frac{x^{a-b-1}}{x^a - 1} &= \frac{1}{a(x-1)} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{az^{bj}(x-z^j)} + \frac{1}{(-1)^b a(x+1)} + \sum_{j=m+1}^{2m-1} \frac{1}{az^{bj}(x-z^j)} \\ &= \frac{1}{a(x-1)} + \frac{(-1)^b}{a(x+1)} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \frac{1}{z^{bj}(x-z^j)} + \frac{1}{z^{b(a-j)}(x-z^{a-j})} \right\} \\ &= \frac{1}{a(x-1)} + \frac{(-1)^b}{a(x+1)} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx &= -\int_0^t \left\{ \frac{1}{a(x-1)} + \frac{(-1)^b}{a(x+1)} \right\} dx \\ &\quad - \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^t \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx \\ &= -\frac{1}{a} \{ \ln(1-t) + (-1)^b \ln(1+t) \} \\ &\quad - \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^t \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx \end{aligned}$$

次に、 $\int_0^t \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx$ を計算する。

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx \\ &= \int_0^t \frac{\cos bj\theta(2x - 2\cos j\theta)}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx + \int_0^t \frac{2\cos bj\theta \cos j\theta - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx \\ &= \int_0^t \frac{\cos bj\theta(x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1)'}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx + \int_0^t \frac{2\sin bj\theta \sin j\theta}{(x - \cos j\theta)^2 + \sin^2 j\theta} dx \\ &= \cos bj\theta \left[\ln|x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1| \right]_0^t + 2\sin bj\theta \left[\tan^{-1} \frac{x - \cos j\theta}{\sin j\theta} \right]_0^t \\ &= \cos bj\theta \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} + 2\sin bj\theta \left(\tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} - \tan^{-1} \frac{-\cos j\theta}{\sin j\theta} \right) \end{aligned}$$

ここで、

$$-\tan^{-1} \frac{-\cos j\theta}{\sin j\theta} = \tan^{-1} \cot j\theta = \tan^{-1} \tan \left(\frac{\pi}{2} - j\theta \right)$$

であり、 $0 < j < \frac{a}{2}$ より $0 < j\theta = \frac{2\pi j}{a} < \pi$ であるから $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - j\theta < \frac{\pi}{2}$ 。よって、

$$-\tan^{-1} \frac{-\cos j\theta}{\sin j\theta} = \tan^{-1} \tan\left(\frac{\pi}{2} - j\theta\right) = \frac{\pi}{2} - j\theta$$

となり、

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{2(\cos bj\theta)x - 2\cos(b+1)j\theta}{x^2 - 2(\cos j\theta)x + 1} dx \\ &= \cos bj\theta \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} + 2\sin bj\theta \left(\tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) \end{aligned}$$

が得られる。以上のことから

1. a が奇数 ($a = 2m - 1$) のとき

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx &= -\frac{1}{a} \ln(1-t) - \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} \\ &\quad - \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} 2\sin bj\theta \left(\tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} & t^b \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx - \int_0^t \frac{x^{a-1}}{1-x^a} dx \\ &= -\frac{t^b}{a} \ln(1-t) - \frac{t^b}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} \\ &\quad - \frac{t^b}{a} \sum_{j=1}^{m-1} 2\sin bj\theta \left(\tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) + \frac{1}{a} \ln(1-t^a) \end{aligned}$$

2. a が偶数 ($a = 2m$) のとき

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx &= -\frac{1}{a} \{ \ln(1-t) + (-1)^b \ln(1+t) \} \\ &\quad - \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} \\ &\quad - \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-1} 2\sin bj\theta \left(\tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} & t^b \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx - \int_0^t \frac{x^{a-1}}{1-x^a} dx \\ &= -\frac{t^b}{a} \ln(1-t) - \frac{(-1)^b t^b}{a} \ln(1+t) \\ &\quad - \frac{t^b}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} \\ &\quad - \frac{t^b}{a} \sum_{j=1}^{m-1} 2\sin bj\theta \left(\tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) + \frac{1}{a} \ln(1-t^a) \end{aligned}$$

ここで、極限に関する補題を示す。

補題 2.1.

- (1) $\lim_{t \rightarrow 1-0} \{-t^b \ln(1-t) + \ln(1-t^a)\} = \ln a$
- (2) $\lim_{t \rightarrow 1-0} \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} = 2 \ln 2 + 2 \ln \sin \frac{j\theta}{2}$
- (3) $\lim_{t \rightarrow 1-0} \tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} = \frac{j\theta}{2}$

証明.

(1)

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 1-0} \{-t^b \ln(1-t) + \ln(1-t^a)\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-0} \{(1-t^b) \ln(1-t) + \ln(1+t+\cdots+t^{a-1})\} \\ &= \ln a \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 1-0} \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} \\ &= \ln(2 - 2\cos j\theta) = \ln\left(4 \sin^2 \frac{j\theta}{2}\right) \\ &= 2 \ln 2 + 2 \ln \sin \frac{j\theta}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} = \tan^{-1} \frac{1 - \cos j\theta}{\sin j\theta}$$

ここで、 $0 < \frac{j\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \frac{1 - \cos j\theta}{\sin j\theta} &= \tan^{-1} \frac{2 \sin^2 \frac{j\theta}{2}}{2 \sin \frac{j\theta}{2} \cos \frac{j\theta}{2}} \\ &= \tan^{-1} \tan \frac{j\theta}{2} = \frac{j\theta}{2} \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} = \frac{j\theta}{2}$$

□

定理 2.3 と補題 2.1 を用いて $F(a, -b)$ を計算する。

1. a が奇数 ($a = 2m - 1$) のとき

$$\begin{aligned}
 F(a, -b) &= \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ t^b \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx - \int_0^t \frac{x^{a-1}}{1-x^a} dx \right\} \\
 &= \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ -\frac{t^b}{a} \ln(1-t) + \frac{1}{a} \ln(1-t^a) \right\} \\
 &\quad - \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{t^b}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} \\
 &\quad - \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{t^b}{a} \sum_{j=1}^{m-1} 2 \sin bj\theta \left(\tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) \\
 &= \frac{1}{b} \ln a - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \left(2 \ln 2 + 2 \ln \sin \frac{j\theta}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} 2 \sin bj\theta \left(\frac{j\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) \\
 &= \frac{1}{b} \ln a - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \left(\ln 2 + \ln \sin \frac{j\theta}{2} \right) - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \sin \frac{b\theta}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \sin \frac{b(2j+1)\theta}{2} - \sin \frac{b(2j-1)\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{b(2m-1)\theta}{2} - \sin \frac{b\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sin b\pi - \sin \frac{b\theta}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sin \frac{b\theta}{2}
 \end{aligned}$$

また、 $0 < \frac{b\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \frac{b\theta}{2} \neq 0$ であるから

$$\sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta = -\frac{1}{2}$$

従って、

$$\begin{aligned}
 F(a, -b) &= \frac{1}{b} \ln a + \frac{1}{b} \ln 2 - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln \sin \frac{j\theta}{2} - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta \\
 &= \frac{1}{b} \ln 2a - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln \sin \frac{j\theta}{2} - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta
 \end{aligned}$$

2. a が偶数 ($a = 2m$) のとき

$$\begin{aligned}
 F(a, -b) &= \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ t^b \int_0^t \frac{x^{a-b-1}}{1-x^a} dx - \int_0^t \frac{x^{a-1}}{1-x^a} dx \right\} \\
 &= \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ -\frac{t^b}{a} \ln(1-t) + \frac{1}{a} \ln(1-t^a) - \frac{(-1)^b t^b}{a} \ln(1+t) \right\} \\
 &\quad - \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{t^b}{a} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln\{t^2 - 2(\cos j\theta)t + 1\} \\
 &\quad - \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{t^b}{a} \sum_{j=1}^{m-1} 2 \sin bj\theta \left(\tan^{-1} \frac{t - \cos j\theta}{\sin j\theta} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) \\
 &= \frac{1}{b} \ln a - \frac{(-1)^b}{b} \ln 2 - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \left(2 \ln 2 + 2 \ln \sin \frac{j\theta}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} 2 \sin bj\theta \left(\frac{j\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - j\theta \right) \\
 &= \frac{1}{b} \ln a - \frac{(-1)^b}{b} \ln 2 - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \left(\ln 2 + \ln \sin \frac{j\theta}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \sin \frac{b\theta}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \sin \frac{b(2j+1)\theta}{2} - \sin \frac{b(2j-1)\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{b(2m-1)\theta}{2} - \sin \frac{b\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(b\pi - \frac{b\theta}{2} \right) - \sin \frac{b\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{(-1)^{b-1} - 1}{2} \sin \frac{b\theta}{2}
 \end{aligned}$$

また、 $0 < \frac{b\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \frac{b\theta}{2} \neq 0$ であるから

$$\sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta = \frac{(-1)^{b-1} - 1}{2}$$

従って、

$$\begin{aligned}
 F(a, -b) &= \frac{1}{b} \ln a - \frac{(-1)^b}{b} \ln 2 - \frac{(-1)^{b-1} - 1}{b} \ln 2 \\
 &\quad - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln \sin \frac{j\theta}{2} - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta \\
 &= \frac{1}{b} \ln 2a - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln \sin \frac{j\theta}{2} - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta
 \end{aligned}$$

以上のことから、 a が偶数のときでも奇数のときでも

$$F(a, -b) = \frac{1}{b} \ln 2a - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos bj\theta \ln \sin \frac{j\theta}{2} - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta$$

となる。ここで、

$$\sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(a-2j)\pi}{a} \sin \frac{2bj\pi}{a} = \frac{\pi}{a} \sum_{j=1}^{m-1} (a-2j) \sin \frac{2bj\pi}{a}$$

であり、 $S_1 = \sum_{j=1}^{m-1} (a-2j) \sin \frac{2bj\pi}{a}$, $\theta_1 = \frac{b\pi}{a}$ とおくと

$$\begin{aligned} 2S_1 \sin \theta_1 &= 2 \sum_{j=1}^{m-1} (a-2j) \sin 2j\theta_1 \sin \theta_1 \\ &= - \sum_{j=1}^{m-1} (a-2j) \{ \cos(2j+1)\theta_1 - \cos(2j-1)\theta_1 \} \\ &= -(a-2m+2) \cos(2m-1)\theta_1 - \sum_{j=1}^{m-2} 2 \cos(2j+1)\theta_1 + (a-2) \cos \theta_1 \end{aligned}$$

さらに、 $S_2 = \sum_{j=1}^{m-2} 2 \cos(2j+1)\theta_1$ とおくと

$$\begin{aligned} S_2 \sin \theta_1 &= \sum_{j=1}^{m-2} 2 \cos(2j+1)\theta_1 \sin \theta_1 \\ &= \sum_{j=1}^{m-2} \{ \sin(2j+2)\theta_1 - \sin 2j\theta_1 \} \\ &= \sin(2m-2)\theta_1 - \sin 2\theta_1 \\ &= \sin(2m-2)\theta_1 - 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \therefore S_2 &= \frac{\sin(2m-2)\theta_1}{\sin \theta_1} - 2 \cos \theta_1 \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} 2S_1 \sin \theta_1 &= -(a-2m+2) \cos(2m-1)\theta_1 - \left\{ \frac{\sin(2m-2)\theta_1}{\sin \theta_1} - 2 \cos \theta_1 \right\} + (a-2) \cos \theta_1 \\ &= -(a-2m+2) \cos(2m-1)\theta_1 - \frac{\sin(2m-2)\theta_1}{\sin \theta_1} + a \cos \theta_1 \end{aligned}$$

1. a が奇数 ($a = 2m-1$) のとき

$$\begin{aligned} 2S_1 \sin \theta_1 &= -(a-2m+2) \cos(2m-1)\theta_1 - \frac{\sin(2m-2)\theta_1}{\sin \theta_1} + a \cos \theta_1 \\ &= -\cos b\pi - \frac{\sin(b\pi - \theta_1)}{\sin \theta_1} + a \cos \theta_1 \\ &= -\cos b\pi + \cos b\pi + a \cos \theta_1 \\ &= a \cos \theta_1 \end{aligned}$$

$$\therefore S_1 = \frac{a \cos \theta_1}{2 \sin \theta_1} = \frac{a}{2} \cot \frac{b\pi}{a}$$

2. a が偶数 ($a = 2m$) のとき

$$\begin{aligned}
 2S_1 \sin \theta_1 &= -(a - 2m + 2) \cos(2m - 1)\theta_1 - \frac{\sin(2m - 2)\theta_1}{\sin \theta_1} + a \cos \theta_1 \\
 &= -2 \cos(b\pi - \theta_1) - \frac{\sin(b\pi - 2\theta_1)}{\sin \theta_1} + a \cos \theta_1 \\
 &= -2 \cos b\pi \cos \theta_1 + \frac{\cos b\pi \sin 2\theta_1}{\sin \theta_1} + a \cos \theta_1 \\
 &= a \cos \theta_1 \\
 \therefore S_1 &= \frac{a \cos \theta_1}{2 \sin \theta_1} = \frac{a}{2} \cot \frac{b\pi}{a}
 \end{aligned}$$

よって、 a の偶奇に関係なく

$$\sum_{j=1}^{m-1} (\pi - j\theta) \sin bj\theta = \frac{\pi}{a} S_1 = \frac{\pi}{2} \cot \frac{b\pi}{a}$$

以上のことから、

$$F(a, -b) = \frac{1}{b} \ln 2a - \frac{\pi}{2b} \cot \frac{b\pi}{a} - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{m-1} \cos \frac{2bj\pi}{a} \ln \sin \frac{j\pi}{a}$$

但し、 m の定め方は a の偶奇によって異なり、 a が奇数のときは $a = 2m - 1$ より $m = \frac{a+1}{2}$ 、 a が偶数のときは $a = 2m$ より $m = \frac{a}{2}$ である。よって、 a の偶奇に関係なく $m = \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil$ であり、 $m - 1 = \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor$ となる。従って、次の定理が成立する。

定理 2.4. $a, b \in \mathbb{N}$, $b \leq a - 1$ とする。

(1) $m = \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil$ と定めると

$$F(a, -b) = \frac{1}{b} \ln 2a - \frac{\pi}{2b} \cot \frac{b\pi}{a} - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^m \cos \frac{2bj\pi}{a} \ln \sin \frac{j\pi}{a}$$

(2) $F(a, -b) = \frac{1}{b} \ln 4a - \frac{\pi}{2b} \cot \frac{b\pi}{a} - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{a-1} \cos \frac{2bj\pi}{a} \ln \sin \frac{j\pi}{2a}$

証明.

(1) は既に示したので (2) を証明する。

(2) 定理 2.1(2) より $F(a, -b) = 2F(2a, -2b)$ であるから、 $F(2a, -2b)$ に対して (1) を用いると、 $\left\lceil \frac{2a-1}{2} \right\rceil = a - 1$ より

$$\begin{aligned}
 F(a, -b) &= 2F(2a, -2b) \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2b} \ln 4a - \frac{\pi}{4b} \cot \frac{2b\pi}{2a} - \frac{2}{2b} \sum_{j=1}^{a-1} \cos \frac{4bj\pi}{2a} \ln \sin \frac{j\pi}{2a} \right) \\
 &= \frac{1}{b} \ln 4a - \frac{\pi}{2b} \cot \frac{b\pi}{a} - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{a-1} \cos \frac{2bj\pi}{a} \ln \sin \frac{j\pi}{2a} \quad \square
 \end{aligned}$$

定理 2.1, 2.2, 2.4 を用いることにより、すべての $F(a, b)$ の値を求めることができる。

例 2.8. $F(5, -3)$

定理 2.4(1) より

$$\begin{aligned} F(5, -3) &= \frac{1}{3} \ln 10 - \frac{\pi}{6} \cot \frac{3\pi}{5} - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^2 \cos \frac{6j\pi}{5} \ln \sin \frac{j\pi}{5} \\ &= \frac{1}{3} \ln 10 - \frac{\pi}{6} \cot \frac{3\pi}{5} - \frac{2}{3} \left(\cos \frac{6\pi}{5} \ln \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{12\pi}{5} \ln \sin \frac{2\pi}{5} \right) \\ &= \frac{5}{12} \ln 5 + \frac{\sqrt{5}}{12} \ln \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{60} \pi \end{aligned}$$

2.2 一次式の積の場合

ここでは、 k の一次式の積の形で表される二次式の逆数の無限和について考える。

定義 2.2. a, b, c, d を $ab \neq 0, ad - bc \neq 0$ を満たす整数とすると

$$P(a, b; c, d) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(ak+c)(bk+d)}$$

と定める。ただし、 $(ak+c)(bk+d) \neq 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) とする。

このとき、 $P(a, b; c, d)$ は F を用いて表すことができる。

定理 2.5.

$$P(a, b; c, d) = \frac{1}{bc-ad} \{cF(a, c) - dF(b, d)\}$$

証明.

$$\begin{aligned} P(a, b; c, d) &= cd \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(adk+cd)(bck+cd)} \\ &= \frac{cd}{bc-ad} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k(adk+cd)} - \frac{1}{k(bck+cd)} \right\} \\ &= \frac{1}{bc-ad} \{cdF(ad, cd) - cdF(bc, cd)\} \\ &= \frac{1}{bc-ad} \{cF(a, c) - dF(b, d)\} \end{aligned}$$

□

この定理を用いることにより、 $P(a, b; c, d)$ の値を求めることができる。

例 2.9.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + 5k + 2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(2k+1)} = P(1, 2; 2, 1) = \frac{1}{3} \{2F(1, 2) - F(2, 1)\}$$

ここで、定理 2.1(1) より

$$F(1, 2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

また、定理 2.2(2) より

$$F(2, 1) = 2 - F(2, -1) = 2 - 2 \ln 2$$

よって、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + 5k + 2} = \frac{1}{3} \left\{ 2 \cdot \frac{3}{4} - (2 - 2 \ln 2) \right\} = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}$$

2.3 その他の場合

一次式の積の形に因数分解できない二次式 $ak^2 + bk + c$ の場合でも、 $b \in a\mathbb{Z}$ ならば、命題 1.1 を用いて逆数の無限和を計算することができる。 $\frac{b}{a}$ が偶数の場合は命題 1.1(1) を、奇数の場合は命題 1.1(2) を利用する。ここでは、そのような例を 2 つ示す。

例 2.10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + 4k - 3}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + 4k - 3} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2k - \frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 - \frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{5}{2}} - \frac{1}{1^2 - \frac{5}{2}} \right\} \end{aligned}$$

ここで、命題 1.1(1) より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - z^2} = \frac{1}{2z^2} - \frac{\pi \cot \pi z}{2z}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{5}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2}} - \frac{\pi \cot \left(\pi \sqrt{\frac{5}{2}} \right)}{2\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5} - \frac{\pi \cot \frac{\sqrt{10}\pi}{2}}{\sqrt{10}}$$

従って、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + 4k - 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{\pi \cot \frac{\sqrt{10}\pi}{2}}{\sqrt{10}} + \frac{2}{3} \right) = \frac{13}{30} - \frac{\pi \cot \frac{\sqrt{10}\pi}{2}}{2\sqrt{10}}$$

例 2.11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2 + 3k - 1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2 + 3k - 1} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + \frac{1}{2})^2 - \frac{7}{12}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2 - \frac{7}{12}} - \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2 - \frac{7}{12}} \right\} \end{aligned}$$

ここで、命題 1.1(2) より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2 - \frac{7}{12}} &= \frac{1}{2\sqrt{21}} \pi \tan \frac{\sqrt{21}}{6} \pi \\ &= \frac{3}{\sqrt{21}} \pi \tan \frac{\sqrt{21}}{6} \pi\end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2 + 3k - 1} = \frac{\pi}{\sqrt{21}} \tan \frac{\sqrt{21}}{6} \pi + 1$$

が得られる。

3 n 次式の逆数の無限和

3.1 $k^m(ak+b)^n$ の場合

定義 3.1.

$m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m+n \geq 2$ とする。

このとき、 $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b \notin (-a)\mathbb{N}$ に対して、 $F_{m,n}(a, b)$ を

$$F_{m,n}(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m(ak+b)^n}$$

により定める。

定義から明らかなように、 $F_{1,1}(a, b)$ は 2.1 の $F(a, b)$ と一致し、また $F_{m,0}(a, b) = \zeta(m)$ である。さらに、 $F_{0,n}(a, b)$ はフルビッツゼータ関数を用いて表すことができる。

定義 3.2. (フルビッツゼータ関数)

$\operatorname{Re}(s) > 1$ を満たす複素数 s と正の実数 z に対して

$$\zeta(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^s}$$

と定める。

このとき、

$$F_{0,n}(a, b) = \frac{1}{a^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + \frac{b}{a})^n} = \frac{1}{a^n} \zeta(n, \frac{b}{a}) - \frac{1}{b^n}$$

となる。

命題 3.1.

$$F_{m+1,n+1}(a, b) = \frac{1}{b} \{F_{m+1,n}(a, b) - aF_{m,n+1}(a, b)\}$$

証明.

$$\frac{1}{k(ak+b)} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{k} - \frac{a}{ak+b} \right) \text{ より}$$

$$\frac{1}{k^{m+1}(ak+b)^{n+1}} = \frac{1}{b} \left\{ \frac{1}{k^{m+1}(ak+b)^n} - \frac{a}{k^m(ak+b)^{n+1}} \right\}$$

であるから、

$$\begin{aligned} F_{m+1,n+1}(a,b) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{m+1}(ak+b)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{m+1}(ak+b)^n} - a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m(ak+b)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{b} \{ F_{m+1,n}(a,b) - a F_{m,n+1}(a,b) \} \end{aligned}$$

□

この命題より、 $F_{m,n}(a,b)$ は $F(a,b), \zeta(s), \zeta(s,z)$ を用いて表すことができる。

例 3.1.

命題 3.1 を繰り返し利用することにより

$$\begin{aligned} F_{2,2}(a,b) &= \frac{1}{b} \{ F_{2,1}(a,b) - a F_{1,2}(a,b) \} \\ &= \frac{1}{b^2} \{ F_{2,0}(a,b) - 2a F_{1,1}(a,b) + a^2 F_{0,2}(a,b) \} \\ &= \frac{1}{b^2} \left\{ \zeta(2) - 2a F(a,b) + \zeta\left(2, \frac{b}{a}\right) - \frac{a^2}{b^2} \right\} \end{aligned}$$

例 3.2. $F_{2,2}(1,1)$

例 3.1 より

$$F_{2,2}(1,1) = \zeta(2) - 2F(1,1) + \zeta(2,1) - 1$$

例 2.2 より $F(1,1) = 1$ で、また

$$\zeta(2,1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

であるから、

$$F_{2,2}(1,1) = \frac{\pi^2}{6} - 2 + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 3$$

3.2 一次式の積の場合

定義 3.3. n を 2 以上の自然数, s_i, t_i ($i = 1, \dots, n$) を $s_i \neq 0, t_i \notin (-s_i)\mathbb{N}$ を満たす整数とするとき

$$P(s_1, s_2, \dots, s_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(s_1 k + t_1)(s_2 k + t_2) \cdots (s_n k + t_n)}$$

と定める。

この論文では、 $s_i t_j - s_j t_i \neq 0$ ($i \neq j$) を満たす場合、すなわち $s_i k + t_i = \alpha(s_j k + t_j)$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) となる実数 α が存在しない場合を考える。

定理 3.1. 2 以上の自然数 n に対して、

$$P(s_1, s_2, \dots, s_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = - \sum_{k=1}^n \frac{s_k^{n-2} t_k}{\prod_{i \neq k} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \quad (3.1)$$

証明.

i) $n = 2$ のとき

定理 2.5 より

$$\begin{aligned} P(s_1, s_2; t_1, t_2) &= \frac{1}{s_2 t_1 - s_1 t_2} \{t_1 F(s_1, t_1) - t_2 F(s_2, t_2)\} \\ &= -\frac{t_1}{s_1 t_2 - s_2 t_1} F(s_1, t_1) - \frac{t_2}{s_2 t_1 - s_1 t_2} F(s_2, t_2) \end{aligned}$$

よって、 $n = 2$ のとき成立する。

ii) $n = m$ のときに成立するとする。すなわち

$$P(s_1, s_2, \dots, s_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = - \sum_{k=1}^m \frac{s_k^{m-2} t_k}{\prod_{i \neq k} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k)$$

と仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} &P(s_1, s_2, \dots, s_{m+1}; t_1, t_2, \dots, t_{m+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(s_1 k + t_1)(s_2 k + t_2) \cdots (s_m k + t_m)(s_{m+1} k + t_{m+1})} \\ &= s_1 s_{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(s_1 s_{m+1} k + s_{m+1} t_1)(s_2 k + t_2) \cdots (s_m k + t_m)(s_1 s_{m+1} k + s_1 t_{m+1})} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(s_1 s_{m+1} k + s_{m+1} t_1)(s_1 s_{m+1} k + s_1 t_{m+1})} \\ &= \frac{1}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \left(\frac{1}{s_1 s_{m+1} k + s_{m+1} t_1} - \frac{1}{s_1 s_{m+1} k + s_1 t_{m+1}} \right) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} &P(s_1, s_2, \dots, s_{m+1}; t_1, t_2, \dots, t_{m+1}) \\ &= \frac{s_1 s_{m+1}}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(s_1 s_{m+1} k + s_{m+1} t_1)(s_2 k + t_2) \cdots (s_m k + t_m)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(s_2 k + t_2) \cdots (s_m k + t_m)(s_1 s_{m+1} k + s_1 t_{m+1})} \right\} \\ &= \frac{s_1}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} P(s_1, s_2, \dots, s_m; t_1, t_2, \dots, t_m) \\ &\quad - \frac{s_{m+1}}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} P(s_2, s_3, \dots, s_{m+1}; t_2, t_3, \dots, t_{m+1}) \end{aligned}$$

となり、帰納法の仮定を用いると

$$\begin{aligned}
& P(s_1, s_2, \dots, s_{m+1}; t_1, t_2, \dots, t_{m+1}) \\
&= -\frac{s_1}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \sum_{k=1}^m \frac{s_k^{m-2} t_k}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \\
&\quad + \frac{s_{m+1}}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \sum_{k=2}^{m+1} \frac{s_k^{m-2} t_k}{\prod_{\substack{2 \leq i \leq m+1 \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \\
&= -\frac{s_1}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \cdot \frac{s_1^{m-2} t_1}{\prod_{2 \leq i \leq m} (s_1 t_i - s_i t_1)} F(s_1, t_1) \\
&\quad - \frac{s_1}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \sum_{k=2}^m \frac{s_k^{m-2} t_k}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \\
&\quad + \frac{s_{m+1}}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \sum_{k=2}^m \frac{s_k^{m-2} t_k}{\prod_{\substack{2 \leq i \leq m+1 \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \\
&\quad + \frac{s_{m+1}}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \cdot \frac{s_{m+1}^{m-2} t_{m+1}}{\prod_{2 \leq i \leq m} (s_{m+1} t_i - s_i t_{m+1})} F(s_{m+1}, t_{m+1})
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
& \frac{s_1}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \cdot \frac{s_1^{m-2} t_1}{\prod_{2 \leq i \leq m} (s_1 t_i - s_i t_1)} = \frac{s_1^{m-1} t_1}{\prod_{2 \leq i \leq m+1} (s_1 t_i - s_i t_1)} \\
& \frac{s_{m+1}}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \cdot \frac{s_{m+1}^{m-2} t_{m+1}}{\prod_{2 \leq i \leq m} (s_{m+1} t_i - s_i t_{m+1})} = -\frac{s_{m+1}^{m-1} t_{m+1}}{\prod_{1 \leq i \leq m} (s_{m+1} t_i - s_i t_{m+1})}
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
& -\frac{s_1}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \sum_{k=2}^m \frac{s_k^{m-2} t_k}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \\
& \quad + \frac{s_{m+1}}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} \sum_{k=2}^m \frac{s_k^{m-2} t_k}{\prod_{\substack{2 \leq i \leq m+1 \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \\
&= -\sum_{k=2}^m \frac{s_k^{m-2} t_k}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m+1 \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} \cdot \frac{s_1(s_k t_{m+1} - s_{m+1} t_k) - s_{m+1}(s_k t_1 - s_1 t_k)}{s_1 t_{m+1} - s_{m+1} t_1} F(s_k, t_k) \\
&= -\sum_{k=2}^m \frac{s_k^{m-1} t_k}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m+1 \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
& P(s_1, s_2, \dots, s_{m+1}; t_1, t_2, \dots, t_{m+1}) \\
&= -\frac{s_1^{m-1}t_1}{\prod_{2 \leq i \leq m+1} (s_1 t_i - s_i t_1)} F(s_1, t_1) - \sum_{k=2}^m \frac{s_k^{m-1}t_k}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m+1 \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \\
&\quad - \frac{s_{m+1}^{m-2}t_{m+1}}{\prod_{1 \leq i \leq m} (s_{m+1} t_i - s_i t_{m+1})} F(s_{m+1}, t_{m+1}) \\
&= -\sum_{k=1}^{m+1} \frac{s_k^{m-1}t_k}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m+1 \\ i \neq k}} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k)
\end{aligned}$$

よって、 $n = m + 1$ のときも成立する。

i), ii) より、2 以上の自然数 n に対して

$$P(s_1, s_2, \dots, s_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = -\sum_{k=1}^n \frac{s_k^{n-2}t_k}{\prod_{i \neq k} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k)$$

が成立する。

□

(3.1) において $n = 3$ とすると

$$\begin{aligned}
& P(s_1, s_2, s_3; t_1, t_2, t_3) \\
&= -\sum_{k=1}^3 \frac{s_k t_k}{\prod_{i \neq k} (s_k t_i - s_i t_k)} F(s_k, t_k) \\
&= -\frac{s_1 t_1}{(s_1 t_2 - s_2 t_1)(s_1 t_3 - s_3 t_1)} F(s_1, t_1) - \frac{s_2 t_2}{(s_2 t_1 - s_1 t_2)(s_2 t_3 - s_3 t_2)} F(s_2, t_2) \\
&\quad - \frac{s_3 t_3}{(s_3 t_1 - s_1 t_3)(s_3 t_2 - s_2 t_3)} F(s_3, t_3)
\end{aligned}$$

例 3.3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(3k-1)(4k-1)} &= P(2, 3, 4; -1, -1, -1) \\
&= F(2, -1) - 3F(3, -1) + 2F(4, -1) \\
&= 2 \ln 2 - 3 \left(\frac{3}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) + 2 \left(3 \ln 2 - \frac{\pi}{2} \right) \\
&= 8 \ln 2 - \frac{9}{2} \ln 3 + \frac{\sqrt{3}-2}{2} \pi
\end{aligned}$$

例 3.4.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} &= P(1, 1, 2; 0, 1, 1) \\
&= -F(1, 1) + 2F(2, 1) \\
&= -1 + 2(2 - 2 \ln 2) \\
&= 3 - 4 \ln 2
\end{aligned}$$

4 多角数の逆数の無限和

定義 4.1. (多角数)

m を 3 以上の正の整数とし、

$$a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = (m-2)n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ に属する自然数を、 m 角数 または **位数 m の多角数** という。

m 角数の一般形は

$$\frac{n\{(m-2)n - (m-4)\}}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。

m 角数の逆数の無限和を $G(m)$ とする。つまり

$$G(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\{(m-2)k - (m-4)\}}$$

である。 $G(m)$ は 2.1 で定義した F を用いて

$$G(m) = 2F(m-2, -(m-4))$$

と表すことができる。 $m = 3, 4$ の場合は定理 2.1 を利用して $G(m)$ の値が計算できる。

例 4.1. 三角数 $G(3)$

例 2.2 より

$$G(3) = 2F(1, 1) = 2$$

例 4.2. 四角数 $G(4)$

定理 2.1 より

$$G(4) = 2F(2, 0) = F(1, 0) = \frac{\pi^2}{6}$$

この他に、定理 2.1, 2.2 より $G(m)$ の値が計算できるものとして以下の 5 つがある。(F の値は例 2.4, 2.5, 2.7 の結果を用いた。)

例 4.3.

$$G(5) = 2F(3, -1) = 3 \ln 3 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$G(6) = 2F(4, -2) = 2 \ln 2$$

$$G(8) = 2F(6, -4) = F(3, -2) = \frac{3}{4} \ln 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

$$G(10) = 2F(8, -6) = F(4, -3) = \ln 2 + \frac{\pi}{6}$$

$$G(14) = 2F(12, -10) = F(6, -5) = \frac{2}{5} \ln 2 + \frac{3}{10} \ln 3 + \frac{\sqrt{3}}{10} \pi$$

また、 $m \geq 5$ ならば $1 \leq m-4 \leq (m-2)-1$ が成り立つので、 $G(m)$ の値は定理 2.4 により求めることができる。

例 4.4. 七角数 $G(7)$

例 2.8 より

$$G(7) = 2F(5, -3) = \frac{5}{6} \ln 5 + \frac{\sqrt{5}}{6} \ln \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{30} \pi$$

参考文献

- [1] 荒川恒男, 金子昌信, 伊吹山知義 共著, ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店, 2001
- [2] Donald E. Knuth 著, 青木孝他訳, Fundamental algorithms 3rd ed. 日本語版, アスキー, 2004
- [3] 佐藤宏樹 著, 現代数学ゼミナール 15 複素解析学, 近代科学社, 1991