

素な3ボール多重ジャグリング数列の最大周期

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2016-01-21 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 西村, 保三, 桑原, 佑輔 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/9525

素な3ボール多重ジャグリング数列の最大周期

西村 保三^{*1} 桑原 佑輔^{*2}

(2015年9月9日 受付)

1 はじめに

ジャグリング（お手玉）とは、複数の物体（以下ボール）を連続的に投げ上げる芸である。今日、多くのジャグラーに支持されているサイトスワップ（site-swap）表記法では、等間隔の一定なリズムでボールを投げることを仮定して、ボールの投球パターンを数列で表現する。例えば、最も基本的な技である3ボールカスケードは3, 3ボールシャワーは51, 片手2つは40で表される（注。“51”, “40”は2項からなる数列“5, 1”, “4, 0”を意味している）。サイトスワップ表記法によって、ジャグリングのパターンを表現した数列をジャグリング数列と呼ぶ。また、サイトスワップ表記法は、同時に複数のボールを投げるマルチプレックス・ジャグリング（以下、多重ジャグリング）にも拡張される。例えば、5ボールスプリットは[32], 片手2スタックは[44]0, 3ボール・マルチプレックス・シャワーは[53]121で表される。ここで、[44], 1, 0は、それぞれ自然数の多重集合{4, 4}, {1}, ∅を意味している。これまで、どのような数列が（多重）ジャグリング数列となり、その組合せは何通りあるか等の様々な問題が数学において研究してきた（[1, 5, 6]など）。

ジャグリング数列は、2つのジャグリング数列に分割できないとき、素（prime）と呼ばれる（[5]参照）。例えば、423という周期3のジャグリング数列は、42+3と分割でき、42と3という2つのパターンを交互に繰り返した複合パターンである。本稿では素なジャグリング数列の周期について議論する。ボールの数が b 個で、同時に m 個までのボールを投げることを許し、現れる数字の上限を h としたときの、素な多重ジャグリング数列の最大周期を $M_m(b, h)$ で表す。 $M_m(b, h)$ の具体的な値は、 $b \geq 3$ のときは幾つかの小さな h を除くと、不等式による評価式が知られているのみである（[4, 5]参照）。我々は、前の論文[4]において $h \rightarrow \infty$ のときに $M_1(3, h) = O(h^3)$ であることを証明した。本稿では、[4]の証明を改善して、より精密な評価式 $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{M_1(3, h)}{h^3} = \frac{1}{6}$ を証明する。さらにこの議論を多重ジャグリング数列に拡張して、 $M_2(2, h)$ の値を決定し、 $M_m(3, h)$ （ $m = 2, 3$ ）の値についても考察する。

^{*1}福井大学教育地域科学部理数教育講座

^{*2}福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻数学教育領域

2 ジャグリング数列と状態グラフ

ジャグリング数列と状態グラフの定義と基本性質を [1, 5] に沿って再掲する。ジャグリングの技の名称については、[2]などを参照せよ。本稿で考察するジャグリングのパターンは、等間隔の一定のリズムで左右の手で交互にボールをキャッチして投げることを仮定する。ただし、ボールは一度に複数投げることも許すが、腕の交差などによるボールの軌道の違いは考慮しない。実際のジャグリングでは、キャッチとスローの間には、ボールを保持する時間があるが、簡便のためキャッチ＆スローを一つの動作とみなし、これらは同時に行われると考える。また「ボールを投げる」とあるが、ボールを0個投げること（手が空の状態）も考える。ボールを（キャッチして）投げる時刻を、数直線上の整数点で表し、各時刻で投げられたボールが次にどの時刻でキャッチされて再び投げられるかを曲線（軌道と呼ぶ）で結んで表したグラフを、ジャグリング・ダイアグラムと呼ぶ。図1は、それぞれ3ボールシャワーと、5ボールスプリットと呼ばれる技のジャグリング・ダイアグラムである。

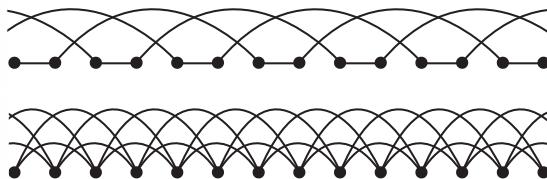


図1: ジャグリング・ダイアグラム

あるジャグリング・パターンにおいて、時刻 $i \in \mathbb{Z}$ に投げられた m_i 個のボールの滞空時間を、それぞれ a_k ($1 \leq k \leq m_i$) として、自然数からなる多重集合 $S_i = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_i}\}$ を定める。（このとき、 $m_i = \#S_i$ を S_i の個数と呼ぶ）。また、この投げ方を S_i -スローと呼ぶ。ただし、多重集合（multiset）とは、集合に同じ値の元が幾つ含まれるかという、元の「重複度」を考えあわせた集合概念で、非順序組とも呼ばれる。従って、ジャグリング・パターンは、自然数の多重集合列 $\mathbf{S} = (S_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ で表される。数列 $\mathbf{S} = (S_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ が、周期 p を持つ、すなわち全ての $i \in \mathbb{Z}$ について $S_{i+p} = S_i$ が成立するとき、循環節のみを取り出して、 \mathbf{S} を有限数列で $\mathbf{S} = (S_i)_{0 \leq i < p} = S_0 S_1 \cdots S_{p-1}$ と表す。また、 $m = \max\{m_i\}$ をパターン \mathbf{S} の重複度と呼ぶ。重複度が高々1のジャグリング・パターンをシンプルと呼び、重複度が2以上のパターンをマルチプレックス（多重）と呼ぶ。サイトスワップ表記法では、多重集合 $\{a_1, \dots, a_m\}$ は $m \geq 2$ のとき $[a_1 \cdots a_m]$ 、 $m = 1$ のとき単に a_1 、 $m = 0$ のときすなわち空集合を0と表記する習慣であり、本稿もこれに従う。特に、シンプルなジャグリング・パターンは非負整数列で表される。また、 $\underbrace{aa \cdots a}_k$ をしばしば a^k と略記する。例えば $[333]00$ は $[3^3]0^2$ などと表す。

定義 2.1 自然数の多重集合列 $\mathbf{S} = (S_i)_{0 \leq i < p}$ が周期 p の（多重）ジャグリング数列とは、 $T_i = \{(i + s) \bmod p \mid s \in S_i\}$ で定義される多重集合列 $\mathbf{T} = (T_i)_{0 \leq i < p}$ が次の条件を満たすときをいう。

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mu(i, T_j) = \#S_i \quad (0 \leq i < p) \quad (1)$$

ただし、 $\mu(i, S)$ は、多重集合 S における要素 i の重複度を表す。

※(1)式は、時刻 i に投げるボールの個数と、時刻 i にキャッチするボールの個数が等しいことを示している。

例 2.2 3 ボールシャワーから決まるジャグリング数列は、 $\dots 515151 \dots$ であり、循環節を取り出した有限数列の表記では、51, 15, 5151 などで表される。同様に、5 ボールスプリットのジャグリング数列は [32], [32][32] などで表される。

周期 p の数列 $\mathbf{S} = \{S_i\}_{0 \leq i < p}$ に対して、各項を k だけずらした列 $\mathbf{S}' = \{S_{i+k \bmod p}\}_{0 \leq i < p}$ を構成する変換をサイクリックシフトと呼ぶ。ジャグリング数列に対して、サイクリックシフトしたもののは、時刻の起点が異なるだけで同じパターンを表している。

ジャグリング・ダイアグラムにおいて、軌道は1つのボールの動きを表しており、軌道の数はボールの個数を意味する。ジャグリング数列とボールの個数には、次の関係がある。

命題 2.3 周期 p のジャグリング数列 $\mathbf{S} = \{S_i\}_{0 \leq i < p}$ をジャグリングするのに要するボールの個数は、数列に現れる数字の合計を周期で割った値 $b = (\sum_{a \in \cup_{i=0}^{p-1} S_i} a)/p$ に等しい。特に、シンプル・ジャグリング数列のときは、それは各項の数字の平均値に等しい。

例 2.4 3 ボールのシンプル・ジャグリング数列で、周期 3 のものは、サイクリックシフトで移り合うものを除くと、333, 423, 441, 504, 522, 531, 603, 612, 630, 711, 720, 801, 900 の13通りある。同様に、3 ボールで、高さが 3 以下、重複度が 2 の多重ジャグリング数列で、周期が 3 のものは、[21][21][21], [22]2[21], [22]3[11], [31][11][21], [31][21]2, [31]23, [31][31]1, [32]0[31], [32]1[21], [32]22, [32]31, [33]12, [33]03, [33]30 の14通りある。

ジャグリング状態グラフについて、始めに例を使って説明する。今4個のボールをジャグリングしているとし、投げられる高さの上限を5とする。そして現在は、図2のジャグリング・ダイアグラムにおける縦の点線の状態として、ここから、どうジャグリングし続けられるかを考える。現在の状態から、1,3,3,4拍後にボールが落下してきて、2,5拍後にはとりあえずボールは落下してこない予定である。この状態を 10210 と表す。1拍後、キャッチした1個のボールを、仮に3-スローで投げたとすると、ボールの落下予定の状態は 02200 となる。その後にはボールは落ちてこないので、手が空の状態 (0-スロー) である。その後、状態は 22000 へと

移る。次の1拍後には、2個のボールが落下してきて、重複度2のスローで投げなければならない。ここで仮に[54]-スローで投げたとすると、状態は20011に移る。今までの状態の変遷は、

$$10210 \xrightarrow{3} 02200 \xrightarrow{0} 22000 \xrightarrow{[54]} 20011$$

で表される。このように、ボールの落下予定の状態が、投球によって次々移り変わっていくことで、ジャグリングを続けることができる。

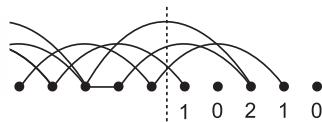


図 2: 状態 10210

定義 2.5 非負整数 b, h, m に対して、ボール数 b 、高さ h 、重複度 m の ジャグリング状態グラフ $\Gamma_m(b, h) = (V, E)$ とは、以下の頂点集合 V と、ラベル付きの有向辺 E で構成される有向グラフである。このグラフの頂点を状態と呼び、ラベル S の有向辺をしばしば S -スローと呼ぶ。

1. $V = V_m(b, h) = \{\mathbf{s} = s_1s_2 \cdots s_h \in \{0, 1, \dots, m\}^h \mid s_1 + s_2 + \cdots + s_h = b\}$
2. $\mathbf{s} = s_1s_2 \cdots s_h, \mathbf{s}' = s'_1s'_2 \cdots s'_h \in V$ に対して、 $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in E = E_m(b, h) \Leftrightarrow s_1$ 個の要素からなる自然数の多重集合 S が存在して、 $s'_i = s_{i+1} + \mu(i, S)$ ($1 \leq i < h$)、 $s'_h = \mu(h, S)$ が成り立つ。このとき、この有向辺 $(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ にラベル S を付けて、 $\mathbf{s} \xrightarrow{S} \mathbf{s}'$ と表す。

明らかに、 $mh < b$ のとき $\Gamma_m(b, h)$ は空グラフであり、 $m \geq b$ のとき $\Gamma_m(b, h) = \Gamma_b(b, h)$ であるから、 $\Gamma_m(b, h)$ は $1 \leq m \leq b \leq mh$ のケースのみ意味がある。通常、ジャグリング状態グラフといえば、 $\Gamma_1(b, h)$ を指し、多重ジャグリング状態グラフといえば、 $\Gamma_b(b, h)$ を指す。

例 2.6 図 3 はボール数 2、高さ 3 の多重ジャグリング状態グラフ $\Gamma_2(2, 3)$ である。

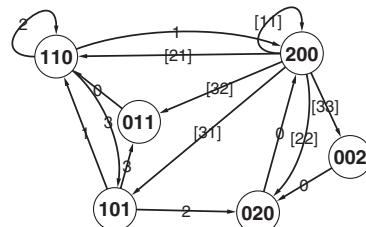


図 3: ジャグリング状態グラフ $\Gamma_2(2, 3)$

ジャグリング状態グラフについて、次の性質が成り立つ ([5] 参照)。

- 命題 2.7** (1) $m \leq m'$ のとき、 $\Gamma_m(b, h)$ は $\Gamma_{m'}(b, h)$ の部分グラフである。
 (2) $h' < h$ のとき、 $\Gamma_m(b, h)$ を頂点部分集合 $V' = \{s = s_1 \dots s_{h'} 0 \dots 0 \in \{0, 1, \dots, m\}^h \mid s_1 + \dots + s_{h'} = b\}$ に制限した部分グラフは $\Gamma_m(b, h')$ と同型である。
 (3) $\Gamma_m(mh - b, h)$ は、 $\Gamma_m(b, h)$ において矢印の向きを反対にしたグラフと同型である。

証明 (1)(2) は明らか。(3) の同型は $\phi : V_m(b, h) \rightarrow V_m(mh - b, h)$, $\phi(s_1 s_2 \dots s_h) = (m - s_h) \dots (m - s_2)(m - s_1)$ によって与えられる。このとき、 ϕ は反変写像となり、ラベル $S = [1^{c_1} 2^{c_2} \dots h^{c_h}]$ の辺をラベル $S' = [1^{c_{h-1}} 2^{c_{h-2}} \dots (h-1)^{c_1} h^{m-c_1-c_2-\dots-c_h}]$ が付けられた逆向きの辺に対応させる。□

状態グラフの定義から、ポール数 b , 高さが高々 h , 重複度が高々 m であるジャグリング数列は、有向グラフ $\Gamma_m(b, h)$ の閉路に対応する。

定義 2.8 ジャグリング数列は、対応する状態グラフの閉路が初等的である（同じ頂点を 2 度通らない）とき、素（prime）と呼ぶ。

一般に、有向グラフの任意の閉路は、有向辺を共有しない幾つかの初等閉路に分割できることから、任意のジャグリング数列は、素なジャグリング数列に分割できることがわかる。

例 2.9 3 ポール・ジャグリング数列 [53]15121 は、状態グラフ $\Gamma_2(3, 5)$ において、[53]1 : 51 : 21 のコロンの位置で状態 11010 を 2 回訪れるので、素なジャグリング数列 [53]121 と 51 に分割できる。

3 素なジャグリング数列の最大周期

ポール数 b , 高さが高々 h , 重複度が高々 m の素な多重ジャグリング数列の最大周期を $M_m(b, h)$ と表す。これは、ジャグリング状態グラフ $\Gamma_m(b, h)$ の最長の初等閉路の長さとも言い換えられる。なお、[4, 5] では、 $M_1(b, h)$, $M_b(b, h)$ はそれぞれ $MP(b, h)$, $MM(b, h)$ と表記されている。

命題 2.7 より、 $M_m(b, h)$ は、変数 m, h に関して単調増加である。また、 $M_m(b, h) = M_m(mh - b, h)$ であるから、 $mh \geq 2b$ のケースのみ考えれば十分である。 $1 \leq b \leq mh - 1$ のとき、 $[h \dots h]$ -スローと 0-スローだけからなる周期 h の明らかな素なジャグリング数列（ネックレスと呼ぶ）が存在することから、下限 $h \leq M_m(b, h)$ が得られる。また、グラフの初等閉路の長さは、頂点数を超えないでの、次の不等式が成立する。

$$h \leq M_m(b, h) \leq \#V_m(b, h) \quad (2)$$

特に $m = 1$ と $m = b$ のとき、 $\#V_m(b, h)$ は容易にわかるように、(重複) 組合せである。

$$\#V_1(b, h) = \binom{h}{b}, \quad \#V_b(b, h) = \binom{h}{b} = \binom{h+b-1}{b}$$

また $m = b - 1$ のとき、 $\#V_{b-1}(b, h) = \#V_b(b, h) - h = \binom{h}{b} - h$ もただちにわかる。

状態 $s = s_1s_2 \cdots s_h \in V_m(b, h)$ は任意のサイクリックシフトで異なる状態と仮定する。このとき、 s を起点とするネックレスとは、 $[h^{s_1}][h^{s_2}] \cdots [h^{s_h}]$ で与えられる長さ h の素なジャグリング数列のことである。 $\Gamma_m(b, h)$ のネックレスの総数を $N_m(b, h)$ とおく。特に $N_1(b, h)$ は次の命題で与えられる（[5] 参照）。

命題 3.1 $1 \leq b \leq h - 1$ のとき、

$$N_1(b, h) = \frac{1}{h} \sum_{d \mid \gcd(b, h)} \phi(d) \binom{h/d}{b/d}$$

ただし、 $\phi(d) := \#\{1 \leq i \leq d \mid \gcd(i, d) = 1\}$ はオイラー関数である。

$\Gamma_m(b, h)$ の初等閉路 L において、重複度 1 の状態 $s = s_1s_2 \cdots s_h \in \Gamma_1(b, h)$ から k -スローによって、異なるネックレスの状態 $s' = s'_1s'_2 \cdots s'_h$ に移るとする。このとき、 $1 \leq k \leq h - 1$ であるから、 $s'_h = 0$ であり、 s' を起点とするネックレスの 1 つ前の状態 $s'' = 0s'_1s'_2 \cdots s'_{h-1}$ は初等閉路 L に含まれることはない。従って L は、経由する重複度 1 のネックレス毎に、そのネックレス内に少なくとも 1 つ訪れない状態がなければならない。従って、 $2 \leq b \leq mh - 2$ のとき、

$$M_m(b, h) \leq \#V_m(b, h) - N_1(b, h). \quad (3)$$

特に、 $\Gamma_m(b, h)$ にはハミルトン閉路が存在しないことがわかる。さらに、 $b \geq 3$ のとき、状態 $0^{h-1}b$ を含む初等閉路はネックレス $[h^b]0^{h-1}$ 以外に存在しないので、

$$M_b(b, h) \leq \binom{h+b-1}{b} - N_1(b, h) - 1 \quad (4)$$

が成り立つ。特に、 $(b, m) = (2, 1)$ のとき、不等式 (3) は、等号が成立する（[5] 参照）。

定理 3.2 $h \geq 4$ のとき、

$$M_1(2, h) = \binom{h}{2} - N_1(2, h) = \begin{cases} \frac{1}{2}h(h-2), & h: \text{偶数}, \\ \frac{1}{2}(h-1)^2, & h: \text{奇数}. \end{cases}$$

最大の素なジャグリング数列は、 $g = h - 1$ 、 $e = \lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor$ として、次で与えられる。

$$he0^{e-1}g0^eh0^{e-1}g0^{e+1}h0^{e-2}g0^{e+2}h0^{e-3}g0^{e+3}h0^{e-4} \cdots h0g0^{h-3} \quad (h \geq 6: \text{偶数}),$$

$$he0^{e-1}h0^{e-1}g0^eh0^{e-2}g0^{e+1}h0^{e-3}g0^{e+2}h0^{e-4}g0^{e+3} \cdots h0g0^{h-3} \quad (h \geq 5: \text{奇数}).$$

$b = 3$ のとき, $M_m(3, h)$ についての上限 (3)(4) を適用して, 次の不等式が得られる。

命題 3.3

$$h \geq 5 \text{ のとき, } M_1(3, h) \leq \begin{cases} \frac{1}{6}(h-1)^2(h-2), & h \not\equiv 0 \pmod{3}; \\ \frac{1}{6}(h-3)(h^2-h+2), & h \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$h \geq 3 \text{ のとき, } M_2(3, h) \leq \begin{cases} \frac{1}{6}(h^3+2h^2-h-2), & h \not\equiv 0 \pmod{3}; \\ \frac{1}{6}(h^3+2h^2-h-6), & h \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$h \geq 2 \text{ のとき, } M_3(3, h) \leq \begin{cases} \frac{1}{6}(h^3+2h^2+5h-8), & h \not\equiv 0 \pmod{3}; \\ \frac{1}{6}(h^3+2h^2+5h-12), & h \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

$M_m(b, h)$ の具体的な値は, $b \geq 3$ または $m \geq 2$ のときは, 小さな h を除いて知られていない。以下では, $M_m(3, h)$ の下限について議論する。表1は, ソフトウェア Juggling Lab [3] によって調べた $M_m(3, h)$ の値である ($m = 1$ のときは, [5, 2.8.5節] には $M_1(3, h)$ の値が $h \leq 17$ まで記載されている)。

表 1: $M_m(3, h)$

$m \setminus h$	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	1	4	8	15	30
2	-	2	5	14	27		
3	1	3	8	18			

3.1 $M_1(3, h)$ の下限

$h \geq 8$ を仮定し, $g = h - 1$, $e = \lfloor \frac{h-5}{3} \rfloor$ とおく。 $0 \leq j \leq e$, $0 \leq i \leq h - 4 - 3j$ について, $\Gamma_1(3, h)$ の道 $E_{j,i}, E_j, E$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} E_{j,i} : & 10^j 10^{h-3-2j-i} 10^{j+i} \xrightarrow{h0^j} 10^{h-3-2j-i} 10^{j+i} 10^j \xrightarrow{h0^{h-3-2j-i}} 10^{j+i} 10^j 10^{h-3-2j-i}, \\ E_j : & E_{j,0} \xrightarrow{g0^j} E_{j,1} \xrightarrow{g0^{j+1}} E_{j,2} \xrightarrow{g0^{j+2}} E_{j,3} \xrightarrow{g0^{j+3}} \dots \xrightarrow{g0^{h-6-2j}} E_{j,h-5-3j} \xrightarrow{g0^{h-5-2j}} 10^j 10^{j+1} 10^{h-4-2j}, \\ E : & E_1 \xrightarrow{g0} E_2 \xrightarrow{g0^2} \dots \xrightarrow{g0^{e-1}} E_e \xrightarrow{h0^e h0^{e+1}} 10^{h-2e-4} 10^e 10^{e+1}. \end{aligned}$$

状態 1110^{h-3} (ground-state) を起点とし, 道 E を通る初等閉路を構成するために, E_0 から $E_{0,0}$ と $E_{0,e}$ の一部を取り除いた道 E'_0 を次のように定義する。

$$\begin{aligned} E'_0 : & E_{0,1} \xrightarrow{g0} E_{0,2} \xrightarrow{g0^2} E_{0,3} \xrightarrow{g0^3} \dots \\ & \dots \xrightarrow{g0^{e-2}} E_{0,e-1} \xrightarrow{g0^{e-1}} 110^{h-3-e} 10^e \xrightarrow{2} E_{0,e+1} \xrightarrow{g0^{e+1}} \dots \\ & \dots \xrightarrow{g0^{h-6}} E_{0,h-5} \xrightarrow{g0^{h-5}} 11010^{h-4}. \end{aligned}$$

そこで、初等閉路 L を以下のように定義する。

$$L : 1110^{h-3} \xrightarrow{h2} E'_0 \xrightarrow{g} E \xrightarrow{(g-e)0^{h-2e-4}} 10^e 110^{h-e-3} \xrightarrow{(e+3)0^e} 1110^{h-3}. \quad (5)$$

閉路 L において、道 E から 1110^{h-3} に戻る途中で経由する $10^e 110^{h-e-3}$ を含むネックレスの一部は、 E'_0 において除かれた $E_{0,e}$ 部分に含まれており、 L は初等閉路であることに注意する。道 $E_{j,i}$ の長さは、 $l(E_{j,i}) = h - 1 - j - i$ であるから、道 E_j , E'_0 の長さは、それぞれ $l(E_j) = \sum_{i=0}^{h-5-3j} \{l(E_{j,i}) + (j+i+1)\} = h(h-4-3j)$ および $l(E'_0) = l(E_0) - 2h + 1 = h^2 - 6h + 1$ である。従って、閉路 L の長さは、以下で求められる。

$$\begin{aligned} l(L) &= 3 + l(E'_0) + l(E) + (h - e - 2) \\ &= h^2 - 5h + 2 - e + \sum_{j=1}^e \{l(E_j) + j + 1\} + e + 2 \\ &= h^2 - 5h + 4 + \sum_{j=1}^e (h^2 - 4h - 3hj + j + 1) \\ &= h^2 - 5h + 4 + (h^2 - 4h + 1)e + \frac{1}{2}(1 - 3h)e(e + 1) \\ &= (h^2 - \frac{11}{2}h + \frac{3}{2})e + \frac{1}{2}(1 - 3h)e^2 + (h^2 - 5h + 4). \end{aligned}$$

$e = \lfloor \frac{h-5}{3} \rfloor$ を代入して、次の不等式が得られる。

定理 3.4 $h \geq 8$ のとき、

$$M_1(3, h) \geq \frac{1}{6}h^3 - \frac{7}{9}h^2 + \begin{cases} -\frac{1}{6}h + 3, & h \equiv 0 \pmod{3}; \\ -\frac{11}{18}h + \frac{29}{9}, & h \equiv 1 \pmod{3}; \\ -\frac{1}{18}h + \frac{26}{9}, & h \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

定理 3.4 と命題 3.3 の結果から、[4, 注意 3.9] で予想されていた次の極限式が証明できる。

系 3.5 $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{M_1(3, h)}{h^3} = \frac{1}{6}$

3.2 $M_2(3, h)$ と $M_3(3, h)$ の下限

$h \geq 3$ を仮定し、 $g = h - 1$ とおく。 $1 \leq i \leq h - 2$ について、 $\Gamma_2(3, h)$ の道 C_i と C を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} C_i : \quad &0^{i-1} 10^{h-2-i} 20 \xrightarrow{0^{i-1}} 10^{h-2-i} 20^i \xrightarrow{h0^{h-2-i}} 20^i 10^{h-2-i}, \\ C : \quad &0^{h-3} 210 \xrightarrow{0^{h-3}[hh]} 10^{h-2} 2 \xrightarrow{1} C_1 \xrightarrow{[gg]} C_2 \xrightarrow{[gg]} C_3 \xrightarrow{[gg]} \cdots \xrightarrow{[gg]} C_{h-2}. \end{aligned}$$

このとき、 C は初等的な道で、長さは $l(C) = h^2 - 2h$ 、終点は $20^{h-2} 1$ である。

補題 3.6 L は $\Gamma_1(3, h)$ の初等閉路で、有向辺 $10^{h-3} 11 \xrightarrow{k} 0^{k-1} 10^{h-k-3} 110$ ($1 \leq k \leq h - 4$) または $110^{h-3} 1 \xrightarrow{k} 10^{k-2} 10^{h-k-2} 10$ ($2 \leq k \leq h - 2$) を含むとする。このとき、 $\Gamma_2(3, h)$ の初等閉路 L' で、 $l(L') = l(L) + h^2 - 2h + 2$ を満たすものが存在する。

証明 L のラベル k がついた有向辺を, $\Gamma_2(3, h)$ の次で示す道のどちらかに置き換えた閉路として L' を定義する。

$$10^{h-3}11 \xrightarrow{h-2} C \xrightarrow{[h,k+1]} 0^k 10^{h-k-3}11 \xrightarrow{0} 0^{k-1} 10^{h-k-3}110,$$

$$110^{h-3}1 \xrightarrow{h} 10^{h-3}11 \xrightarrow{h-2} C \xrightarrow{[k,1]} 10^{k-2} 10^{h-k-2}10.$$

このとき, どちらのケースも初等閉路 L' の長さは, $l(L') = l(L) + l(C) + 2$ である。□

補題 3.7 $b \geq 2$ とし, $a = b - 1$, $g = h - 1$ とおく。 L' を $\Gamma_a(b, h)$ の初等閉路で, 有向辺 $10^{h-2}a \xrightarrow{k} 0^{k-1}10^{h-k-2}a0$ ($1 \leq k \leq h - 2$) を含むとする。このとき, $\Gamma_b(b, h)$ の初等閉路 \tilde{L} で, $l(\tilde{L}) = l(L') + h$ を満たすものが存在する。

証明 L' の有向辺 $10^{h-2}a \xrightarrow{k} 0^{k-1}10^{h-k-2}a0$ を, $\Gamma_b(b, h)$ の次で示す道に置き換えた閉路として \tilde{L} を定義する。

$$10^{h-2}a \xrightarrow{g} 0^{h-2}b0 \xrightarrow{0^{h-2}} b0^{h-1} \xrightarrow{[h^a, k+1]} 0^k 10^{h-k-2}a \xrightarrow{0} 0^{k-1} 10^{h-k-2}a0$$

このとき, \tilde{L} は $\Gamma_b(b, h)$ の初等閉路で, $l(\tilde{L}) = l(L') + h$ である。□

例 3.8 周期 27 の数列 554005[54]000[55]1500[54]05054050[54]00 は, ボール数 3, 重複度 2, 高さ 5 の最大周期の素な多重ジャグリング数列の一つである（表 1）。この数列に対応するジャグリング状態グラフの閉路は, 第 12 項で有向辺 $10002 \xrightarrow{1} 10020$ を通るので, 1 を $4000[552]0$ に置き換えることで, 周期 32 の重複度 3 の素なジャグリング数列が得られる。一方, 命題 3.3 から $M_3(3, 5) \leq 32$ がわかるので, $M_3(3, 5) = 32$ が決定できる。

定理 3.9 $h \geq 1$ のとき,

$$M_2(2, h) = \#V_2(2, h) - N_1(2, h) = \begin{cases} \frac{1}{2}h^2, & h : \text{偶数}; \\ \frac{1}{2}(h^2 + 1), & h : \text{奇数}. \end{cases}$$

証明 $1 \leq h \leq 4$ のときは, 定理は成立している。実際, [11], [22]0 (または [21]1), 320[32]0, 4300[42]030 は, それぞれ $h = 1, 2, 3, 4$ のときのボール数 2 の最大周期多重ジャグリング数列である。 $h \geq 5$ のとき, ボール数 2 の最大周期のシンプル・ジャグリング数列は, 定理 3.2 で示されており, 第 2 項で有向辺 $10^{h-2}1 \xrightarrow{e} 0^{e-1}10^{h-e-2}10$ を通る。これは補題 3.7 の条件を満たしており, e を $g0^{h-2}[h, e+1]0$ に置き換えることで, 周期 $M_1(2, h) + h$ の $\Gamma_2(2, h)$ の素な多重ジャグリング数列が得られる。一方, 不等式 (3) から, 上限 $M_2(2, h) \leq \#V_2(2, h) - N_1(2, h) = \binom{h}{2} + h - N_1(2, h) = M_1(2, h) + h$ がいえるので, これらの不等式は等号が成立している。□

$b = 3$, $h \geq 8$ のとき, 定理 3.4 に補題 3.6, 3.7 を適用して, $M_m(3, h)$ の下限式が得られる。

定理 3.10 $h \geq 8$ のとき,

$$M_2(3, h) \geq \frac{1}{6}h^3 + \frac{2}{9}h^2 + \begin{cases} -\frac{13}{6}h + 5, & h \equiv 0 \pmod{3}; \\ -\frac{47}{18}h + \frac{47}{9}, & h \equiv 1 \pmod{3}; \\ -\frac{37}{18}h + \frac{44}{9}, & h \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$M_3(3, h) \geq \frac{1}{6}h^3 + \frac{2}{9}h^2 + \begin{cases} -\frac{7}{6}h + 5, & h \equiv 0 \pmod{3}; \\ -\frac{29}{18}h + \frac{47}{9}, & h \equiv 1 \pmod{3}; \\ -\frac{19}{18}h + \frac{44}{9}, & h \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

証明 定理 3.4 の証明で構成した $\Gamma_1(3, h)$ の初等閉路 (5) を L とおく。 L は第 2 項で、有向辺 $110^{h-3}1 \xrightarrow{2} 110^{h-4}10$ を通るので、補題 3.6 の条件を満たし、長さ $l(L) + h^2 - 2h + 2$ の $\Gamma_2(3, h)$ の初等閉路 L' が得られる。またこのとき、 L' は有向辺 $10^{h-2}2 \xrightarrow{1} 10^{h-3}20$ を通るので、補題 3.7 の条件を満たし、長さ $l(L') + h$ の $\Gamma_3(3, h)$ の初等閉路 \tilde{L} が得られる。□

例 3.11 [5, 2.8.5 節] に、 $h = 6, 7, 8, 9$ のときの最大周期の素な 3 ボールシンプル・ジャグリング数列が列挙されている。それらは、長さがそれぞれ 15, 30, 49, 74 であり、全て補題 3.6 の条件を満たしている。従って、不等式 $41 \leq M_2(3, 6)$, $67 \leq M_2(3, 7)$, $99 \leq M_2(3, 8)$, $139 \leq M_2(3, 9)$ が得られる。同様に、補題 3.7 から不等式 $47 \leq M_3(3, 6)$, $74 \leq M_3(3, 7)$, $107 \leq M_3(3, 8)$, $148 \leq M_3(3, 9)$ も得られる。この結果と命題 3.3 と合わせると、例えば $41 \leq M_2(3, 6) \leq 46$, $67 \leq M_2(3, 7) \leq 72$, $99 \leq M_2(3, 8) \leq 105$ が示される。

定理 3.10 と命題 3.3 を合わせて、系 3.5 を多重ジャグリングに拡張できる。

系 3.12 $m = 2, 3$ に対して、 $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{M_m(3, h)}{h^3} = \frac{1}{6}$ が成り立つ。

参考文献

- [1] J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham and C. Wright, Juggling drops and descents, American Mathematical Monthly 101 (1994), p.507–519.
- [2] チャーリー・ダンシー著, 井上恵介訳, ボールジャグリング百科, 遊戯社, 2003.
- [3] Juggling Lab, <http://jugglinglab.sourceforge.net/>
- [4] 西村保三, 桑原佑輔, 素な 3 ボールジャグリング数列の最大周期について, 福井大学教育地域科学部紀要 5 (2014), p.99–108.
- [5] B. Polster, The Mathematics of Juggling, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [6] 德重典英, ジャグリングの数列, 数学セミナー 1996 年 7 月号, p.19–23.