コンパスと折り紙による作図公理

コンパスと折り紙による作図公理

西　村　保　三*

（2013年9月25日　受付）

1　はじめに

折り紙の作図とは，平面上において点や直線を，紙を折る操作によって構成することである。1980年代に藤田 [5] は，折り紙による6つの基本的な作図方法を公理として初めて規定し，これによって折り紙の作図が数学的な意味で明確になった。その後，羽鳥とジュスタンが独立に，藤田が見落としていた7番目の折り方を発見し，これを加えた**藤田-羽鳥の公理**が，今日折り紙作図の基本公理とされている（[2, §19] 参照）。アルペリンとラングは，紙を折る際に指標となる点や直線を「重ね合わせる」という，より基本的な操作ー**アライメント**（alignment）ーに着目し，折り線とアライメントの組合せによって，折り紙の公理を再定式化した（[1, 8] 参照）。これによって，1回の操作で1本の折り線を付ける「単純折り」は，藤田-羽鳥の公理で示された7通りの折り方で完全であることが証明された。

代数的には，定規とコンパスによる古典作図が2次方程式を解くことに対応しているのに対して，折り紙の作図は3次方程式を解く能力を有している（[2, 4, 9] 参照）。その意味で，定規とコンパスで作図可能な図形は，全て折り紙でも作図可能であると言われるが，この場合の図形とは点と直線に限った話であり，折り紙では円を作図することはできない。そのため，例えば円と円の交点を折り紙で作図する場合，円を描かないで円の交点になるべき点を折り操作のみで作図する必要があるので，少々手間を要する（[4, 1.4.5] 等）。そこで，本論文では折り紙の作図にコンパスを加えた作図を考える。平面上にコンパスによって円が描けると，それを利用して作図手順を容易にしたり，点と円を重ねるように紙を折るなど，新しい作図方法を工夫できる余地が生まれる。円を利用した折り紙作図は，これまでにも飯島 [6] で2次曲線の接線との関係が研究されており，それを応用してエドワーズ-シュルマン [3], 西村 [10] では，4次方程式の折り紙による解法が与えられている。また近年，カセム - ゴーラビ - 井田 [7] では，コンパスを組合わせた3種類の新しい折り方を加えて，折り紙の作図公理を拡張する試みがなされている。本稿では, [7] の研究を拡張して，コンパスと折り紙の組合せで可能な折り方を全て（31通り）列挙して，完全なコンパス折り紙の公理を体系づけることを目的とする。

*福井大学教育地域科学部理数教育講座

2　アライメントと藤田-羽鳥の公理

アルペリンとラング [1] による，点と直線のアライメントを用いた，折り紙作図公理を再掲する。以下では，折り紙の全体をユークリッド座標平面 $\mathbb{R}^2$ であると考え，図形とはその部分集合（または元）のこととする。

定義 2.1 (点と直線および双対) (1) **点** $P(a,b)$ とは，座標平面 $\mathbb{R}^2$ の元 $P=(a,b)$ のことであり，組 (a,b) を点 P の座標と呼ぶ。
(2) **直線** $L(a,b)$ とは，座標平面内における 1 次方程式 $ax+by+1=0$ の解集合 $L=\{(x,y)\mid ax+by+1=0\}$ のことであり，組 (a,b) を直線 L の座標と呼ぶ。
(3) 点 $P(a,b)$ に対する直線 $\bar{P}(a,b)$，および直線 $L(a,b)$ に対する点 $\bar{L}(a,b)$ をそれらの**双対**と呼び，上にバーを付けた記号で表す。

※点を考える際は，点を構成する平面の部分集合 $\{(a,b)\}$ と元 (a,b) は通常同一視される。またここでは，原点および原点を通る直線は，考察から除外する。ここで定義した点と直線の双対関係は，相反変換の 1 種で，より正確には，単位円に関する極変換と原点に関する対称変換の合成である。定義から明らかに，点または直線 A に対して，双対性 $\bar{\bar{A}}=A$ が成立する。

定義 2.2 (直線に関する折り返し) 平面内の直線 F に関する対称変換を，同じ記号で $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ で表す。図形 A の直線 F による対称変換による像 $F(A)$ は，A を**折り線** F で**折り返した図形**である。対称変換の性質 $F\circ F=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ から明らかに，任意の図形 A,B と直線 F について，$F(F(A))=A,\ F(A)=B \iff F(B)=A$ が成立する。

点と直線の折り返しについて，簡単な計算から折り返した図形の具体的な座標が次のように求められる（[1, (1)(2)] 参照。注．ただし [1] の式は一部誤りがある）。

命題 2.3 (1) 点 $P(p,q)$ と折り線 $F(u,v)$ について，

$$F(P)=\left(\frac{p(v^2-u^2)-2u(1+qv)}{u^2+v^2},\frac{q(u^2-v^2)-2v(1+pu)}{u^2+v^2}\right)$$

(2) 直線 $L(a,b)$ と折り線 $F(u,v)$ について，

$$F(L)=\left(\frac{a(v^2-u^2)-2buv}{u^2-2au-2bv+v^2},\frac{b(u^2-v^2)-2auv}{u^2-2au-2bv+v^2}\right)$$

定義 2.4 (点と直線のアライメント) 平面上の点または直線について，対称な 2 項関係 $A\leftrightarrow B$ を次で定義する。この関係を**アライメント**（alignment）と呼ぶ。
(1) **点と点**：点 $P,\ Q$ に対し，$P\leftrightarrow Q \iff P=Q$
(2) **直線と直線**：直線 $L,\ M$ に対し，$L\leftrightarrow M \iff L=M$
(3) **点と直線**：点 P と直線 L に対し，$P\leftrightarrow L \iff P\in L$ すなわち，点 P が直線 L 上の点であることと定義する。

※点と直線の座標の定義から明らかに，任意の点または直線 A, B に対して，$A \leftrightarrow B \iff \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ が成立することに注意する。

平面内に既に描かれている点や直線を指標として，それらを重ね合わせるという操作ーアライメントーによって折り線を構成し，またそれによる折り返しや，得られた直線の交点を得ることによって，新たな点や直線を構成することを折り紙の作図という。その際，折り線と点・直線の可能なアライメントの組み合わせは，（折り線が 1 本の単純折りでは）以下に示す 5 通りである（[1] 参照）。

定義 2.5 (単純折りのアライメント) P, P_1, P_2 は点, L, L_1, L_2 は直線，F は折り線を表す。

AL1. $F(P_1) \leftrightarrow P_2$：点 P_1 を P_2 に重ねて 2 点の垂直 2 等分線を折る（図 1）
AL2. $F(L_1) \leftrightarrow L_2$：直線 L_1 を L_2 に重ねて 2 直線の 2 等分線を折る（図 2）
AL3. $F(L) \leftrightarrow L$：直線 L を自身に重ねてその垂線を折る（図 3）
AL4. $F(P) \leftrightarrow L$：点 P が直線 L に重なるように折る（図 4）
AL5. $F \leftrightarrow P$：折り線が点 P を通るように折る（図 5）

※ AL1, AL2 は座標に関する 2 つの方程式，AL3〜AL5 は 1 つの方程式に対応している。前者の操作で決まる折り線は 1 本または 2 本（自由度は 0）だが，後者で決まる折り線は無数にあり，自由度は 1 である。

AL4 で折られる折り線 F は，点 P を焦点とし，直線 L を準線とする放物線の接線として特徴づけられる（[2, 6, 4] など）。

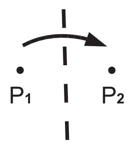

図 1: AL1. $F(P_1) \leftrightarrow P_2$

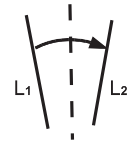

図 2: AL2. $F(L_1) \leftrightarrow L_2$

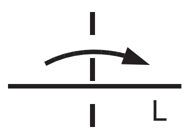

図 3: AL3. $F(L) \leftrightarrow L$

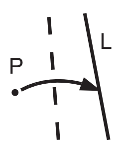

図 4: AL4. $F(P) \leftrightarrow L$

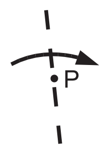

図 5: AL5. $F \leftrightarrow P$

折り線が有限個（自由度0）に決まるような，アライメント AL1〜AL5 の極小な組み合わせは，7通り存在する（AL1，AL2，AL3+AL4，AL3+AL5，AL4+AL4，AL4+AL5，AL5+AL5）。これら7つの折り方は，**藤田-羽鳥の公理**（[5], [2, §19] 参照）と呼ばれている。

定義 2.6 (藤田-羽鳥の公理)　O1 (AL5+AL5)：与えられた2点を通る直線で折る（図6）

O2 (AL1)：与えられた2点を重ねて，それらの垂直2等分線で折る（図7）

O3 (AL2)：与えられた2直線を重ねて，それらの2等分線で折る（図8）

O4 (AL3+AL5)：与えられた点を通り，与えられた直線の垂線で折る（図9）

O5 (AL4+AL5)：与えられた2点と1本の直線に対して，一方の点を直線に重ね，他方の点を折り線が通るように折る（図10）

O6 (AL4+AL4)：与えられた2点と2直線に対し，2点がそれぞれ2直線に重なるように折る（図11）

O7 (AL3+AL4)：与えられた1点と2直線に対し，点を一方の直線に重ねて，もう一方の直線の垂線で折る（図12）

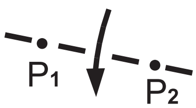

図 6: O1:AL5+AL5

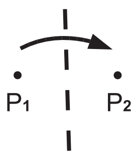

図 7: O2:AL1

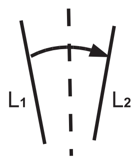

図 8: O3:AL2

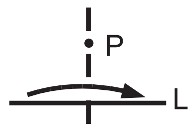

図 9: O4:AL3+AL5

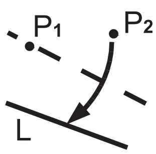

図 10: O5:AL4+AL5

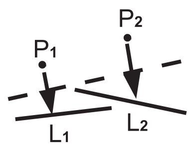

図 11: O6:AL4+AL4

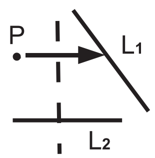

図 12: O7:AL3+AL4

定理 2.7 (ラング [8]) 点や直線の並びから構成されている平面図形に対し，それらを指標として1回の操作で1本の折り線を付ける単純折りの操作は，定義 2.6 に列挙した7つの折り方で完全である。

3　コンパス折り紙の作図公理

折り紙の作図に，コンパスの使用を認めて円を描く操作を付加した**コンパス折り紙の作図**について考える。始めにコンパスで円を作図する公理を規定しておく。

公理 C：任意に与えられた点と線分に対して，その点を中心とし，線分の長さを半径とする円を描く

公理 C によって，作図可能な図形は，点と直線だけでなく，円が新たに加わることになる。また，円と直線，円と円の共有点によって，新たな点を作図することが可能になる。この節では，前節の折り紙の作図公理を，円を加えて拡張する。まずは円のアライメントについて考察するが，双対性を考えるために，円に限らない２次曲線について広い定義をしておく。

定義 3.1（２次曲線と双対） ２次曲線 $Q(a,b,c,d,e,f)$ とは，座標平面における既約２次方程式 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ の解集合 $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0\}$ である。ただし，Q は空集合や１点に退化していないとし，条件 $ae^2-2bde+cd^2+(b^2-ac)f\neq 0$ を仮定しておく。

２次曲線 $Q(a,b,c,d,e,f)$ に対して，２次曲線 $\bar{Q}(e^2-cf, bf-ed, d^2-af, cd-be, ae-bd, b^2-ac)$ を Q の双対と呼ぶ。

※ Q が上記の定義の条件を満たす２次曲線であれば，判別式 $D=ac-b^2$ の符号によって，$D>0$ のとき楕円，$D<0$ のとき双曲線，$D=0$ のとき放物線である。またこのとき，$\bar{Q}$ も条件を満たす２次曲線となり，$\bar{\bar{Q}}=Q$ が成立する。

注意 3.2 ２次曲線 $Q(a,b,c,d,e,f)$ が，$a=c\neq 0,\ b=0,\ d^2+e^2-a^2f>0$ を満たすとき，Q は円である。点 (a,b) を中心とする半径 r の円は，２次曲線 $Q(1,0,1,-a,-b,a^2+b^2-r^2)$ で表される。このとき，円の双対 $\bar{Q}(a^2-r^2, ab, b^2-r^2, a, b, 1)$ は，
i) Q の内部に原点がある場合：楕円（特に Q の中心が原点のときは円），ii) Q の外部に原点がある場合：双曲線，iii) Q 上に原点がある場合：放物線である。

平面上の点と直線に対して定義されていたアライメント $A\leftrightarrow B$ を，２次曲線について拡張することを考える。２次曲線と直線のアライメントは両者が接するときと定義するのが自然であるが，２次曲線同士のアライメントは，両者が一致するときと定義するか，両者が接する（一致する場合を含む）ときと定義するか，２通りが考えられる。前者を“強い”アライメントとし，後者を“弱い”アライメントと呼ぶことにする。

定義 3.3（２次曲線のアライメント） (1) **点と２次曲線**：点 P と２次曲線 Q に対して，$P\leftrightarrow Q$ とは P が Q 上の点すなわち $P\in Q$ が成立することと定義する。
(2) **直線と２次曲線**：直線 L と２次曲線 Q に対して，$L\leftrightarrow Q$ とは，直線 L が２次曲線 Q に接することと定義する
(3) **２次曲線同士**：（強い定義）２次曲線 Q_1, Q_2 に対して，$Q_1\leftrightarrow Q_2 \iff Q_1=Q_2$
（弱い定義）２次曲線 Q_1, Q_2 に対して，$Q_1\leftrightarrow Q_2$ とは，Q_1 と Q_2 が接することと定義する

※２次曲線同士のアライメントは，断りがない限り弱い意味とする。

命題 3.4 点，直線または２次曲線 $A,\ B$ に対して，$A \leftrightarrow B \iff \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ が成立する。ただし，２次曲線同士の弱いアライメントでは，接点における接線は原点を通らないと仮定する。

証明 点と直線のアライメントは既に確認済み。２次曲線同士の強い意味のアライメントについては，$A \leftrightarrow B \iff A = B$ なので明らか。２次曲線と，点・直線・２次曲線（弱い意味）のアライメントについて示す。

直線 $L(A, B)$ が２次曲線 $Q(a, b, c, d, e, f)$ に接する必要十分条件は，連立方程式 $Ax+By+1=0,\ ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ が重解を持つことである。A, B の少なくとも一方は 0 でないので，$B \neq 0$ と仮定して y を消去すると，

$$aB^2x^2 + 2bBx(-Ax-1) + c(-Ax-1)^2 + 2dB^2x + 2e(-Ax-1)B + fB^2 = 0$$
$$(aB^2 - 2bAB + cA^2)x^2 + 2(cA - bB + dB^2 - eAB)x + (c - 2eB + fB^2) = 0$$

上式の判別式 D は，

$$D = (cA - bB + dB^2 - eAB)^2 - (aB^2 - 2bAB + cA^2)(c - 2eB + fB^2)$$
$$D/B^2 = (e^2 - cf)A^2 + 2(bf - de)AB + (d^2 - af)B^2 + 2(cd - be)A + 2(ae - bd)B + (b^2 - ac)$$

従って，$D = 0$ が成り立つことと $\bar{L}(A, B)$ が２次曲線 $\bar{Q}(e^2 - cf, bf - de, d^2 - af, cd - be, ae - bd, b^2 - ac)$ 上の点であることは同値である。$A \neq 0$ の場合も同様に，$L \leftrightarrow Q \iff \bar{L} \leftrightarrow \bar{Q}$ が成立する。双対性から，点 P と２次曲線 Q についても，$P \leftrightarrow Q \iff \bar{P} \leftrightarrow \bar{Q}$ が成立する。

２次曲線 Q_1, Q_2 について，Q_1 と Q_2 が接するとき，接点を P，接点における共通接線を L とすると，$Q_1 \leftrightarrow Q_2 \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q_i,\ L \leftrightarrow Q_i\ (i = 1, 2)$ であるから，L に双対が存在するならば，$\bar{Q}_1 \leftrightarrow \bar{Q}_2$ が成立する。□

点・直線・円の集まりからなる図形に対して，それらを指標として重ね合わせることで新たな折り線を構成する方法のうち，円が絡むのは以下の６通りがあり得る。

定義 3.5 (円と折り線のアライメント) P を点，L を直線，C, C_1, C_2 を円とし，F を折り線とする。

AL6. $F(P) \leftrightarrow C$：点 P を円 C に重ねるように折る（図 13）
AL7. $F(L) \leftrightarrow C$：直線 L が円 C に接するように折る（図 14）
AL8. $F \leftrightarrow C$：折り線が円 C に接するように折る（図 15）
AL9. $F(C_1) \leftrightarrow C_2$（強）：円 C_1 を合同な円 C_2 に重ねるように折る（図 16）
AL10. $F(C) \leftrightarrow C$（強）：円 C を自分自身に重ねて，その直径で折る（図 17）
AL11. $F(C_1) \leftrightarrow C_2$（弱）：円 C_1 が円 C_2 に接するように折る（図 18）

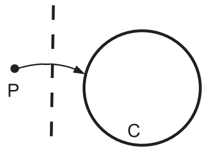

図 13: AL6. $F(P) \leftrightarrow C$

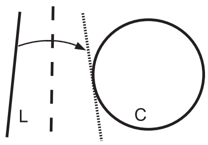

図 14: AL7. $F(L) \leftrightarrow C$

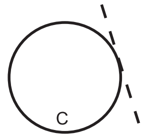

図 15: AL8. $F \leftrightarrow C$

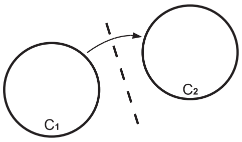

図 16: AL9. $F(C_1) \leftrightarrow C_2$(強)

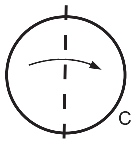

図 17: AL10. $F(C) \leftrightarrow C$(強)

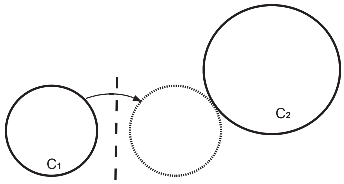

図 18: AL11. $F(C_1) \leftrightarrow C_2$(弱)

注意 3.6 A6〜A11 のうち AL9 以外は全て 1 つの方程式に対応しており，それらの操作で決まる折り線の自由度は 1 である。

コンパスと折り紙の作図において，円はコンパスで描かれているはずなので，全ての円は，中心が既に与えられているという立場に立てば，AL9 は中心点同士のアライメント AL1. $F(P) \leftrightarrow P'$ と同値であり，AL10 も中心を通る折り線 AL5. $F \leftrightarrow P$ と同値となり不要である。

定規とコンパスの古典作図においては，定規とは与えられた 2 点を通る直線を引くという操作のみ許されており，例えば与えられた円に接するように定規を当てて円の接線を引くというような使い方は認められていないことに注意する。

コンパスと折り紙の作図において，円と直線または円と円が「接する」というアライメントを許すかどうか，また全ての円には中心が与えられていると考えるかどうか（中心が未知の円も考察の対象とするかどうか）によって，使える（意味のある）アライメントの種類は表 1 のようになる。

表 1: 作図に有効なアライメント

	強いアライメントのみ	弱いアライメントも許す
円は全て中心が与えられている	AL6	AL6,AL7,AL8,AL11
中心が未知の円も考察する	AL6,AL9,AL10	全て

アライメント AL1〜AL11 の組合せで決まる折り線が，有限個であるような極小の組合せの集まりを全て列挙することで，コンパスと折り紙の作図で可能な折り方が全て求められる。

定義 3.7 (コンパス折り紙の公理) 折り紙の公理 O1〜O7，コンパスの公理 C に，以下に列挙する基本操作を加えたものを**コンパス折り紙の公理**と呼ぶ。

1. 強い意味，円は中心付き

   O8 (AL5+AL6)：点 P_1 を円 C に重ねるように，点 P_2 を通る折り線で折る
   O9 (AL4+AL6)：点 P_1 を直線 L，点 P_2 を円 C に重なるように折る
   O10 (AL3+AL6)：点 P を円 C に重ねるように，直線 L の垂線で折る
   O11 (AL6+AL6)：点 P_1 を円 C_1 に，点 P_2 を円 C_2 に重ねるように折る

2. 弱い意味，円は中心付き

   O12 (AL3+AL7)：直線 L_1 が円 C に接するように，直線 L_2 の垂線で折る
   O13 (AL4+AL7)：点 P を直線 L_1 に重ね，直線 L_2 を円 C に接するように折る
   O14 (AL5+AL7)：直線 L が円 C に接するように，点 P を通る折り線で折る
   O15 (AL6+AL7)：点 P を円 C_1 に重ね，直線 L を円 C_2 に接するように折る
   O16 (AL7+AL7)：直線 L_1, L_2 をそれぞれ円 C_1, C_2 に接するように折る
   O17 (AL3+AL8)：折り線が直線 L の垂線でかつ円 C に接するように折る
   O18 (AL4+AL8)：点 P を直線 L に重なるように，円 C の接線で折る
   O19 (AL5+AL8)：点 P を通る円 C の接線で折る
   O20 (AL6+AL8)：点 P が円 C_1 に重なるように，円 C_2 の接線で折る
   O21 (AL7+AL8)：直線 L が円 C_1 に接するように，円 C_2 の接線で折る
   O22 (AL8+AL8)：円 C_1, C_2 の共通接線で折る
   O23 (AL3+AL11)：円 C_1 が C_2 に接するように，直線 L の垂線で折る
   O24 (AL4+AL11)：点 P を直線 L に重ね，円 C_1 が円 C_2 に接するように折る
   O25 (AL5+AL11)：折り線が点 P を通り，円 C_1 が円 C_2 に接するように折る
   O26 (AL6+AL11)：点 P が円 C_1 に重なり，円 C_2 が円 C_3 に接するように折る
   O27 (AL7+AL11)：直線 L が円 C に接し，円 C_1 が円 C_2 に接するように折る
   O28 (AL8+AL11)：円 C_1 が円 C_2 に接するような，円 C_3 の接線で折る
   O29 (AL11+AL11)：円 C_1 が円 C_2 に接し，円 C_3 が円 C_4 に接するように折る

3. 強い意味，中心未知の円も考慮

   O30 (AL9)：円 C_1 を合同な円 C_2 に重ねて折る
   O31 (AL3+AL10)：直線 L に垂直な，円 C の直径で折る
   O32 (AL4+AL10)：点 P が直線 L に重なるような，円 C の直径で折る
   O33 (AL5+AL10)：点 P を通るような，円 C の直径で折る
   O34 (AL6+AL10)：点 P が円 C_1 に重なるような，円 C_2 の直径で折る
   O35 (AL10+AL10)：２つの円 C_1, C_2 の中心を結ぶ直線で折る

4. 弱い意味，中心未知の円も考慮

   O36 (AL7+AL10)：直線 L が円 C_1 に接するような，円 C_2 の直径で折る
   O37 (AL8+AL10)：円 C_1 に接する，円 C_2 の直径で折る
   O38 (AL10+AL11)：円 C_1 が円 C_2 に接するように，円 C_3 の直径で折る

注意 3.8 カセム-ゴーラビ-井田 [7] では，藤田-羽鳥の公理に，アライメント AL6 のみを付け加えた最も狭い立場でのコンパス折り紙の作図公理 O8〜O10 が提唱されている。なお彼らは，O11 についても言及しているが，２点を同時にそれぞれ円に重ねるという判定は難しいという理由から，これを作図公理には加えていない。さらに，アライメント AL10 を AL6 の特殊な場合と考えており，O31〜O33 を O8〜O10 の特殊ケースとして扱っている。

定理 3.9 点と直線と円の並びから構成される図形の単純折りとして，定義 3.7 に列挙した折り方は，表 1 に示したそれぞれの立場において完全である。

4 円のアライメントと２次曲線の関係

この節では円のアライメント AL6〜AL11 で決まる折り線を解析幾何の立場から考察し，２次曲線との関係について述べる。まず AL7〜AL11 で決まる折り線は，以下のように幾何的に解釈できる。

1. AL7 は，直線 L から円 C の半径だけ離れた平行線を l_1, l_2 と表すと，円の中心 P を直線 l_1 または l_2 に重ねる操作，すなわち（２つの）AL4 と同値である（図 19)。
2. AL8 の折り線は与えられた円の接線である。
3. AL9 の折り線は２つの円の中心の垂直２等分線であり，AL1 と同値である。
4. AL10 は円の中心を通る直線であり，AL5 と同値である。
5. AL11 は２つの円の半径の和を半径とする円 C_2 の同心円を C_3 と表すと，円 C_1 の中心 P を円 C_3 に重ねる操作，すなわち AL6 と同値である（図 20)。

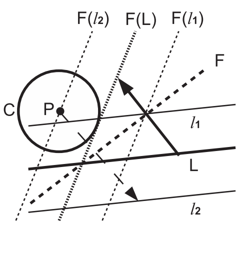

図 19: AL7：$F(P) \leftrightarrow l_1 \cup l_2$

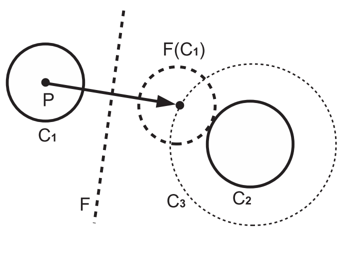

図 20: AL11：$F(P) \leftrightarrow C_3$

4.1　アライメント AL6 と２次曲線

アライメント AL6: $F(P) \leftrightarrow C$ に対して，点 $P(p,q)$，円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，折り線 $F(u,v)$ と座標を入れて，$F(P) \leftrightarrow C$ を書き表すと，

$$\left(\frac{p(v^2-u^2)-2u(1+qv)}{u^2+v^2}-a\right)^2+\left(\frac{q(u^2-v^2)-2v(1+pu)}{u^2+v^2}-b\right)^2-r^2=0 \tag{1}$$

上式 (1) を u,v について整理すると，

$$\{(p+a)^2+(q-b)^2-r^2\}u^2+4(pb+qa)uv+\{(p-a)^2+(q+b)^2-r^2\}v^2+4(p+a)u+4(q+b)v+4=0$$

従って，点 $\bar{F}(u,v)$ は２次曲線

$$Q'((p+a)^2+(q-b)^2-r^2, 2(pb+qa), (p-a)^2+(q+b)^2-r^2, 2(p+a), 2(q+b), 4) \tag{2}$$

上の点，すなわち $F(P) \leftrightarrow C \Leftrightarrow \bar{F} \leftrightarrow Q'$ が成立する。従って，AL6 で決まる折り線 F は，Q' の双対２次曲線 $Q=\bar{Q}'$ （楕円または双曲線）の接線である。実際，次の命題が知られており，円 C は２次曲線 Q の**宙円**と呼ばれている（飯島 [6] 参照）。

命題 4.1 平面上に，中心 O，半径 R の円 C と，円周上にない点 P が与えられているとする。点 P を円 C に重ねるように折った折り線 F は，円の中心 O と点 P を２つの焦点とする次の２次曲線 Q の接線である（Q 上の点を X とする）。
(1) 点 P が円 C の内部にある場合：$OX+PX=R$ で決まる楕円（図 21）。
(2) 点 P が円 C の外部にある場合：$|OX-PX|=R$ で決まる双曲線（図 22）。

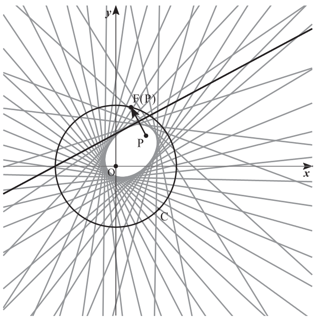

図 21: 折り紙による楕円

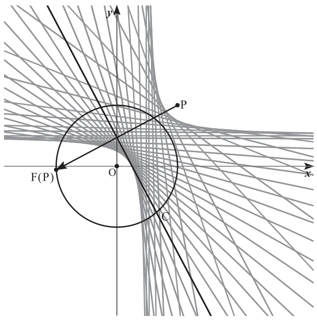

図 22: 折り紙による双曲線

命題 4.1 は，$F(P) \leftrightarrow C \Leftrightarrow F \leftrightarrow Q$ と表される。

アライメント AL4: $F(P) \leftrightarrow L$ で決まる折り線 F は，P を焦点とし，L を準線とする放物線の接線として特徴付けられることはよく知られている（[2, 6, 4] 等参照）。以上より，アライメント AL8，AL4（AL7），AL6（AL11）で決まる折り線は，それぞれ，円，放物線，楕円または双曲線の接線として特徴付けられる。

例 4.2 以下で P, P_i は与えられた点，L, L_i は与えられた直線，C, C_i は与えられた円，F はアライメントで決まる折り線を表す。

1. O8 : $F(P_1) \leftrightarrow C,\ F \leftrightarrow P_2$
   P_1 を焦点とし，C を宙円 とする 2 次曲線を Q とすると，O8 で決まる折り線 F は，点 P_2 を通る 2 次曲線 Q の接線である（図 23）。
2. O9 : $F(P_1) \leftrightarrow C,\ F(P_2) \leftrightarrow L$
   P_1 を焦点とし，C を宙円とする 2 次曲線を Q_1，P_2 を焦点とし，L を準線とする放物線を Q_2 とすると，O9 で決まる折り線 F は，Q_1, Q_2 の共通接線である（図 24）。
3. O12 : $F(L_1) \leftrightarrow C,\ F(L_2) \leftrightarrow L_2$
   直線 L_1 から円 C の半径だけ離れた 2 本の平行線 l_1, l_2 を準線とし，円 C の中心 P を焦点とする放物線をそれぞれ Q_1, Q_2 とすると，O12 で決まる折り線 F は，L_2 に垂直な方向の，放物線 Q_1 または Q_2 の接線である（図 25）。
4. O20 : $F(P_1) \leftrightarrow C_1,\ F \leftrightarrow C_2$
   P_1 を焦点とし，C_1 を宙円とする 2 次曲線を Q とすると，O20 で決まる折り線 F は，2 次曲線 Q と円 C_2 の共通接線である（図 26）。

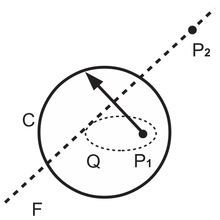

図 23: O8：P_2 を通る Q の接線

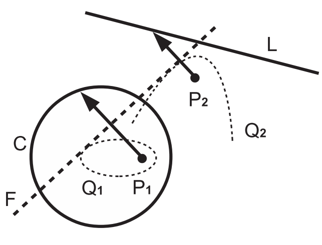

図 24: O9：Q_1, Q_2 の共通接線

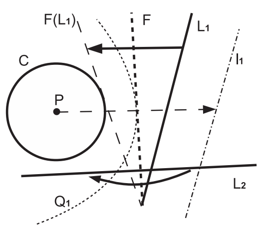

図 25: O12：L_2 に直交する Q_1 の接線

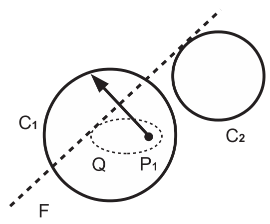

図 26: O20：Q, C_2 の共通接線

注意 4.3 以上の考察により，作図公理 O1〜O38 は，代数的には高々 4 次の方程式を解くことに相当していることがわかる。しかし，コンパスを使わない折り紙作図（藤田-羽鳥の公理 O1

〜O7）だけでも，一般の４次方程式を解くことができる（[4, 9] など）ことから，折り紙作図にコンパスを加えても，作図可能な数の範囲は増えないことがわかる。折り紙作図で可能な数の範囲は，高々３次の方程式の解を取る操作で閉じた有理数体 $\mathbb{Q}$ の最小拡大体で，ヴィエトの体 $\mathbb{V}$ と呼ばれている（[9, Theorem 10.14] 参照）。

4.2　応用：４次方程式の解法

この小節では，コンパス折り紙の作図公理 O9（図 24）によって，与えられた４次方程式を解く方法 [10, 定理 3.6] を紹介する。この結果は，エドワーズとシュルマン [3] の結果を一般化したもので，[10] では２通りの複雑な計算を伴う証明を付けているが，ここでは２次曲線の双対性を利用した易しい別証を与える。

定理 4.4　４次方程式 $t^4+\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta=0$ $(4\beta\delta-\alpha^2\delta-\gamma^2\neq 0)$ に対して，$D:=\alpha^2/4-\beta+\delta$ として，実数 a,b,r を以下のように置き（b の符号は，γ と異符号に取る），座標平面に点 $P_1(-a,-b)$, $P_2:(-\alpha/2,-1)$, 直線 $L:y=1$, 円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を作図する。

$$a=\sqrt{\frac{D+\sqrt{D^2+\gamma^2}}{2}},\ b=\pm\sqrt{\frac{-D+\sqrt{D^2+\gamma^2}}{2}},\ r=\sqrt{2(D-2\delta+\sqrt{D^2+\gamma^2})}$$

作図公理 O9 によって，点 P_1 を円 C に重ねると同時に，点 P_2 を直線 L に重ねるように折った時，与えられた４次方程式の解は折り線の傾きとして得られる。

証明　点 $P_2(m,-1)$ を焦点とし，直線 $L:y=1$ を準線とする放物線 $Q_1:4y=-(x-m)^2$ を考える。放物線 Q_1 上の傾き t の接線 F の方程式は，$F(-\frac{1}{t-m},\frac{1}{t(t-m)})$ で与えられる。

一方，点 $P_1(p,q)$ を焦点とし，円 $C(1,0,1,-a,-b,a^2+b^2-r^2)$ を宙円とする２次曲線 Q（命題 4.1 参照）の双対 $\bar{Q}$ は式 (2) で与えられるが，式を簡単にするために $p=-a,q=-b$ とおいて１次の項を消した $\bar{Q}(4b^2-r^2,-4ab,4a^2-r^2,0,0,4)$ を考える。直線 F が，２次曲線 Q と放物線 Q_1 の共通接線であるためには，$\bar{F}\leftrightarrow\bar{Q}$ すなわち，

$$(4b^2-r^2)\frac{1}{(t-m)^2}-8ab\frac{1}{t(t-m)^2}+(4a^2-r^2)\frac{1}{t^2(t-m)^2}+4=0$$

が成り立つことが必要十分である。上式を t について整理して，

$$t^4-2mt^3+(m^2+b^2-\frac{r^2}{4})t^2-2abt+(a^2-\frac{r^2}{4})=0$$

従って，与えられた４次方程式 $t^4+\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta=0$ に対して，

$$\alpha=-2m,\ \beta=m^2+b^2-\frac{r^2}{4},\ \gamma=-2ab,\ \delta=a^2-\frac{r^2}{4}$$

を満たす a,b,r,m を選ぶことで，折り線 F の傾き t は，与えられた４次方程式の解になる。ここで，$m=-\alpha/2$ であり，$a^2-b^2=D:=\alpha^2/4-\beta+\delta,\ -a^2b^2=-\gamma^2/4$ であるから，$a^2,-b^2$ は２次方程式 $\xi^2-D\xi-\gamma^2/4=0$ の解として求められる。□

参考文献

[1] R. C. Alperin and R. J. Lang, One-, Two- and Multi-fold Origami Axioms, 4OSME: The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, Pasadena 2006.

[2] エリック・D・ドメイン＆ジョセフ・オルーク，上原隆平訳，幾何的な折りアルゴリズム，近代科学社 2009.

[3] B. C. Edwards and J. Shurman, Folding quartic roots, Mathematics Magazine **74**(1) (2001), p.19–25.

[4] ロベルト・ゲレトシュレーガー，深川英俊訳，折紙の数学，森北出版 2002.

[5] H. Huzita, Axiomatic Development of Origami Geometry, Proc. of the First International Meeting of Origami Science and Technology, Italy, Ferrara (1989), pp.143-158.

[6] 飯島忠，２次曲線の接線と２次曲線の焦点の性質，日本数学教育学会誌 **70**(9) (1988), p.38–45.

[7] A. Kasem, F. Ghourabi, T. Ida, Origami axioms and circle extension, SAC'11 March 21-25 (2011), TaiChung, Taiwan, p.1106–1111.

[8] R. J. Lang, Origami Approximate Geometric Constructions, in Tribute to a Mathemagician, B. Cipra, E. D. Demaine, M. L. Demaine and T. Rodgers, eds, A K Peters 2004.

[9] G. E. Martin, Geometric Constructions, Springer-Verlag 1998.

[10] 西村保三，コンパスと折紙による４次方程式の解法，日本数学教育学会 高専・大学部会論文誌 **19**(1) (2012), p.1–10.