

小学校第6学年における 投影図の描画と読み取りに関する空間認知能力

五十嵐 彩香^{*1} 藤川 洋平^{*2} 西村 保三^{*3} 口分田 政史^{*3}

(2021年9月30日 受付)

概要：学校数学において、空間を捉える力の重要性は以前から指摘されているものの、空間認知能力の育成に関わる学習内容は貧弱である。そこで本研究では、投影図の描画と読み取りに関する調査を行った。その結果、小学校第6学年の空間認知能力の実態が明らかとなり、小中連携を意識した投影図に関する教育への示唆が得られた。

キーワード：空間認知能力，見取図，投影図，小学校

1. 問題と目的

空間認知能力について

人間は空間の中で生活しており、空間認知能力は生きていく上で重要な能力の一つである。認知とは、単なる感覚・知覚ではなく、それを基礎としながらも、対象を意味的・概念的に捉えることである（勝井，1995）。空間認知は研究者によって様々な解釈が存在するものの、広義には「人間の認知的諸能力の中で一定の領域を占めるものであり、必ずしも課題に空間的ないし視覚的な刺激を含まなくても問題解決過程において視空間的な方略が用いられるときには関与する能力であって、空間関係や視覚化などの下位能力にさらに分類することが可能なものである」と定義される（竹内，1995）。近年、スマートフォンやタブレットの使用者の低年齢化に伴って、遊びの平面化が指摘されており、空間認知能力の育成が課題となっている（秦野，2012）。加えて現在GIGAスクール構想に向けた教育改革が進められており、児童生徒1人1台端末の実現が目指されている。これにより学習者用のデジタル教科書がさらに普及することが予想される。例えば小学校第2学年における立体図形の学習では、デジタル教科書を用いることで、タブレット端末の画

^{*1}福井大学大学院福井大学・奈良女子大学・岐阜聖徳学園大学連合教職開発研究科 教職開発専攻

^{*2}福井大学教育学部附属義務教育学校

^{*3}福井大学教育・人文社会系部門教員養成領域

面上の立体図形を操作することが可能となる。端末の画面上で、立体図形の構成要素である面や辺、頂点について学習を進めることが可能となるのである（清水など, 2020）。このように遊びだけでなく、学びの平面化は今後さらに進む可能性がある。これらが空間認知能力の発達にどのような影響を与えるのかは重要な研究課題である。そこで本研究では、幅広い構成概念である空間認知能力の中でも、とりわけ3次元と2次元の関係を捉える能力に焦点を当てて検討する。

見取図に関する教育の現状と課題

小学校段階において3次元空間にある立体図形を2次元平面へ変換することに明示的な焦点が当てられた学習内容に、第4学年の見取図がある。しかし見取図を描く手順や技能に指導の重点が置かれており、2次元と3次元の関係を捉える能力の育成が十分に意識された学習内容とは言えない。実際にH26年度全国学力・学習状況調査の算数Aでは、直方体の見取図から底面の形を選択する問題が出題されているが、正答率は69.6%であり理解が十分とは言えないのが実情である（Figure1-1）。また直方体の底面の形は長方形であるが、見取図として描かれた形である平行四辺形と混同した誤答率は25.3%であった。こうした現状に対し黒田（2007）は、「2次元と3次元の関係を正確に捉える能力は、個々の学習者の努力と経験に委ねられてきた」と問題点を指摘した上で、2次元と3次元の関係を捉えるための学習カリキュラムを構築する必要性を指摘している。また鈴木（1994）は「子どもが手にしている彼らなりの合理的な対象のとらえ方を、幾何に関わる原理・法則として捉え返す視点が欠如している」と学習者の空間認知能力の実態に見合った教育が重要であることを指摘している。

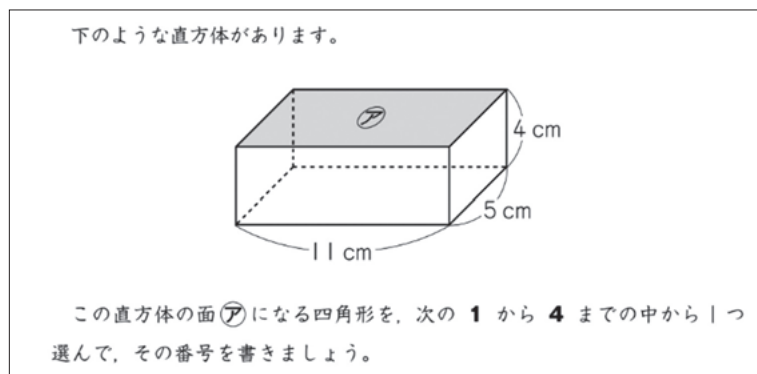


Figure1-1 H26年度全国学力・学習状況調査 算数A7の調査問題

見取図の定義について

検定教科書において見取図とは「直方体や立方体などの全体の形がわかるようにかいた図」や「形全体のようなすがひと目でわかるようにかいた図」と説明されている（清水など, 2020; 一松など, 2020）。このように見取図は立体図形を立体図形らしく平面上に表した見かけの図として扱われ、数学としての意味付けや条件は特になく、日常生活の中で習慣化されてきた表し方である（志田, 2000）。しかし、3次元に存在する立体図形を2次元平面に変換する原理はいくつか存在する。そこで、これらの原理を投影法の観点から整理したい。まず3次元に存在する立体図形を2次元平面に変換した図を総称して投影図という。この投影図を得る方法は投影法と呼ばれ、平行光線を用いて投影する平行投影と、放射光線を用いて投影する中心投影に分類できる。平行光線は、平行関係が保たれるのに対し、中心投影は平行関係が保たれず、手前の対象物より奥の対象物が小さく投影される特徴がある。平行投影はさらに投影面に対して光を垂直に当てた垂直投影と投影面に対して光を斜めに当てた斜投影に分類される。Figure1-2は、投影法の観点から投影図の分類を整理したものである。

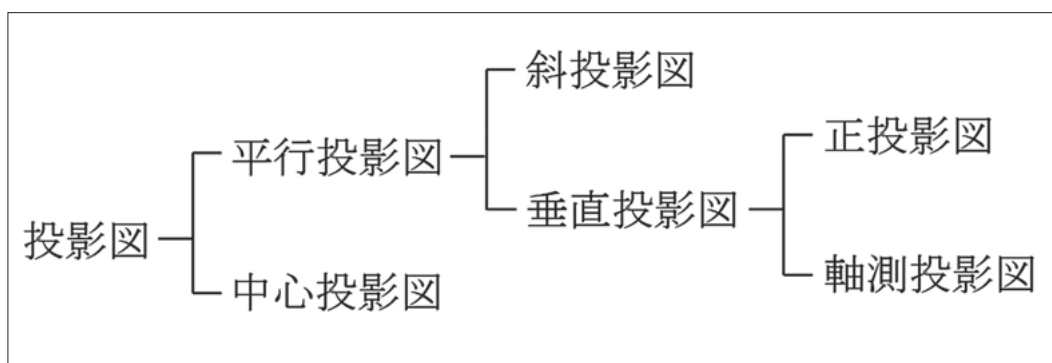


Figure1-2 投影図の種類

検定教科書で見取図として取り扱われている図は、平行関係が保たれているため数学的には平行投影図である。とりわけ第4学年の見取図の作図指導では斜投影図に重点が置かれる傾向がある。しかし教授方略に目を向ければ、指導書や教科書会社のホームページにおいて、次の点が強調されている。まず立体模型を観察すること、次に見える面の数に意識させること、さらに3つの面が見える角度から描くと全体がわかるように描けることに気づかせること、である。ここで人間の目によって立体図形を観察することは、中心投影の原理に基づいているため、投影図では平行関係は保存されない。しかし既に述べてきたように現行の検定教科書における学習内容は、遠近による差異を考慮せず、平行関係を保存して平行投影図として描かせているのである。

以上のことから、検定教科書において扱われている見取図は平行投影の原理に基づいた平行投

影図であり、その中でも斜投影図に焦点が当てられていることが分かる。しかし実際の指導は中心投影の原理が意識されたものとなっている。このように見取図の定義や原理、学習内容の位置づけや教授方略の曖昧さは、見取図の学習困難性の要因となっている可能性がある。

小学校段階における空間認知能力の発達について

横地ら(1974)によれば、幼児からの空間概念の発展段階は、(i)鉛直・水平の世界観、(ii)俯瞰的鉛直・水平の世界観、(iii)見取図の世界観、(iv)数学的遠近法の世界観の順に発展する。この点について渡邊(2004)は、描画認識に着目し、(ii)俯瞰的鉛直・水平の世界観から(iii)見取図の世界観の発展の間に幅があることを指摘し、新たな段階として「(ii')前見取図の世界観」の存在を指摘した(Figure1-3)。さらに(ii)俯瞰的鉛直・水平の世界観から(ii')前見取図の世界観への移行を目指した実践研究を行っている。

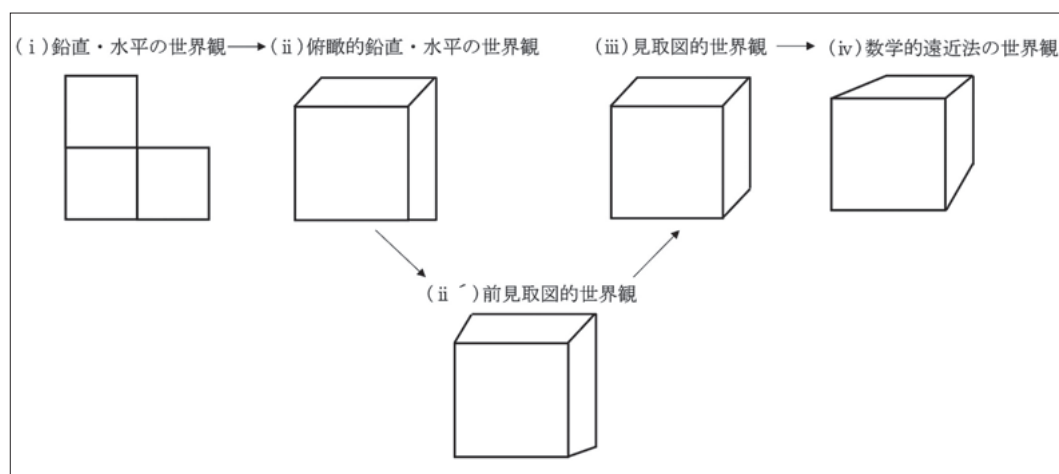


Figure1-3 空間概念の発展段階

その結果、基底面に対する上下左右前後・重ねによる奥行きの獲得により、初期的な鉛直・水平の世界観段階の2人の学習者を除き、実践対象となる全ての学習者が前見取図の世界観に達したことを報告している。さらに簡単な平行線の学習内容を扱うことにより、前見取図の世界観段階の学習者が見取図の世界観段階へ発展する可能性を報告している。これらの研究成果は、小学校段階において意図的な教育によって空間認知能力の段階が高次化することを示している。一方で描画認識に焦点が当てられているため、斜投影図の原理や性質には明示的な焦点が当てられていない。加えて立体模型を見る視点の差異に伴って投影図がどのように描画されるのかや、投影図の読み取りに関する認知については射程に入られていない。

投影図と視点の関連性について

国内の学校数学における学習内容では斜投影図の原理や性質には明示的な焦点が当てられていないものの、ドイツで用いられている教科書の中には、平行投影図に焦点が当てられているものがあり、様々な視点から見た多様な斜投影図が扱われている (Walter, 2012)。例えば、Figure1-4 は、ドイツのグレード8 (中学校第2学年) の教科書における学習内容である。「立方体の最大3つの面を見ることができます」の説明に加え、「右上から」、「左上から」、「右下から」、「左下から」の4つの視点とそれに対応する立方体の斜投影図が取り扱われている。加えて、4つの視点から描かれた投影図が提示され、手前の面に着色する課題が取り扱われている。

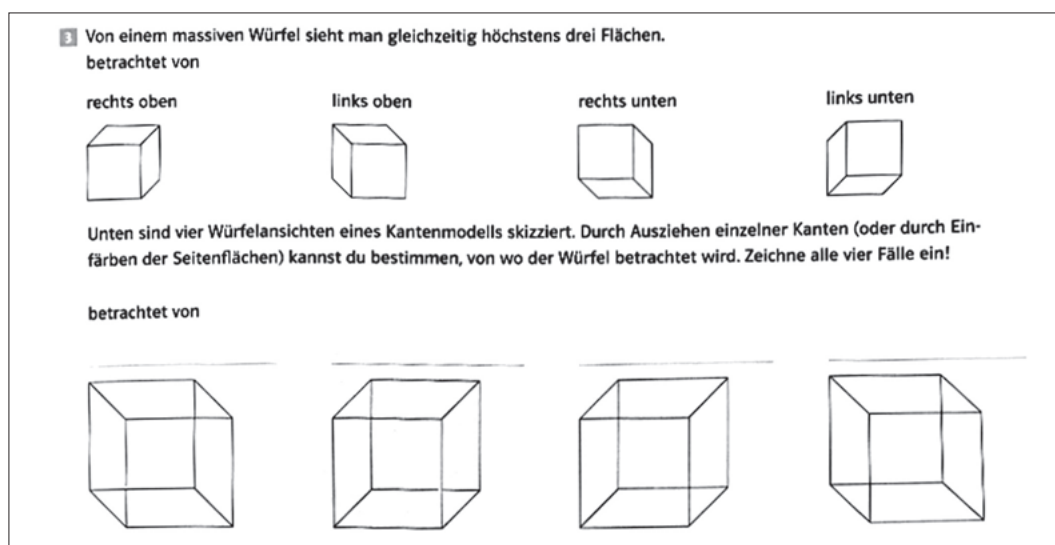


Figure1-4 ドイツの教科書 (Das Mathematikbuch Arbeitsheft 4)

ここで「視点」について整理したい。本稿における「視点」とは立体模型を見る人間の目を意味している。Figure1-5は、立体模型 (立方体) を人間の目で見した場合の中心投影の原理を示した図である。目と立体模型の間に投影面があり、投影面は視線に対して垂直な平面である。立体模型からの目への光線と投影面が交わるところに立体模型の投影図が映るため、立体模型と視点の位置関係が変化することによって、様々な中心投影図が投影される。

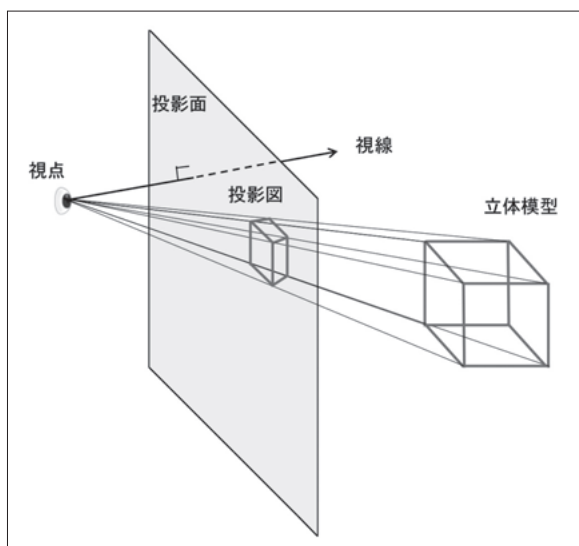


Figure1-5 立体を目で見る場合（中心投影）の原理

次に、Figure1-6 は斜投影の原理を示した図である。斜投影では、立体模型（立方体）が平行光線によって投影されるため、投影面と平行光線がなす角度によって様々な斜投影図が投影される。そのため、斜投影図には視点という概念は無い。

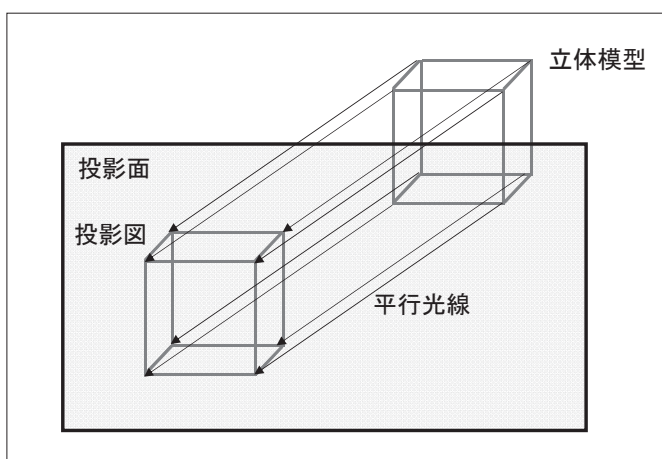


Figure1-6 平行投影（斜投影）の原理

以上を踏まえれば、分析対象としたドイツの教科書では、中心投影の原理に基づいて視点と投影図の関係性を取り扱われていることが分かる。しかし、取り扱われている投影図は中心投影図ではなく、平行投影図（斜投影図）である。投影図の原理と投影図の関係性をどこまで厳密に扱

うのかについては検討の余地がある。

また国内においても視点と投影図の関連性については議論されている。例えば、山田・塚本(2012)は、小学校第5学年の学習者の実態として、「ある一定の向きからはかけているが、別の向きからの見取図はかけない」と問題点を指摘している。この要因として「空間を平面に表わす時に生じる先入観からくる表現のずれを克服できないでいること」、「同一方向からの見方でしか立体をとらえられないでいること」の2点を指摘している。さらに、ビデオカメラを用いた活動や3Dグラフィックスのソフトウェア(3D-GRAPES, Cabri3D)を使用する活動を取り入れた教育実践を行い、その効果を検証して、問題点が改善されたことを報告している。しかし彼らの研究における視点は、ビデオカメラの画像なので中心投影の原理に基づいているのに対し、取り扱われているのは平行投影図であった。ドイツの教科書と同様に、投影図の原理と投影図の関係性をどこまで厳密に扱うのかについては検討の余地がある。加えて対象となった学習者が持ち合わせている空間認知能力の実態がどのような状況にあり、それが教育によってどのように促進されたのかについては十分に検証されていない点に課題が残されている。

平行投影図の性質についての教授方略

澤田・岡部(2003)は、子どもの『3次元空間内に在る図形(モノ)』の2次元と3次元の間の変換の力である「空間(図形)認識の力」が低下していることと、教育現場で「空間(図形)認識の力」を扱った内容が貧弱傾向にあることを指摘した。そして、このような現状を改善するために、「投象」という概念を用いて、「3次元空間に在る図形(立体)を見て描く」という一連の行為を取り入れた「平行投象」を題材としたカリキュラムを提案し、中学校第1学年を対象に教育実践を行った。その結果、見て描くことによって、学習者がアフィン幾何(平行投影)の性質を自ら見出し、平行保存の法則の理解は「四角形に関するアフィン変換」から「三角形に関するアフィン変換」へと段階的に変容することを報告している。つまり、2次元と3次元の関係を捉える上で、実物を見て描くという行為が有効に機能すると考えられる。一方でこの実践は、中学生を対象としたものであった。投影図が導入される小学校段階でも有効に機能するのかについては検証してみる必要がある。

本研究の目的について

以上の議論を踏まえ、本研究では、投影図の原理・性質に着目し、とりわけ視点の違いによって描かれる多様な投影図に焦点を当て、学習者の空間認知能力の実態を解明することを目的とする。なお本研究における視点とは、立体模型を観察する人間の目であり、中心投影の原理における視点である。また対象者は、小学校第6学年とする。この理由は、投影図の公式的な教育(立面図・平面図の学習)が中学校第1学年に位置付けられているからである。つまり、小学校段階の学習経験や生活経験を通して培われた空間認知能力の実態を把握し、小学校段階の投影図に関

する教育への示唆を得ることを目指す。そこで以下の4つの分析の視点を設定する。まず分析の視点1は、見取図の定義の理解である。学習者が見取図の用語をどのように捉えているのかについて調査する。次に、2次元平面に描かれた投影図を読み取る能力を分析する。これを分析の視点2とする。さらに3次元空間にある立体を2次元平面に描画する能力を分析する。これを分析の視点3とする。加えて立体模型の提示の有無が空間認知能力に与える影響について分析する。これを分析の視点4とする。これらの4つの視点の分析を通して、教育への示唆を得ることを目指す。

2. 方法

対象者

A県内B小学校、6年生66名（模型なし1組33名、模型あり2組33名）。

実施時期

2020年12月7日に調査が行われた。所要時間は、各クラス約45分。

課題冊子

まず本調査で用いる課題冊子について述べる。課題冊子は見取図の意味を説明する課題（以下「見取図の意味説明課題」という）、投影図の読み取り課題、立体図形の描画課題、投影図の原理の理解を問う課題の計7問で構成され、全体のページ数は、表紙を除いてA4判13枚である。見取図の意味説明課題は、見取図の用語の定義を問う問題である。投影図の読み取り課題は、立方体の斜投影図を選択する「立方体の斜投影図」の読み取り課題と、立方を描いた図を選択する「立方体を描いた図」の読み取り課題の2観点で調査を行った。3次元空間にある立体図形の描画課題は、学習者の描画の発展段階を明らかにする問題であり、立方体の描画と平行六面体の描画（1クラスのみ対象）を行った。投影図の原理の理解を問う課題は、視点との立体模型の位置関係の変化に伴う投影図の変化を問う問題であり、人と物の位置関係による投影図の描画課題、特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の描画課題、特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の読み取り課題の3観点で調査を行った。調査の観点を整理すれば、下記のようになる。

観点1：見取図の意味説明課題

観点2：投影図の読み取り課題

2-1：「立方体の斜投影図」の読み取り課題

2-2：「立方体を描いた図」の読み取り課題

観点3：立体図形の描画課題

観点4：投影図の原理の理解を問う課題

4-1：人と物の位置関係による投影図の描画課題

4-2：特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の描画課題

4-3：特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の読み取り課題

以下、それぞれの課題について述べる

観点1：見取図の意味説明課題

質問文は、「見取図とはどういう図ですか。言葉で説明しましょう。」であり、見取図の意味を言葉で表す問題を出題した。学習者は見取図の意味をどのように捉えているのかを明らかにする。

観点2：投影図の読み取り課題

2-1：「立方体の斜投影図」の読み取り課題

観点2ではどのような図を見取図であると捉えているかを調査する。「立方体の斜投影図」の読み取り課題では、いくつかの図から「立方体の見取図」として正しいと思うものに○、正しくないと思うものに×を付ける問題を出題した。問題図は、投影する角度が異なる斜投影図が6種類、空間概念の発展段階ごとの投影図が6種類、斜投影図以外の投影図が5種類、立方体以外の投影図が2種類である。

投影する角度が異なる斜投影図は、奥行きの方（以下「斜辺」という）が右上・左上・右下・左下に伸びる図であり、斜辺が右上と左上に伸びる図については斜辺が短いものと、長いものを出題した（Figure2-1）。

投影する角度が異なる斜投影図について整理すれば以下の6種類となる。

- ①斜辺が右上に伸びる斜投影図（斜辺が短い）
- ②斜辺が右上に伸びる斜投影図（斜辺が長い）
- ③斜辺が左上に伸びる斜投影図（斜辺が短い）
- ④斜辺が左上に伸びる斜投影図（斜辺が長い）
- ⑤斜辺が右下に伸びる斜投影図
- ⑥斜辺が左下に伸びる斜投影図

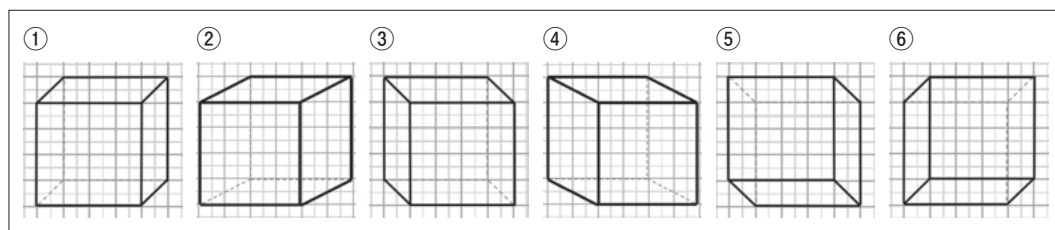


Figure2-1 投影する角度が異なる斜投影図

空間概念の発展段階ごとの投影図は、Figure1-3 に示した横地らが設定した空間概念の発展段階を参考に作成した。（i）鉛直・水平の世界観段階として展開図と正方形、（ii）俯瞰的鉛直・

水平の世界観段階として基底線が一直線の図, (ii') 前見取図の世界観段階として斜辺の平行が一部保たれていない図, 斜辺の平行が全て保たれていない図, (iv) 数学的遠近法の世界観段階として中心投影図を出題した。

空間概念の発展段階ごとの投影図について整理すれば以下の6種類となる。

- ⑦展開図
- ⑧正方形
- ⑨基底線が一直線の図
- ⑩3本の斜辺のうち一部平行でない図
- ⑪3本の斜辺が全て平行でない図
- ⑫中心投影図

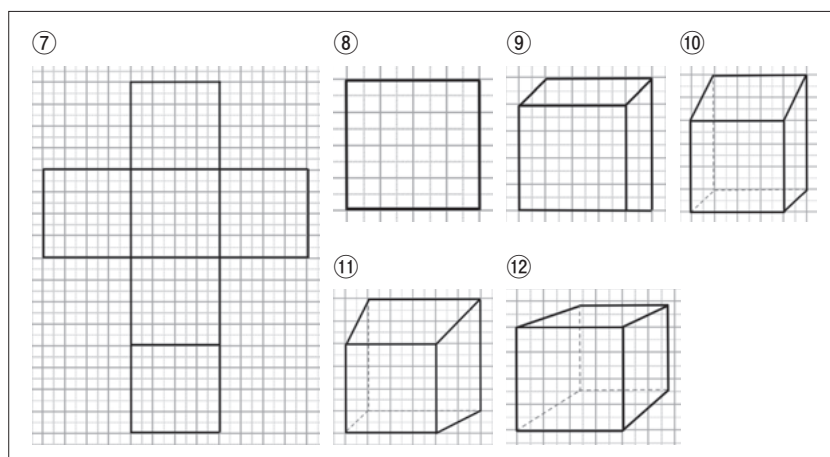


Figure2-2 空間概念の発展段階ごとの投影図

斜投影図以外の投影図は, 平行投影図の中でも等角投影図と不等角投影図を出題した。中心投影図では1点透視図 (Figure2-2の⑫) を出題した。また, 等角投影図は平行が保たれていない正しくない等角投影図, 中心投影図では消失点が1点に集まらない正しくない中心投影図も出題した。

斜投影図以外の投影図について整理すれば以下の4種類となる。

- ⑬等角投影図
- ⑭平行が保たれていない等角投影図
- ⑮不等角投影図
- ⑯消失点がずれている1点透視図

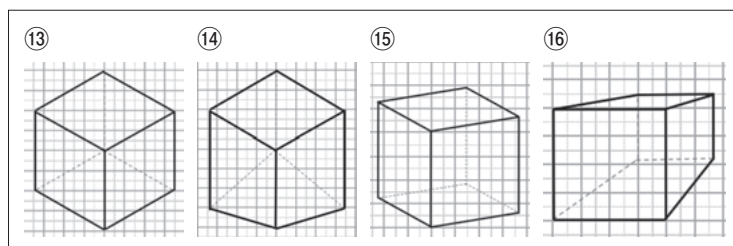


Figure2-3 斜投影図以外の投影図

立方体以外の斜投影図は、直方体の斜投影図と平行六面体の斜投影図を出題した。

⑰直方体の斜投影図

⑱平行六面体の斜投影図

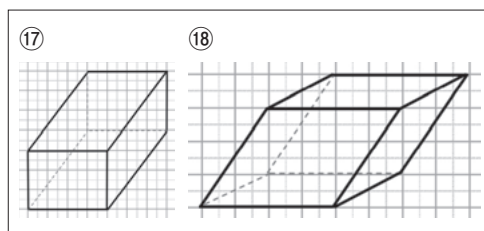


Figure2-4 立方体以外の斜投影図

2-2：「立方体を描いた図」の読み取り課題

2-1 は、「立方体の斜投影図」の読み取り課題であり、見取図を選択する課題であった。これに対し、見取図ではないと判断していたとしても、立方体を投影した図（投影図）であると認識している学習者の存在が考えられる。そこで、「立方体を描いた図」を選択させる課題を出題した。「立方体を描いた図」の読み取り課題は、「立方体を描いた図」として正しいと思うものに○、正しくないと思うものに×を付ける問題を出題した。問題図の種類は、「立方体の斜投影図」の読み取り課題と同じである。

観点3：立体図形の描画課題

学習者の描画の発展段階を明らかにするために、1辺が4cmの立方体の見取図を描く調査を行う（Figure2-5）。今回の調査では、平行や辺の長さを明確に判断するために、5mm方眼を使用している。また、立方体の描画をする際に特に指定が無いと、等角投影図のような図を描く学習者も存在することが予想される。斜投影の描画を発展段階ごとに分けて分析するために、立方体の1辺

のみを基底線として指定した。

また、同様に1辺が4cmである平行六面体（面の形は 60° と 120° で構成されたひし形）の見取図を描く問題を出題した（模型無しで1クラスで実施）。

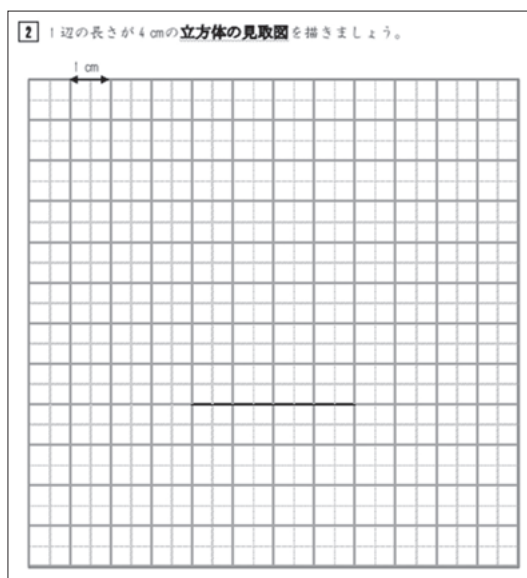


Figure2-5 立方体の見取図の描画課題

観点4：投影図の原理の理解を問う課題

4-1：人と物の位置関係による投影図の描画課題

人と物の位置関係の違いによって投影図がどのように変化するかを理解しているかを明らかにするために、人と物の位置関係による投影図の描画を調査する（Figure2-6）。問題の種類としては、①人が左下、立方体が右上（斜辺が左下に伸びる投影図）、②人が右下、立方体が左上（斜辺が右下に伸びる投影図）、③人が左上、立方体が右下（斜辺が左上に伸びる投影図）、④人が右上、立方体が左下（斜辺が右上に伸びる投影図）、⑤真正面（正方形）の計5問である。



Figure2-6 人と物の位置関係による投影図の描画課題（一部）

4-2：特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の描画課題

特定の位置から立方体を動かしたときに、どのように投影図が変化するかを理解しているかを明らかにするために、特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の描画を調査する（Figure2-7）。問題の種類としては、人が右上で、立方体が左下（斜辺が右上に伸びる投影図）のときから、さらに上下左右に動かしたときの計4問である。

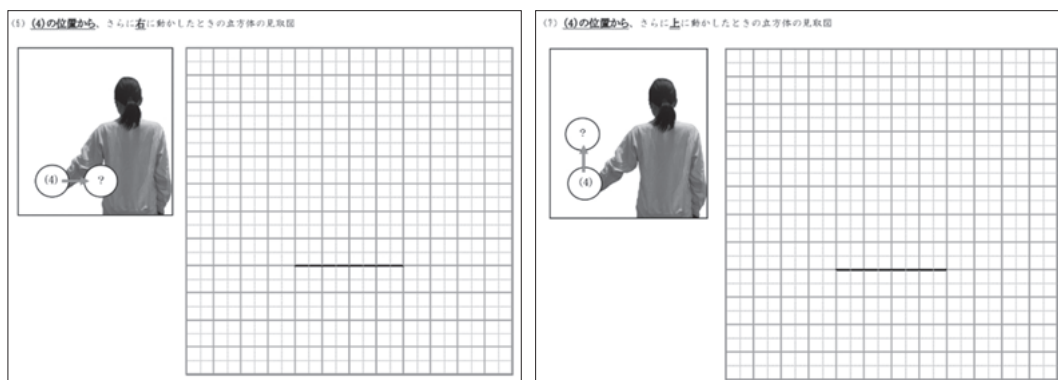


Figure2-7 特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の描画課題（一部）

4-3：特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の読み取り課題

4-2は、特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の描画問題であったが、描画と読み取りで困難さが変化することが考えられる。そこで、特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の読み取りを調査する（Figure2-8）。人が右上、立方体が左下のとき（斜辺が右上

に伸びる投影図) から, 立方体を上下左右に動かしたときに, 立体の投影図がどのように変化すると考えているのかを調査した。答えの選択肢は, 斜辺は右上に伸びるが, 側面と上面の見え方が異なる投影図が4種類, 斜辺は右上に伸び長さが異なる投影図が4種類, 斜辺の長さは同じで視点が異なる投影図が4種類の計12種類である。

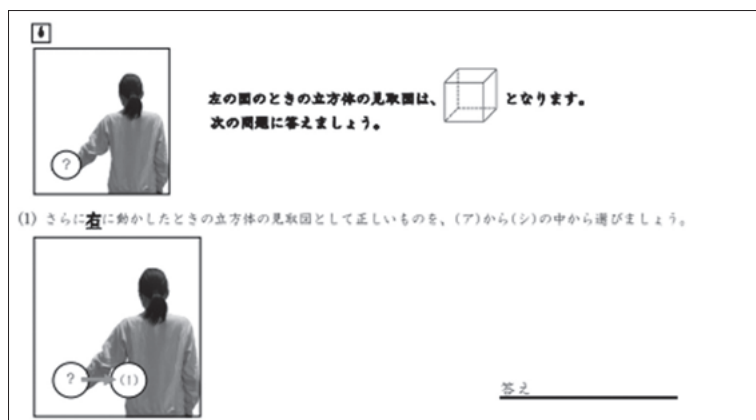


Figure2-8 特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の読み取り課題 (一部)

斜辺は右上に伸びるが, 側面と上面の見え方が異なる投影図は, 基となる問題文中の投影図と比べて, (ア) 側面の面積は変わらず, 上面の面積が小さくなる投影図, (イ) 側面の面積は変わらず, 上面の面積が大きくなる投影図, (ウ) 側面の面積が小さく, 上面の面積が変わらない投影図, (エ) 側面の面積が大きく, 上面の面積が変わらない投影図の4種類である。

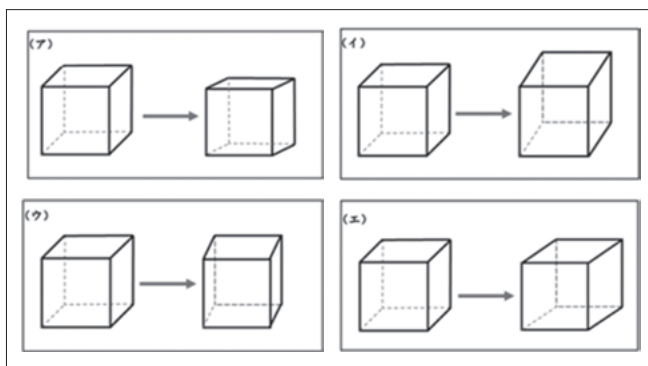


Figure2-9 斜辺は右上に伸びるが側面と上面の見え方が異なる投影図

斜辺は右上に伸び長さが異なる投影図は、(オ)斜辺の長さを短くした投影図、(カ)斜辺の長さを極端に短くした投影図、(キ)斜辺の長さを長くした投影図、(ク)斜辺の長さを極端に長くした投影図の4種類である。

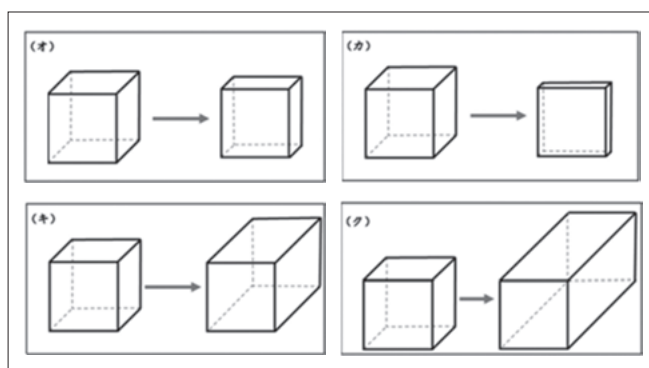


Figure2-10 斜辺は右上に伸び長さが異なる投影図

斜辺の長さは同じで視点が異なる投影図は、(ケ)人が右上、立方体が左下（斜辺が右上に伸びる投影図）、(コ)人が左上、立方体が右下（斜辺が左上に伸びる投影図）、(サ)人が右下、立方体が左上（斜辺が右下に伸びる投影図）、(シ)人が左下、立方体が右上（斜辺が左下に伸びる投影図）の4種類である。

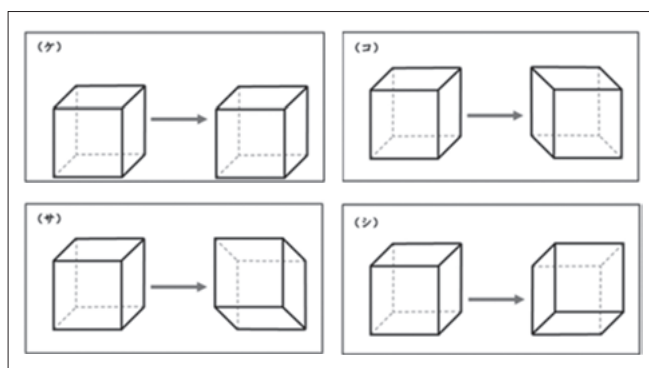


Figure2-11 斜辺の長さは同じで視点が異なる投影図

3. 結果と考察

分析の視点1：見取図の用語の意味について

まず、見取図の意味説明課題での結果を述べる。Table3-1 は見取図の意味説明課題に対する 1

組の学習者の反応，Table3-2は見取図の意味説明課題に対する2組の学習者の反応である。見取図の意味として，教科書に沿うと「立体の全体の形がわかるようにかいた図」が模範解答例である。学習者の回答を「3次元を説明している」，「2次元を説明している」，それ以外の説明をしている「その他」3つに分けて集計した。Figure3-1は，学習者による「3次元を説明している」回答例，Figure3-2は「2次元を説明している」回答例，Figure3-3は「その他」の回答例である。

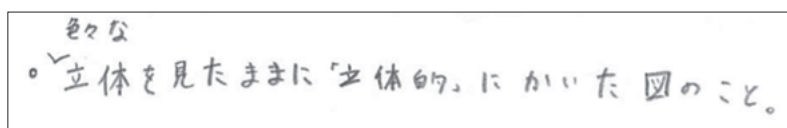


Figure3-1 「3次元を説明している」回答例

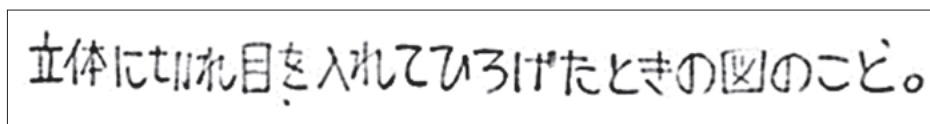


Figure3-2 「2次元を説明している」回答例

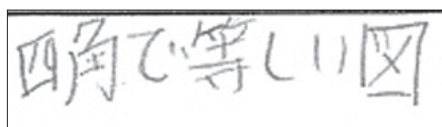


Figure3-3 「その他」の回答例

調査の結果より，見取図とは3次元を表現する図であると認識している児童は約7割であることがわかる。その中でも多くの学習者が見取図を「見たままの図」や「立体的に描く図」であると考えており，3次元のものを2次元上に立体的に表す図であることは理解していることが分かる。一方で，見取図を展開図であると考えている児童も多く，見取図の定義を曖昧に捉えていることが示唆された。

Table3-1 見取図の意味説明課題に対する1組の学習者の反応

	3次元を表している	2次元を表している	その他	無回答
合計（人）	23 (69.7)	9 (27.3)	1 (3.0)	0

Table3-2 見取図の意味説明課題に対する2組の学習者の反応

	3次元を表している	2次元を表している	その他	無回答
合計（人）	24 (72.7)	7 (21.2)	2 (6.1)	0

分析の視点2：2次元平面に描かれた投影図の読み取りについて

まず、「立方体の斜投影図」の読み取り問題での結果を述べる。斜投影図であるものは①～⑥の全てであり、Table3-3は投影する角度が異なる斜投影図に対する1組の学習者の反応、Table3-4は投影する角度が異なる斜投影図に対する2組の学習者の反応である。斜辺が上に伸びる図のことを、9割以上の学習者が見取図であると考えているが、斜辺が下に伸びる図に関しては、約半数は見取図ではないと判断していることが示された。

Table3-3 投影する角度が異なる斜投影図に対する1組の学習者の反応

	① 斜辺右上 (斜辺短い)	② 斜辺右上 (斜辺長い)	③ 斜辺左上 (斜辺短い)	④ 斜辺左上 (斜辺長い)	⑤ 斜辺右下	⑥ 斜辺左下
○	30 (90.9)	30 (90.9)	33 (100.0)	30 (90.9)	21 (63.6)	17 (51.5)
×	3 (9.1)	3 (9.1)	0	3 (9.1)	12 (36.4)	16 (48.5)
無回答	0	0	0	0	0	0

Table3-4 投影する角度が異なる斜投影図に対する2組の学習者の反応

	① 斜辺右上 (斜辺短い)	② 斜辺右上 (斜辺長い)	③ 斜辺左上 (斜辺短い)	④ 斜辺左上 (斜辺長い)	⑤ 斜辺右下	⑥ 斜辺左下
○	33 (100.0)	31 (93.9)	32 (97.0)	30 (90.9)	18 (54.6)	16 (48.5)
×	0	2 (6.1)	1 (3.0)	2 (6.1)	14 (42.4)	17 (51.5)
無回答	0	0	0	1 (3.0)	1 (3.0)	0

Table3-5, Table3-6は空間概念の発展段階ごとの斜投影図に対する学習者の反応である。斜投影図であるものは⑦～⑫には存在しない。特に⑪3本の斜辺が全て平行になっていない図に関しては、1組で8割、2組で9割の学習者が正しい見取図ではないと判断し、⑨基底線が一直線である図は1組で10割、2組で9割の学習者が正しい見取図ではないと判断していることから、多くの学習者が、平行が保たれていない図を見取図として捉えていないことが示された。

Table3-5 空間概念の発展段階ごとの斜投影図に対する1組の学習者の反応

	⑦ 展開図	⑧ 正方形	⑨ 基底線が 一直線	⑩ 一部平行 でない	⑪ 全て平行 でない	⑫ 1点透視図
○	7 (21.2)	18 (54.5)	0	6 (18.2)	6 (18.2)	8 (24.2)
×	26 (78.8)	15 (45.5)	33 (100.0)	27 (81.8)	27 (81.8)	25 (75.8)
無回答	0	0	0	0	0	0

Table3-6 空間概念の発展段階ごとの斜投影図に対する2組の学習者の反応

	⑦ 展開図	⑧ 正方形	⑨ 基底線が 一直線	⑩ 一部平行 でない	⑪ 全て平行 でない	⑫ 1点透視図
○	10 (30.3)	19 (57.6)	2 (6.1)	8 (24.2)	3 (9.1)	8 (24.2)
×	22 (66.7)	14 (42.4)	31 (93.9)	25 (75.8)	30 (90.9)	25 (75.8)
無回答	1 (3.0)	0	0	0	0	0

Table3-7, Table3-8 は斜投影図以外の投影図に対する学習者の反応である。斜投影図であるものは⑬～⑯には存在しない。両方のクラスで、等角投影や不等角投影の図を見取図であると判断している学習者は約9割であった。⑫1点透視図に関しては7.5割の学習者が見取図ではないと判断していることが明らかになった。

Table3-7 斜投影図以外の投影図に対する1組の学習者の反応

	⑬ 等角投影	⑭ 間違った 等角投影図	⑮ 不等角投影図	⑯ 間違った 1点透視図	⑫ 1点透視図
○	32 (97.0)	1 (3.0)	29 (87.9)	4 (12.1)	8 (24.2)
×	1 (3.0)	31 (94.0)	4 (12.1)	29 (87.9)	25 (75.8)
無回答	0	1 (3.0)	0	0	0

Table3-8 斜投影図以外の投影図に対する2組の学習者の反応

	⑬ 等角投影	⑭ 間違った 等角投影図	⑮ 不等角投影図	⑯ 間違った 1点透視図	⑫ 1点透視図
○	30 (90.9)	5 (15.2)	31 (94.0)	4 (12.1)	8 (24.2)
×	2 (6.1)	27 (81.8)	1 (3.0)	29 (87.9)	25 (75.8)
無回答	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	0	0

Table3-3, 3-4の①～④やTable3-5, 3-6から、小学校第6学年の学習者は斜投影図の原理や性質をインフォーマルに理解しているものの、斜投影図とそれ以外の投影図との違い (Table3-7, 3-8) や、視点の違いによる多様な斜投影図 (Table3-3, 3-4の⑤, ⑥) については理解が不十分であると考えられる。

次に「立方体を描いた図」の読み取り課題の結果について述べる。Table3-9は投影する角度が異なる斜投影図に対する1組の学習者の反応, Table3-10は投影する角度が異なる斜投影図に対する2組の学習者の反応である。立方体の投影図であるものは①～⑥の全てであり、「立方体の見取

図」の読み取り課題の結果と比較すると、斜辺が下に伸びる図のことを見取図とは思っていないが、立方体の図であると認識している学習者が存在することが示された。

Table3-9 投影する角度が異なる斜投影図に対する1組の学習者の反応

	① 斜辺右上 (斜辺短い)	② 斜辺右上 (斜辺長い)	③ 斜辺左上 (斜辺短い)	④ 斜辺左上 (斜辺長い)	⑤ 斜辺右下	⑥ 斜辺左下
○	29 (87.9)	30 (90.9)	30 (90.9)	29 (87.9)	23 (69.7)	23 (69.7)
×	3 (9.1)	2 (6.1)	2 (6.1)	3 (9.1)	9 (27.3)	9 (27.3)
無回答	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)

Table3-10 投影する角度が異なる斜投影図に対する2組の学習者の反応

	① 斜辺右上 (斜辺短い)	② 斜辺右上 (斜辺長い)	③ 斜辺左上 (斜辺短い)	④ 斜辺左上 (斜辺長い)	⑤ 斜辺右下	⑥ 斜辺左下
○	28 (84.8)	31 (93.9)	29 (87.9)	30 (90.9)	24 (72.8)	24 (72.7)
×	5 (15.2)	2 (6.1)	4 (12.1)	2 (6.1)	8 (24.2)	9 (27.3)
無回答	0	0	0	1 (3.0)	1 (3.0)	0

分析の視点3：3次元空間にある立体の2次元平面描画について

Table3-11とTable3-12は、1辺が4cmの立方体の見取図の描画課題の結果である。正しい見取図の描画には①平行な辺は平行に描かれている、②前面と後面は1辺が4cmの正方形である、③目に見えない線は点線で描かれていることの3つの要素が必要である。3要素の全てを満たしている解答を「正しい見取図」とし、「点線と実線の混同」、「点線が描かれていない」などの「一部不備」、「実線のみ」など、おおよそ正しく描くことができている図を準正答として分類した。Figure3-4は学習者が描いた正しい見取図、一部不備、実線のみ、点線のみ、点線と実線の混同の回答例である。調査の結果、見取図を正しく描いた学習者は、準正答を除き1組で54.6%、2組で57.6%であり、約6割の学習者しか正しい斜投影図を描くことができないことが明らかになった。

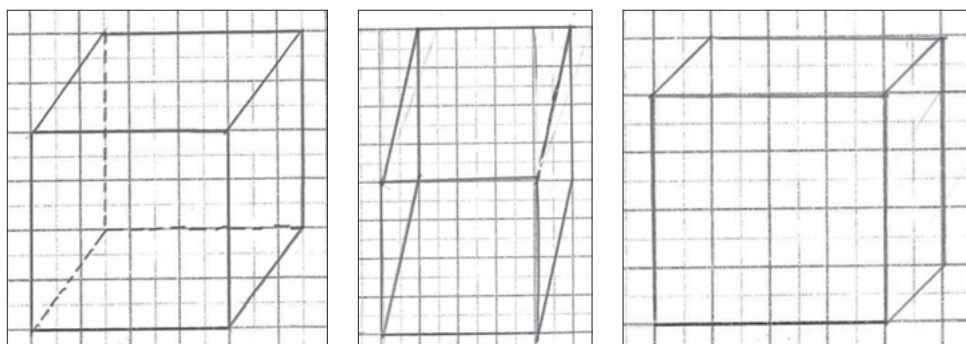


Figure3-4 見取図の描画の例 (左から正しい見取図,一部不備,実線のみ)

Table3-11 立方体の見取図の描画課題に対する1組の学習者の反応

	正しい見取図	点線と実線の混同	一部不備	実線のみ	
合計 (人)	18 (54.6)	1 (3.0)	3 (9.1)	2 (6.1)	
	正方形	平行が保たれていない	基底線が一直線	展開図	無回答
合計 (人)	1 (3.0)	4 (12.1)	1 (3.0)	3 (9.1)	0

Table3-12 立方体の見取図の描画課題に対する2組の学習者の反応

	正しい見取図	点線と実線の混同	一部不備	実線のみ	
合計 (人)	19 (57.6)	2 (6.1)	1 (3.0)	2 (6.1)	
	正方形	平行が保たれていない	基底線が一直線	展開図	無回答
合計 (人)	0	4 (12.1)	1 (3.0)	3 (9.1)	1 (3.0)

Table3-13は平行六面体の斜投影図の描画課題に対する2組の学習者の反応である。模範解答例はFigure3-5であり、筆者がプログラムを作成して投影図を描画したものである。これを基にして、平行関係が保たれている斜投影図を正答として分析した。また、実線のみで描かれた図を準正答とした。正しい見取図を描いた学習者は準正答を除き2人のみであり、誤答としては平行関係が保たれていない図を描く学習者が最も多かった。立方体の描画の問題と比較すると、立方体

では正しい見取図を描いていた19人のうち、9人は平行六面体の平行が保たれた図を描くことができていないことが明らかになった。これらのことから、全ての面の形が正方形や長方形でなく、対辺がそれぞれ平行であることが大きな特徴であるひし形（平行四辺形）になると、平行関係がわからなくなる学習者が増えることが示された。

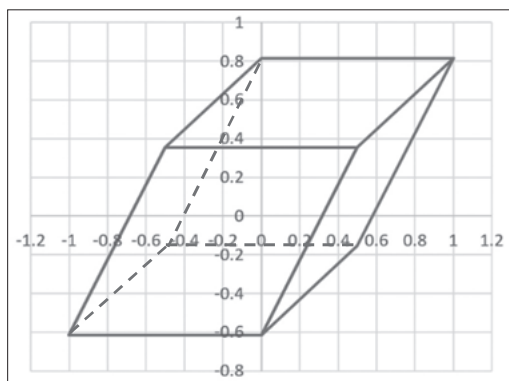


Figure3-5 平行六面体の斜投影図の模範回答例

Table3-13 平行六面体の見取図の描画課題に対する2組の学習者の反応

	正しい見取図	実線のみ	明らかに辺の比がおかしい	平行が保たれていない	
合計（人）	2 (6.1)	4 (12.1)	1 (3.0)	13 (39.4)	
	基底線が一直線	平行四辺形	展開図	側面が描けない	無回答
合計（人）	3 (9.1)	3 (9.1)	2 (6.1)	4 (12.1)	1 (3.0)

Table3-14とTable3-15は人と物の位置関係による斜投影図の描画問題の結果である。前述した見取図の3要素の全てを満たしている図を正答である◎、「点線と実線の混同」、点線が一部描かれていないなどの「一部不備」、「実線のみ」など、おおよそ正しく描くことができる図を準正答である○とした。なお、(1)は斜辺が左下、(2)は斜辺が右下、(3)は斜辺が左上、(4)は斜辺が右上、(5)は正方形となる。調査の結果を見ると、多くの学習者が人と物の位置関係による見取図の見え方を理解してはいないが、両方のクラスとも、立方体を上側で持っているときより、立方体を下側で持っているときの方が正しい見取図を描くことができる学習者が多いことがわかる。これらのことから、立方体为上側にあるときと下側にあるときでは学習者の認知に差異がみられることが明らかとなった。

Table3-14 人と物の位置関係による斜投影図の描画問題に対する1組の学習者の反応

	(1) 人：左下 立方体：右上	(2) 人：右下 立方体：左上	(3) 人：左上 立方体：右下	(4) 人：右上 立方体：左下	(9) 真正面
◎	1 (3.0)	1 (3.0)	5 (15.2)	6 (18.2)	21 (63.7)
○	0	0	2 (6.1)	5 (15.2)	0
×	31 (94.0)	31 (94.0)	25 (75.7)	21 (63.6)	11 (33.3)
無回答	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)

Table3-15 人と物の位置関係による斜投影図の描画問題に対する2組の学習者の反応

	(1) 人：左下 立方体：右上	(2) 人：右下 立方体：左上	(3) 人：左上 立方体：右下	(4) 人：右上 立方体：左下	(9) 真正面
◎	4 (12.1)	4 (12.1)	9 (27.3)	8 (24.2)	18 (54.6)
○	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	3 (9.1)	0
×	28 (84.9)	28 (84.9)	22 (66.7)	21 (63.7)	14 (42.4)
無回答	0	0	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)

分析の視点4：立体模型提示の有無が与える影響について

Table3-14とTable3-15より、全般的に2組の学習者の正答率が高い傾向が示された。このことから模型があることによって視点の違いによる見取図を理解しやすくなることが考えられる。一方で、真正面から見たときは、1組の学習者の方が高い正答率を示している。このように模型の存在が有効に機能する場合とそうでない場合が存在する可能性が示された。

Table3-16とTable3-17は、特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の描画課題の結果である。模範解答例は、Figure3-6の通りである。人と物の位置関係による投影図の描画問題の(4)が正答及び準正答であった学習者(Table3-14, 3-15)に着目し、分析を行った。また、1組と2組の正答率を比較すると模型の有無によって有意な差は見られなかった。

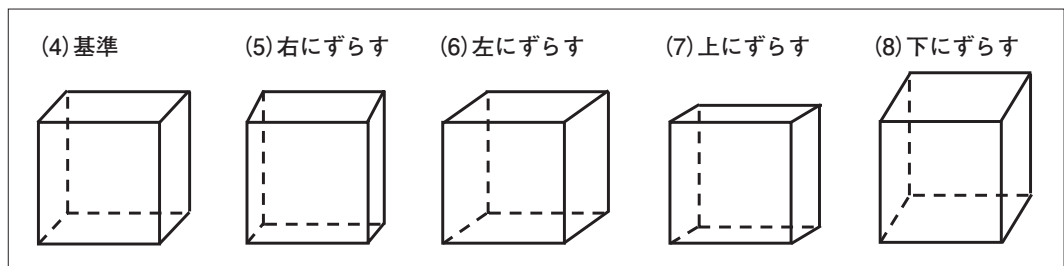


Figure3-6 特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の描画課題の模範解答例

**Table3-16 特定の位置から立方体を動かしたときの
投影図の変化の描画課題に対する1組の学習者の反応**

	(5) 右にずらす	(6) 左にずらす	(7) 上にずらす	(8) 下にずらす
◎	3 (9.1)	2 (6.1)	2 (6.1)	2 (6.1)
○	0	0	0	0
×	8 (24.2)	9 (27.3)	9 (27.3)	9 (27.3)
無回答	0	0	0	0

**Table3-17 特定の位置から立方体を動かしたときの
投影図の変化の描画課題に対する2組の学習者の反応**

	(5) 右にずらす	(6) 左にずらす	(7) 上にずらす	(8) 下にずらす
◎	0	1 (3.0)	2 (6.1)	1 (3.0)
○	0	0	0	0
×	10 (30.3)	9 (27.3)	8 (24.2)	9 (27.3)
無回答	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)

Table3-18とTable3-19は、特定の位置から立方体を動かしたときの投影図の変化の読み取り課題の結果である。(1)の正答は(ウ)、(2)の正答は(エ)、(3)の正答は(ア)、(4)の正答は(イ)である。調査の結果より、描画に比べ読み取りの方が正答率が高いことが明らかになった。さらに、2組では左右に動かしたときの正答率が上下に動かしたときよりも高い結果が示された。このようにモデルの提示は、限定的な場面で有効である可能性が示された。

**Table3-18 特定の位置から立方体を動かしたときの
投影図の変化の読み取り課題に対する1組の学習者の反応**

	(1) 右にずらす	(2) 左にずらす	(3) 上にずらす	(4) 下にずらす
○	6 (18.2)	9 (27.3)	8 (24.2)	5 (15.2)
×	26 (78.8)	23 (69.7)	24 (72.8)	26 (78.7)
無回答	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	2 (6.1)

**Table3-19 特定の位置から立方体を動かしたときの
投影図の変化の読み取り課題に対する2組の学習者の反応**

	(1) 右にずらす	(2) 左にずらす	(3) 上にずらす	(4) 下にずらす
○	14 (42.4)	18 (54.6)	6 (18.2)	6 (18.2)
×	19 (57.6)	14 (42.4)	27 (81.8)	25 (75.7)
無回答	0	1 (3.0)	0	2 (6.1)

また、Table3-20とTable3-21は、「立方体を描いた図」の読み取り課題での、斜投影図以外の投影図に対する学習者の反応である。立方体の投影図であるものは⑬、⑮、⑫である。調査の結果から、1組では約1.5割、2組では約4割の学習者が一点透視で描かれた図を、立方体を描いた図であると判断していることが明らかになった。

Table3-20 斜投影図以外の投影図に対する1組の学習者の反応

	⑬ 等角投影	⑭ 間違った 等角投影図	⑮ 不等角投影図	⑯ 間違った 1点透視図	⑫ 1点透視図
○	25 (75.7)	2 (6.1)	25 (75.8)	5 (15.2)	5 (15.2)
×	6 (18.2)	29 (87.8)	7 (21.2)	26 (78.7)	26 (78.7)
無回答	2 (6.1)	2 (6.1)	1 (3.0)	2 (6.1)	2 (6.1)

Table3-21 斜投影図以外の投影図に対する2組の学習者の反応

	⑬ 等角投影	⑭ 間違った 等角投影図	⑮ 不等角投影図	⑯ 間違った 1点透視図	⑫ 1点透視図
○	28 (84.9)	5 (15.2)	30 (90.9)	8 (24.2)	13 (39.4)
×	4 (12.1)	27 (81.8)	2 (6.1)	24 (72.8)	20 (60.6)
無回答	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	0

実際に目で模型を見た場合は、立方体が中心投影となって見えることから、模型がある2組では模型の無い1組に比べ、一点透視図で描かれた図を見て立方体を描いた図であると判断する学習者が多いことが考えられる。このことから、模型の提示は斜投影図の学習に有効だけでなく、中心投影図の学習にも有効であると考えられる。

4. 総合考察

小中連携を意識した投影図に関する教育への示唆

本研究において斜投影図の読み取りについて、斜辺が右上に伸びる図を多くの学習者が見取図と捉えているものの、斜辺が右下や左下に伸びる図は約半数の学習者が見取図でないと判断する傾向が示された。また斜投影図の表現について、正しい見取図を描くことのできた学習者は約6割であり、描く手順に重点を置いた現在の教育の問題点が浮き彫りとなった。このように読み取りに対して表現することの方が困難である実態が示された。また視点の違いによって多様な斜投影図が描かれることの理解は不十分であることが明らかとなった。

既に述べたようにデジタル教書の普及に伴い、画面上に投影された直方体を操作しながら学習を進める機会は今後さらに増加すると考えられる。このことを踏まえると、様々な角度からみた

多様な斜投影図の読み取りや表現について、小学校段階から中学校段階における学習内容として適切に位置付けていくことが重要であると考えられる。この際、立体模型を見て描くという行為は有効に機能すると考えられるものの、その効果が限定的である可能性がある。とりわけ見て描く行為は中心投影の原理に基づいた行為であり、平行投影の原理や性質の理解には支障となる可能性が示唆された。この点については投影図に関する教育において十分に考慮する必要があると考えられる。

今後の課題

今後の課題としてまず、調査課題を改善し、追調査を行うことから学習者の空間認知発達の実態を解明することである。この結果を踏まえ、適切な学習時期と学習内容を考慮し、教育実践を通して妥当性を検証する必要がある。

付記

本稿は、第25回数学教育学会大学院生等発表会予稿集の内容に、新たな分析対象となる調査課題を加え、結果と考察を大幅に加筆・修正したものである。

謝辞

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP18K13262

調査にご協力頂きました先生方と児童の皆様に、ここに改めてお礼申し上げます。

引用文献

- 秦野真衣・米澤朋子・吉井直子・高田雅美・城和貴 (2012) ,ARを用いた空間認識能力向上のための学習方法,情報処理学会研究報告,Vol.2012-MPS-87,No.33,1-6,2012.
- 一松信 他 (2020) .みんなと学ぶ小学校算数4年下 (p.111) .学校図書.
- 勝井晃 (1995) .2 感覚・知覚より認知・認識へ.序 空間認知の発達研究とその意義.空間認知の発達研究会編.空間に生きる 一空間認知の発達の研究一 (p.3) .北大路書房.
- 黒田恭史 (2007) .脳科学の算数・数学教育への応用 (p.171,172) .ミネルヴァ書房.
- 文部科学省,国立教育政策研究所 (2014) .平成26年度 全国学力・学習状況調査報告書 小学校算数,pp.48-49. (2021年6月24日現在)
- <https://www.nier.go.jp/14chousakekkahoukoku/report/data/pmth.pdf>
- 澤田麻衣子・岡部恭幸 (2003) .「投象」による空間(図形)認識の力の変容.数学教育学会誌2003,Vol.44,No.3・4,85-92,2003.
- 志田恵穂 (2000) .第2節 立体を図に表す.第V章 多面体を作ろう!・多面体の性質・制作と立体の表現-.横地清監修,菊池乙夫編,第一学年の「選択数学」(p.103,104) .明治図書.
- 清水静海・根上生也・寺垣内政一・矢部敏昭 他 (2020) .わくわく算数4下 (pp.95-107) .啓林館.
- 清水静海・根上生也・寺垣内政一・矢部敏昭 他 (2020) .わくわく算数2下 (pp.98-105) .啓林館.

- 鈴木正彦 (1994) .1.新しい図形教育をめざして—躍動的な図形教育を進めるために.3章 図形.横地清監修.21世紀への学校数学の展望 (p.218).誠文堂新光社.
- 竹内謙彰 (1995) .3 空間能力とは.7章 空間認知の個人差,空間認知の発達研究会編,空間に生きる —空間認知の発達の研究— (p.147).北大路書房.
- 渡邊伸樹 (2004) .描画にみる空間概念の形成過程:前見取図の世界観の獲得段階についての実証的研究,非刊行論文.
- Walter et al. (2012), Das Mathematikbuch 4 (p.26,27). In:Franz et al (Eds.), Ernst Klett Verlag.
- Walter et al. (2012), Das Mathematikbuch Arbeitsheft 4 (p.20,21). In:Franz et al (Edu.), Ernst Klett Verlag.
- 山田和美・塚本弓子 (2012) , ICT を活用した立方体の見取図の指導における工夫,新潟大学教育学部研究紀要,Vol.5,No2,39-45,2012.
- 横地清 (1981) ,保育百科,明治図書.
- 横地清 (1995a) ,絵画活動にみる空間概念の発展 第1部/1歳児～3歳児,数学教育学会研究紀要,Vol.36,No1・2,48-61,1995.
- 横地清 (1995b) ,絵画活動にみる空間概念の発展 第2部/4歳児～5歳児,数学教育学会研究紀要,Vol.36,No1・2,62-86,1995.
- Yokochi,K,Okamori,H.and Machida,S. (1974) An Improved Program for Elementary School Geometry -Based on Result Obtained through Experiments-, JSME (ed.) *The Proceedings of ICME-JSME Regional Conference on Curriculum and Teacher Training for Mathematical Education*, 81-85.