

音を題材とする数学の公開講座： H28体験ふむふむ数学クラブ「音の数理」の実践報告

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2018-06-29 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 西村, 保三, 土田, 恵里, 松本, 智恵子, 間庭, 彰郎, 田嶋, 祥大, 竹内, 俊力 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10098/10455

音を題材とする数学の公開講座 — H28体験ふむふむ数学クラブ「音の数理」の実践報告 —

福井大学教育学部 西 村 保 三
福井県立丹生高等学校 土 田 恵 里
福井大学教育学部 松 本 智恵子
福井大学大学院教育学研究科 間 庭 彰 郎
福井大学大学院教育学研究科 田 嶋 祥 大
鯖江市中央中学校 竹 内 俊 力

本稿は、福井大学公開講座「体験ふむふむ数学クラブ」の実践報告である。この公開講座では、一般の社会人や中高生を対象に、グループによる体験的活動を通して、数学を楽しみながら学んでもらうこと、及びそれを実現するカリキュラムを開発することを目的としている。本稿では、平成28年度に実施した、音を題材とする数学の公開講座の事例を報告して、音律の数理とフーリエ解析の教材化について考察する。

キーワード：数学教育、音、音律、フーリエ解析

1. はじめに

福井大学教育学部数学教室では、平成19年度から「体験ふむふむ数学クラブ」という公開講座を実施している。この公開講座の狙いは、一般の社会人や中高生を対象に、体験的なグループ学習によって数学を楽しんで学び、参加者の数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学が社会のさまざまな場面において果たす役割を理解してもらうことである。またそれを実現するカリキュラムを開発することも目的としている（西村他、2015）。平成26年度から、本公開講座は、福井大学の教員と大学院生が協働で運営を行う形で実施している。本稿では、平成28年度に実施した音を題材とする数学の公開講座「音の数理」の実践事例を報告する。

音楽と数学の関係は古代ギリシアにまで遡る。ドレミファソラシの7音と黒鍵5音の12音からなる音律を最初に考案したのは、「三平方の定理」で有名なピタゴラス（BC582～BC496）とされている（小方、2007）。ピタゴラスが考案したピタゴラス音律は、3倍音を重ねることでも得られるが、これに5倍音を組み合わせると単純な整数比で和音が得られるようにしたものが純正律である。現在、純正律とされているものは、プトレマイオス（AD83～168）によるものと同じである。今日、一般的に使用されている平均律は、転調が容易になるように公比 $2^{1/12}=1.05946\cdots$ の等比数列によって音階を定めており、ここに指数関数 $y=a^x$ が現れる。

音は空気の振動が波として伝わる物理現象であるが、最も単純な振動は単振動と呼ばれる、時刻 t の三角関数 $y=A\cos(\omega t + \theta)$ で表される振動である。同じ高さの音

でも、楽器によって音色が異なるのは、振動の波形が違うためである。管楽器や弦楽器では、基本的な音に対して、その2倍音・3倍音・4倍音…が含まれており、波形の違いは、 n 倍音の組成の違いともいえる。一般の振動を、単振動の和に分解する操作が、フーリエ変換である。フーリエ変換は、音声・振動・光の分析や情報の圧縮技術など、多くの分野で応用されており、理工系では必須の道具である（大石、1989）。

本講座では、ICTを活用して、体験的なグループ活動を取り入れた学習によって、音が振動であることを理解し、振動を解析するフーリエ変換の意味を、小学生を含む一般の参加者にわかりやすく伝えることを目標とする。

2. 授業実践

本講座は、平成28年11月12日に、福井大学で実施したもので、テキストの作成から講座の進行までを土田が中心になって務めた。本講座は、「体験的なグループ活動で数学を楽しく学ぶ」ことを謳っており、参加者を3～5名の班に分け、講師5人がファシリテーターとして各班の活動を支援する形式で行った。講習時間は途中1回の休憩を入れて3時間である。

本講座で作成した配布テキストの講習内容は以下の通りである。

- (1) 音 ♪
- (2) 音を見てみよう
- (3) 紙笛を作ろう
- (4) 音の性質

(5) フーリエ変換

2.1. 音

始めに、ピアノの鍵盤の画像を見せて、白鍵のドレミファソラシと黒鍵のド $\sharp$ ・レ $\sharp$ ・ファ $\sharp$ ・ソ $\sharp$ ・ラ $\sharp$ からなる12音を、実際に音を鳴らして確認した。この際、楽器はキーボードを使用し、それを弾くところを実物投影機でスクリーンに映して示した(図1)。音は空気の振動であり、振幅(振動幅)が大きいほど大きな音になり、周波数(1秒間に振動する回数)が大きいほど、高い音になることを説明した。また、音が1オクターブ高くなると、周波数は2倍になることも了解事項とした。



図1. 音の実演

次に、3種の音律(ピタゴラス音律・純正律・平均律)について簡単に説明した。ピタゴラス音律は、ピタゴラスによって考案されたといわれる12音階である。ドの2倍音は、1オクターブ上のドであるが、ドの3倍音として1オクターブ上のソを得る。すなわちソはドの3:2の周波数比(完全5度)の音であり、この2つの音を一緒に鳴らすと良く協和する。さらにソの3倍音としてレが得られ、3倍音を続けて、ド→ソ→レ→ラ→ミ→シ→ファ $\sharp$ の順に音が作られる。最初の5つは「ヨナ抜き5音階」であり、ここまでの7つで、ファが半音上がっているが、ドレミファ $\sharp$ ソラシの7音が出揃う。ファを半音上げる旋法は「リディアン」と呼ばれ、ピタゴラス時代の音階は、これが主流だった可能性もある。またこれは、ト長調のドレミファソラシでもある。ファ $\sharp$ から、3倍音をさらに作り続けると、ファ $\sharp$ →ド $\sharp$ →ソ $\sharp$ →レ $\sharp$ →ラ $\sharp$ →ファの順に12音が出揃い、 $3^{12}/2^{19}=1.013\cdots$ なので、次にほぼ元のドに戻る。以上のプロセスで作られた音の周波数比は、表1ようになる(下段は黒鍵)。

表1. ピタゴラス音律

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$		$\frac{729}{512}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	

ピタゴラス音律は、3倍音のみによって構成されており、例えばドとミの周波数比は81:64と分母の大きい分数比となるので協和度はよくない。ここで $81:64 \approx 5:4$ であることに注目し、5倍音によって幾つかの音を比較的簡単な整数比に置き換えたのが純正律である(表2: 黒鍵部分は一例)。純正律では、例えば、ドミソを一緒に鳴らすと、周波数比が4:5:6という簡単な整数比になるので、協和度の高い和音になる。

表2. 純正律

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
	$\frac{16}{15}$	$\frac{6}{5}$		$\frac{25}{18}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	

平均律は、隣接する音の周波数比を一定に、 $2^{1/12}=1.059\cdots$ 倍にした音階である(表3)。2音の周波数比は無理数なので、純正律と異なり2つの音が完全に協和することはないが、どの音の間隔も均等で、自由な転調が可能である。ピアノが大量生産されるようになったことで、広く普及するようになったとされている。

表3. 平均律

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
1	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2
	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$		$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	

以上の説明は、実際にキーボードを鳴らして、例えばドとソがよく協和することを確認しながら進めていった。またこの後で、実際に、純正律と平均律の音階を聞き比べる活動を行った。これには、数学ソフトウェアのGrapesのサンプルファイル「純正律と平均律.gps」(図2)を用いた(友田, 2010)。各班に1台ずつ用意したノートパソコンを使って、ファシリテーターがパソコンを操

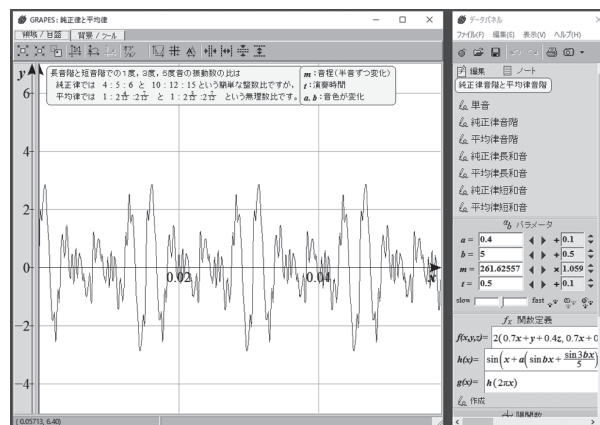


図2. Grapesによる純正律と平均律

作して純正律と平均律の音を鳴らして、何度も聴き比べを行った。実際に聴いてみても、音楽の素人には違いはわからないが、和音を聴き比べると、平均律ではわずかな周波数のずれが「うなり」として聞こえるので、何度も聴き比べて確認してもらった。

2.2. 音を見てみよう

ここでは、音が空気の振動現象であることを説明して、単振動をグラフで表して、音を視覚的に捉えることを目標とする。初めに、回転する観覧車の高さを例に挙げて、単振動の式

$$y = A \cos(\omega t + \theta) \quad (1)$$

とそのグラフを Grapes によって説明した(図3)。ここで、 A は振幅、 $\omega = 2\pi f$ は角周波数、 θ は初期位相と呼ばれる定数である。また $f = \omega/2\pi$ は1秒間に振動する回数(周波数)で単位は Hz (ヘルツ)、 $T = 1/f$ は周期である。なお、音は疎密波であるため、縦軸の y は振動する長さではなく、空気圧の大きさを表している。

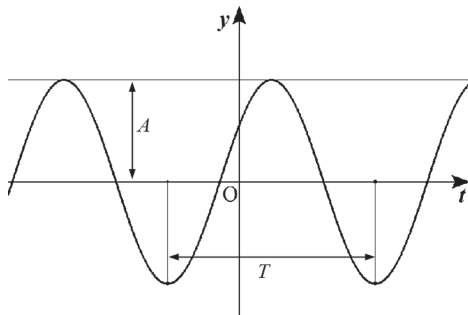


図3. 単振動のグラフ

Grapes を使って、 A, f, θ を変えたときのグラフの変化を視覚的に示すとともに、それぞれの音を鳴らして、音の違いを確かめた。

- ・ A を大きくすると、グラフは上下に拡大され、音が大きくなる。
- ・ f を大きくすると、グラフは左右に縮小され、音が高くなる。
- ・ θ を変えると、グラフは左右に平行移動され、音は変化しない。

ピアノでは、49 番目の鍵盤のラ (a) の音が、440Hz と決められており、隣のシの音は $440 \times 2^{1/6} = 493.9\text{Hz}$ となる (表4)。

表4. 平均律音階の周波数

ド	261.6
レ	293.7
ミ	329.2
ファ	349.2
ソ	392.0
ラ	440.0
シ	493.9
ド	523.3

2.3. 紙笛を作ろう

次に、これまでに説明した音律の話を中心に、紙工作で笛を作って鳴らす活動を行った。紙笛は、紙筒にストローをセロテープで取り付けた簡単なものだが、作業時間を短縮するために、工作用紙を幅7cmの長方形に切り、端から2cmのところに1cm四方の穴を開け、一端に両面テープを貼ったキット(図4)を事前に作っておいた。本講座ではこのキットを適当な長さ l [cm] に切って、両面テープで一端を貼り合わせて丸い筒を作り、ストローを短く切ったものを、セロテープで固定するだけで作れるようにした(図5)。

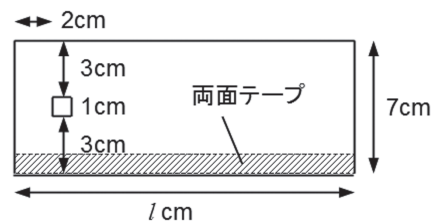


図4. 紙笛キット

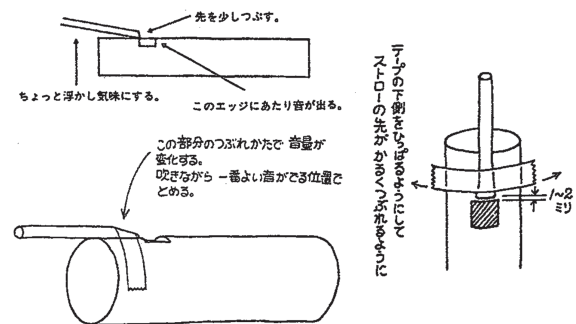


図5. 紙笛の作り方(繫下, 1987)

この笛は、一つの音しか出ないので、最初にする音を決めて、その音に合わせた長さの筒を作るものとする。低い方のドの音を出す筒の長さを16.5cmと決めて、表1~4の周波数比によって、各自の作りたい音を出す筒の長さを計算してもらった。当初は平均律で1つ音階が上がる度に筒の長さが $2^{-1/12} = 0.9439$ 倍となることを元に筒の長さ l を計算することを想定していたが、4桁の掛け算が必要で複雑なので、表2の純正律を使って、例えばソの音はドの $3/2$ 倍の周波数として、 $l = 16.5 \times 2/3 = 11\text{cm}$ と計算した方がよかった。なお、この笛の音は、半波長 $\lambda/2$ が11cmの音より、音速 $v = f\lambda = 340\text{m/s}$ として、周波数は $f = 340/0.22 = 1550\text{Hz}$ となる(表4のソよりほぼ2オクターブ高い)。この作業では、筒の長さの計算方法や、笛の作り方などを、各班のファシリテーターが支援した。余裕があれば、グループで簡単な曲を合奏することも予定していたが、今回の公開講座では、班の人数も少ないため、曲を演奏するところまではいかなかった。

2.4. 音の性質

笛作りが一段落した後で、「倍音」「うなり」「音色」について説明を行った。弦楽器や管楽器では、基本となる音の周波数の整数倍の周波数の音が含まれており、これを倍音と呼ぶ(図6)。既にピタゴラス音律のところで、2倍音、3倍音の説明は行っているが、参加者からも、なぜ笛の長さが音の周波数に反比例するのか?という質問があったので、これに答える形で、笛に共鳴する固有周波数として、倍音の説明を行った。なお、図6は弦の振動など固定端の場合を表しており、笛(開管)の場合は、定常波の腹が両端となる。 n 倍音の波長 λ は、筒の長さ l に対して $l=n\lambda/2$ で表される。

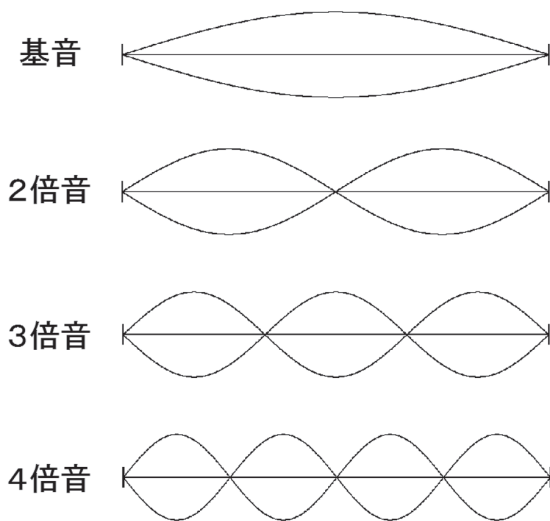


図6. 倍音

「うなり」についても、純正律と平均律の聴き比べで既に言葉が出ているが、それがどのような波の現象なのかを説明した。ここでも、Grapesのサンプルファイル「音のうなりと単振動の合成.gps」を使って、うなりをグラフによって視覚的に示すとともに、音を鳴らして、「ワウワウ」と聞こえる様子を確認した。

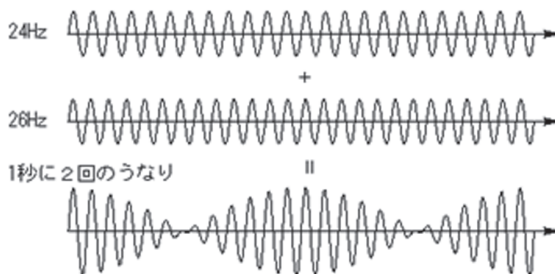


図7. うなり

ピアノや笛など、同じ高さの音でも、楽器によって音色が異なるが、それは音の波形の違いであり、またどの周波数の音がどれだけ含まれているかの違いでもある。

そこで、波形のグラフを見て、楽器を当てるクイズを出した(図8)。

問題. 次の音の波形を下のグラフから選んでみよう。

1. 音叉 2. バイオリン 3. ギター

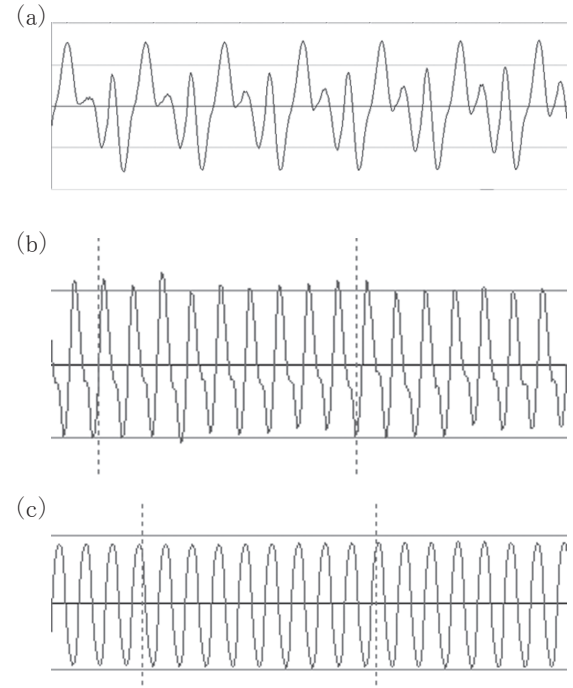


図8. 波形当てクイズ

この問題では、単音の音叉(c)と、比較的単純な波形のギター(b)、複雑な波形のバイオリン(a)が、波形からわかりやすいように選んだが、「音叉」を知らないという小学生の参加者がいたことから、急遽、どのような楽器かをタブレットPCで示したが、写真だけではイメージが十分わかなかったようで、他の楽器も含めて、事前に実物を用意すべきだった。

2.5. フーリエ変換

音色の説明に続けて、波形の違いは、倍音の構成(周波数分布)の違いであることを説明した(図9)。ただし、講座ではフーリエ級数に関する定理1の数式は説明せず、参考として配布テキストに示すだけに留めた。

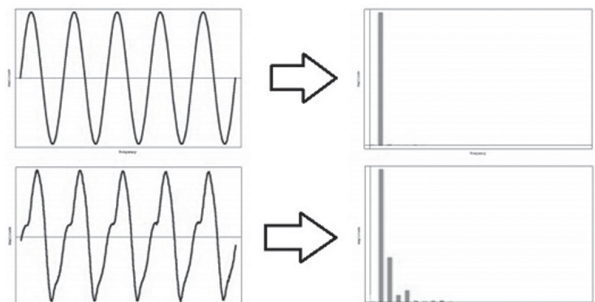


図9. 音叉とギターの周波数分布図

定理1. (フーリエ級数).

周期 $T=2\pi/\omega$ の連続な周期関数 $f(t)$ は n 倍の周波数を持った単振動の無限級数で表せる。

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \theta_n) \quad (2)$$

ここで, A_n と θ_n は次式で与えられる (i は虚数単位)。

$$A_n e^{i\theta_n} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \geq 1), \quad A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad \theta_0 = 0$$

A_n と θ_n は, (パワー) スペクトル, 位相スペクトルと呼ばれる。

なお, フーリエ解析の教科書では, フーリエ級数の式 (2) は,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\}$$

と書かれていることが多いが, 本講座では, この式を三角関数の合成公式で $\cos$ にまとめて, 単振動の式 (1) と対比できるようにした。またフーリエ変換の式に, 虚数単位の係数が現れないように, 単振動の式は, $\sin$ ではなく $\cos$ で表した。

例. のこぎり波 $f(t) = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} + \left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor \right)$ のフーリエ級数は,

$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right)$ と表される (図 10: 図は項数 6, 8, 60 までの部分和のグラフを表す)。

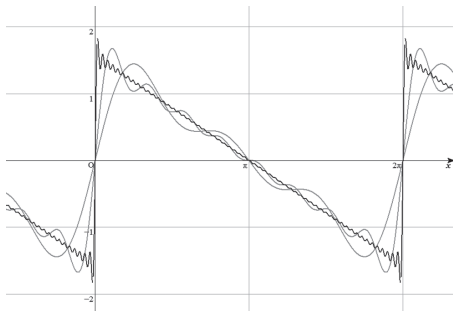


図10. のこぎり波のフーリエ展開

フーリエ級数が収束していく様子を, Grapes のサンプルファイル「フーリエ展開 .gps」(図 10) で視覚的に見せるとともに, 対応する音を「音と音色 .gps」によって鳴らして確認した。

周期関数とは限らない一般の関数について, どの周波数の波がどれくらい入っているかを調べるのに用いるのがフーリエ変換である。ここでも, フーリエ積分の式は, 参考として配布テキストに示すに留め, フーリエ解析の教科書で一般的な複素数表示ではなく, (1) (2) と対比しやすい単振動の式の形で示した (定理2)。

定理2. (フーリエ積分).

絶対可積分 ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$) な連続関数 $f(t)$ は単振動の積分で表せる。

$$f(t) = \int_0^{\infty} A_{\omega} \cos(\omega t + \theta_{\omega}) d\omega \quad (3)$$

ここで, A_{ω} と θ_{ω} は次式で与えられる (i は虚数単位)。

$$A_{\omega} e^{i\theta_{\omega}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

次に, 様々な実際の音を, フリーソフト Sound Engine Free(コードリウム, 2012)を使って, 音の波形を見たり, フーリエ変換を行って周波数分布を調べる活動を行った (図 11)。

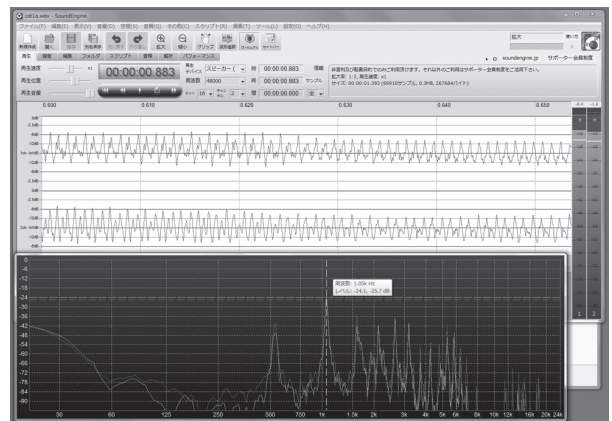


図11. Sound Engine Free

始めに, ギターの音やピアノの音の Wave ファイルを読み込んで, 波形と周波数分布を観察して, 図9のように倍音が現れていることを確認する操作を例示することで, ソフトウェアの使い方を説明した。その後は, 各班に用意したノートパソコンを使って, あらかじめインターネットなどからダウンロードしておいた色々な音声や, その場で録音した自由な音の波形を観察したり, 周波数分布を調べる活動を行った。特に, 先ほどの課題で作った紙笛の音の分析をしてもらった。パソコンの操作は, 各班のファシリテーターが支援したが, 小学生を含む参加者の多くは, すぐに使い方を覚えて, 各自で自由に様々な音を分析して楽しんでいた (図 12)。



図12. パソコンによる音の分析

最後に、フーリエ解析は、音声分析だけでなく分光分析や地震波の解析、音声や画像の圧縮技術など、様々な分野で応用されていることを説明して、公開講座のまとめとした。

3. アンケート

福井大学COC推進室が実施したアンケート結果を図13,14に示す。アンケートに回答したのは、参加者15名のうち14名である。参加者の内訳を図13に示す。小学校高学年と70歳以上が3割で、他は20～60代の一般の成人であった。今回の講座では、事前に独自の案内チラシを作成して、県内の小中学校や、福井大学来てみてフェアで開催した「数学で遊ぼう!」で配布したこともあり、小学生の参加者を一定数集めることができた。

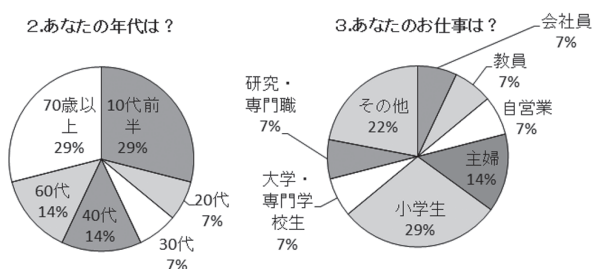


図13. アンケート質問：年代と仕事

講座の内容について、難易度と満足度を質問した結果を図14に示す。難易度については57%の人が、「やや難しい」か「難しい」と答えている。一方、満足度でも、64%の人が「満足」または「大変満足」と答えており、難しかったが満足したという傾向が読み取れる。一方で、難易度について「ちょうどよかった」と答えた人が43%もいたことで、フーリエ解析という高度な内容を、小学生を含む一般の参加者にわかりやすく伝えるという今回の目標は、十分達成できたと考えている。

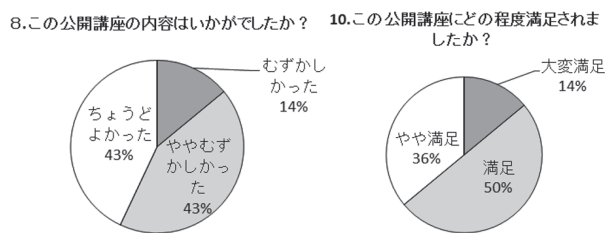


図14. アンケート質問：難易度と満足度

<自由記述>

- ・数式にはふれませんでした、(フーリエ変換は)見た所、難しい式に見えた。その他は、やさしく説明していただき、わかりやすく理解できました。(60代・主婦)
- ・音に関するものは初めてでした。とても面白かったです。(70歳以上・主婦)
- ・音楽の内容にも数学が入っている。分析できることを知りました。パソコンでの解析で(音が)目に見える

ことは驚きでした。(60代・会社員)

・録音するのが楽しかった。(10代・小学生)

・わからない式ができたから(難しかった)。(10代・小学生)

自由記述からも、パソコンで録音した音の波形を見たり、解析する活動に参加者が興味をもって取り組めた様子が伺える。フーリエ変換の数式は講座では扱わずに、「参考」として配布テキストに掲載するだけに留めていたが、わからない数式がテキストに書かれているだけでも、講座内容自体を「難しい」と評価する参加者がいることもわかった。

4. まとめ

今回は、音を題材とした数学の公開講座を行った。講座で取り上げた内容は、音律の数理(ピタゴラス音律・純正律・平均律)とフーリエ変換である。同様の授業実践は、馬場(2012)でも報告されているが、そちらは大学の授業ということもあり、音楽の専門知識を盛り込み、数学的にも高度な内容となっている。本実践では、音楽には深入りせずに、また数学の内容も、一般向けというスタンスを心掛けた。前半、音律の数理は、高校の数学活用の教科書(根上, 2012)でも扱われており、中学～高校でも幾つか先行実践がある。紙笛の工作活動を取り入れた授業実践は、伊禮(2007)を参考にしたが、工作自体には数学の要素はないので、本講座では、キットを用意して工作を簡略化し、作った笛の音をパソコンで解析する活動を数学的活動として位置づけた。後半のフーリエ変換は、理工系の大学以上で学ぶ高度な内容であるが、本講座では、フーリエ変換の意味を、小学生を含む一般の参加者にわかりやすく伝える授業の開発を目標とした。フーリエ変換を数式で厳密に説明するには、三角関数の微積分が必要なため、最低でも高校数学の知識が必要である(竹内, 2009)。本講座では、渋谷(2006)の解説を踏襲して、数式を表に出さずに、音声解析ソフトを使用することで、フーリエ変換をブラックボックスとして扱って、実際の音をパソコンで分析する活動を通して、フーリエ変換を体験的に学べる講習を目指した。

参加者のアンケート結果から、講座の満足度は高く評価されており、また「録音するのが楽しかった」「パソコンによって音が目に見えるのが驚きでした」という自由記述からも、フーリエ変換を体験的活動によって楽しく学ぶという本講座の目標は、十分達成できたと考える。

引用文献

- 西村保三, 堀弘樹, 前川友樹, 桑原佑輔, 松本智恵子(2015), 体験的活動で学ぶ公開講座のための数学教材開発—H26 体験ふむふむ数学クラブの実践より—, 福井大学教育実践研究 40, pp.7-15.
- 小方厚(2007), 音律と音階の科学, 講談社.

大石進一 (1989), フーリエ解析, 岩波書店.

友田勝久 (2010), GRAPES 事例集.

繁下和雄 (1987), 紙でつくる楽器, 創和出版.

コードリウム (2012), Sound Engine Free, <http://soundengine.jp/>

馬場良始 (2012), ピタゴラス音律ー小学校専門科目「数学」での実践ー, 数学教育研究 41, 大阪教育大学数学教室, pp.71-94.

根上生也 (2012), 数学活用, 啓林館, pp.78-81.

伊禮三之 (2007), 事例研究: 音楽と数学ー有用性の実感を促す数学的問題解決の図式による授業ー, 数学教育論文発表会論文集 40, pp.139-144.

竹内淳 (2009), 高校数学でわかるフーリエ変換, 講談社.

渋谷道雄 (2006), マンガでわかるフーリエ解析, オーム社.

An extension lecture of mathematics based on sound, the report of “Mathematics of sound” Fumufumu H28

Yasuzo NISHIMURA, Eri TSUCHIDA, Chieko MATSUMOTO, Akio MANIWA, Shota TAJIMA, Toshichika TAKEUCHI

Keywords : mathematical education, sound, temperament, Fourier analysis

